



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Korteweg-de Vries ekvation

av

Angelica Aira

2017 - No 23

Korteweg-de Vries ekvation

Angelica Aira

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Olof Bergvall

2017

Sammanfattning

Föreliggande uppsats handlar om Korteweg-de Vries-ekvationen (KdV-ekvationen) och dess solitonlösning, som är en våg på grunt vatten. En lösning till KdV-ekvationen är solitonvågen som med ett bevarat utseende bildas då den icke-linjära och den dispersiva termen i KdV-ekvationen neutraliseras av varandra. I uppsatsens sista del undersöks även Weierstrass elliptiska funktion och dess lösning av KdV-ekvationen.

Innehåll

1	Introduktion	1
2	Bakgrund	3
2.1	Ordinära differentialekvationer	3
2.1.1	Linjära differentialekvationer	5
2.1.2	Icke-linjära differentialekvationer	7
2.2	Partiella differentialekvationer	8
2.2.1	Linjära differentialekvationer	8
2.2.2	Icke-linjära differentialekvationer	10
2.3	Hyperboliska funktioner	10
3	Korteweg–de Vries ekvationen	13
3.1	Korteweg–de Vries ekvationen	13
3.2	John Scott Russell	14
3.3	Korteweg–de Vries lösning	15
4	Solitoner	17
5	Weierstrass elliptiska funktion	25
	Litteraturförteckning	29

Kapitel 1

Introduktion

Den här uppsatsen handlar om differentialekvationer. Då differentialekvationer är ett brett ämne i matematiken begränsas föreliggande uppsats till Korteweg-de Vries-ekvationen (KdV-ekvationen) och dess solitonlösning, som är en modell av långa vågor på grunt vatten. Grunden till hela uppsatsen ligger på John Scott Russells intressanta observation av solitonen, som färdas med bevarat utseende och kan passera hinder i vatten som en fågel utan att störas eller förändras.

I bakgrundsteorin behandlas grunderna i de differentialekvationer som behövs för att förstå KdV-ekvationen. I avsnittet studeras ordinära, linjära och icke-linjära differentialekvationer, samt partiella, linjära och icke-linjära differentialekvationer.

Avslutningsvis studeras hur Weierstrass elliptiska funktion ger en lösningar till KdV-ekvationen.

Kapitel 2

Bakgrund

I följande kapitel förklaras de grunder om differentialekvationer som behövs för att förstå KdV-ekvationen och dess solitonlösning.

Differentialekvationer är ekvationer som uttrycker relationer mellan en obekant funktion och dess derivator. Om det är en funktion av en variabel är det en ordinär differentialekvation (ODE), (se [6] för mer information om ordinära differentialekvationer). Om det är en funktion av flera variabler, är det en partiell differentialekvation (PDE), (se [5] för mer information om partiella differentialekvationer).

Differentialekvationer är viktiga inom vetenskap, fysik och matematik, och kan vara av första, andra och upp till n -te ordningen. Ordningen av differentialekvationen bestäms av den högst existerande derivatan i ekvationen. Inom vetenskap, fysik och matematik är de flesta differentialekvationer av första eller andra ordningen lättare att analysera. Tredje ordningens differentialekvationer uppstår i spridande vågor, fjärde ordningens differentialekvationer går att finna i ekvationer kring elasticitet, medan femte eller högre ordning av differentialekvationerna är mycket ovanliga i tillämpningar.

2.1 Ordinära differentialekvationer

En första ordningens ordinär differentialekvation är där funktionen $y(x)$ är av en variabel och uppfyller

$$y' = f(x, y). \quad (2.1)$$

Funktionen $f(x, y)$ är en funktion av variabeln x och funktionen $y(x)$, där $y = y(x)$ är en lösning till differentialekvationen. Ekvationen (2.1) kan skrivas som

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Exempel 2.1.1. *Differentialekvationen*

$$y' = xy$$

är en första ordningens ordinär differentialekvation med $f(x, y) = xy$. En lösning till ekvationen är

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Derivering ger

$$y'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} = xy(x).$$

Varje funktion på formen $y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}}$, där C är en godtycklig konstant, löser ekvationen.

□

Differentialekvationer har oändligt många funktioner som lösningar, vilket syns i *Exempel 2.1.1*, eftersom C är en godtycklig konstant. Däremot kräver vissa ekvationer ett specifikt värde y_0 i en given punkt x_0 så att

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.2}$$

Om x_0 är en av ändpunkterna a eller b till ett definitionsintervall (a, b) , ska uttrycket (2.2) uppfattas som

$$\lim_{x \rightarrow a^+} y(x) = y_0 \quad \text{respektive} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} y(x) = y_0.$$

Ovanstående kallas ett begynnelsevillkor, en differentialekvation (2.1) och ett villkor (2.2) kallas ett begynnelsevärdesproblem.

Exempel 2.1.2. *Antalet bakterier $y(t)$ vid tiden t i en bakterieodling ökar. Antag att vi vet att antalet bakterier $y(t)$ har värdet y_0 vid en viss tidpunkt. Vi väjer tidsskalan så att denna tidpunkt är $t = 0$ vilket ger oss $y(0) = y_0$. Vi vill sedan kunna förutsäga värdet av $y(t)$ vid varje tidpunkt t .*

Bakteriernas ökning ges av

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t).$$

Antag att Δy är proportionell mot Δt och $y(t)$, det vill säga

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) = ky(t)\Delta t$$

där k är proportionalitetskonstanten (med ett specifikt värde för olika bakterier). Divideras uttrycket med Δt , låter $\Delta t \rightarrow 0$ och antar att $y(t)$ är deriverbar, framkommer differentialekva-

tionen

$$y'(t) = ky(t), \quad k > 0 \quad (2.3)$$

Alltså uppfyller $y(t)$ differentialekvationen (2.3) och löser begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(t) = ky(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

En lösning till differentialekvationen (2.3) är

$$y = e^{kt}.$$

Derivering ger

$$y'(t) = ke^{kt} = ky(t).$$

Varje funktion på formen $y(t) = Ce^{kt}$, där C är en konstant, löser ekvationen. Med hjälp av villkoret $y(0) = y_0$ får vi att $C = y_0$. Lösningen är därför

$$y = y_0 e^{kt}.$$

Därmed ses att bakterierna ökar exponentiellt med tiden.

□

2.1.1 Linjära differentialekvationer

Vad som bestämmer om en ekvation är linjär eller icke-linjär är exponenten av y och dess derivator. Linjära differentialekvationer är ekvationer där den oberoende variabeln y och dess derivator har exponenten 1.

En linjär differentialekvation av första ordningen är således en ekvation av formen

$$y' + g(x)y = h(x) \quad (2.4)$$

där $g(x)$ och $h(x)$ är kontinuerliga funktioner.

En funktion $\mathcal{L}$ sägs vara linjär om

$$\mathcal{L}(y_1 + y_2) = \mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2) \quad (2.5)$$

och

$$\mathcal{L}(\alpha y) = \alpha \mathcal{L}(y) \quad (2.6)$$

där α är oberoende av y .

För att lösa den linjära differentialekvationen

$$y' + g(x)y = h(x)$$

börjar man med att bestämma en primitiv funktion $G(x)$ till funktionen $g(x)$, det vill säga $G'(x) = g(x)$, där $e^{G(x)}$ är den integrerande faktorn. Multipliceras bägge leden i ekvationen med den integrerande faktorn fås

$$y'e^{G(x)} + g(x)ye^{G(x)} = h(x)e^{G(x)}$$

Enligt produktregeln vid derivering är detta ekvivalent med

$$(ye^{G(x)})' = h(x)e^{G(x)}$$

vilket betyder att $ye^{G(x)}$ är en primitiv funktion till $h(x)e^{G(x)}$. Det är ekvivalent med

$$ye^{G(x)} = \int h(x)e^{G(x)} dx + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Divideras uttrycket med integrerande faktorn fås den allmänna lösningen

$$y = e^{-G(x)} \left(\int h(x)e^{G(x)} dx \right) + Ce^{-G(x)}.$$

Givet ett begynnelsevillkor kan C bestämmas.

Exempel 2.1.3. Den linjära ordinära differentialekvationen

$$y' + 2y = 1$$

kan lösas genom att bestämma den primitiva funktionen $2x$ till 2 . Därmed är e^{2x} den integrerande faktorn. Multiplicerar vi e^{2x} i bägge leden fås

$$y'e^{2x} + 2ye^{2x} = e^{2x}.$$

Denna kan skrivas som

$$(ye^{2x})' = e^{2x}.$$

Således blir

$$ye^{2x} = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

där C är en godtycklig konstant, vilket ger lösningarna

$$y = \frac{1}{2} + Ce^{-2x}.$$

□

2.1.2 Icke-linjära differentialekvationer

Icke-linjära differentialekvationer är ekvationer där den beroende variabeln y eller dess derivator förekommer med nollskild exponent skild från 1.

Funktionen

$$\mathcal{L}(y) = yy'$$

är icke-linjär eftersom

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y_1 + y_2) &= (y_1 + y_2)(y_1 + y_2)' = \\ &= (y_1 + y_2)(y_1' + y_2') = \\ &= y_1y_1' + y_1y_2' + y_2y_1' + y_2y_2' \neq \\ &\neq y_1y_1' + y_2y_2' = \mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2)\end{aligned}$$

och därmed inte uppfyller villkoret (2.5).

Exempel 2.1.4. Den icke-linjära ordinära differentialekvationen

$$yy' = x$$

kan lösas genom att integrera bägge sidorna med avseende på x . Då fås

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

där C är en godtycklig konstant, vilket ger lösningarna

$$y = \pm \sqrt{x^2 + C}.$$

□

2.2 Partiella differentialekvationer

Partiella differentialekvationer är differentialekvationer som innehåller funktioner av flera variabler tillsammans med deras partiella derivator.

2.2.1 Linjära differentialekvationer

Vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

kan skrivas på följande sätt

$$\partial_t^2(u) - c^2 \partial_x^2(u) = 0.$$

Det är en linjär partiell differentialekvation, eftersom

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y_1 + y_2) &= \partial_t^2(y_1 + y_2) - \partial_x^2(y_1 + y_2) = \\ &= (\partial_t^2 y_1 - \partial_x^2 y_1) + (\partial_t^2 y_2 - \partial_x^2 y_2) = \mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha y) &= \partial_t^2(\alpha y) - c^2 \partial_x^2(\alpha y) = \\ &= \alpha(\partial_t^2 y - c^2 \partial_x^2 y) = \alpha \mathcal{L}(y) \end{aligned}$$

och den därmed uppfyller villkoren (2.5) och (2.6).

Exempel 2.2.1. Vågekvationen, som beskriver utbredningen av vågor av bland annat ljud och vatten, är ett viktigt exempel på partiella differentialekvationer. Lösningar $f(x, t)$ till vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

kan bestämmas genom att införa variabelbytet

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct, \end{cases}$$

där

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial u}{\partial t} &= c \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial v}{\partial t} &= -c. \end{aligned}$$

Med hjälp av kedjeregeln fås första ordningens derivata med avseenden på u och v ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial f}{\partial u} - c \frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

Andraderivatan fås på liknande sätt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \left(c \frac{\partial}{\partial u} - c \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(c \frac{\partial f}{\partial u} - c \frac{\partial f}{\partial v} \right) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

Dessa andraderivator insatt i vågekvationen ger

$$\begin{aligned}c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} &= c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \Leftrightarrow \\ 4c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0.\end{aligned}$$

Uttrycket

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$$

kan skrivas som

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0.$$

Därför kan första termen elimineras och kvar blir

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \psi(v)$$

där ψ är en godtycklig funktion av en variabel. Integration med avseende på v ger

$$f = \Psi(v) + \Phi(u),$$

där Ψ är en primitiv funktion till ψ och Φ är en annan godtycklig funktion av en variabel.

I ursprungsvariablerna fås

$$f(x, t) = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct)$$

som är den allmänna lösningen till vågekvationen. Φ beskriver en våg som färdas till vänster, Ψ beskriver en våg som färdas till höger.

2.2.2 Icke-linjära differentialekvationer

KdV-ekvationen är ekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

som kan skrivas

$$\partial_t(u) + 6u\partial_x(u) + \partial_x^3(u) = 0.$$

Det är en icke-linjär partiell differentialekvation, eftersom

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y_1 + y_2) &= \partial_t(y_1 + y_2) + 6(y_1 + y_2)\partial_x(y_1 + y_2) + \partial_x^3(y_1 + y_2) = \\ &= \partial_t y_1 + \partial_t y_2 + 6\partial_x y_1^2 + 12\partial_x y_1 y_2 + 6\partial_x y_2^2 + \partial_x^3 y_1 + \partial_x^3 y_2 = \\ &\neq \mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2) \end{aligned}$$

inte uppfyller villkoret (2.5).

KdV-ekvationen kommer behandlas mer utförligt längre fram i uppsatsen.

2.3 Hyperboliska funktioner

Hyperboliska funktioner liknar trigonometriska funktioner, vilket märks på deras benämningar. De hyperboliska funktionernas definition är

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \operatorname{sech}(x) &= \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

där benämningen läses *sinus*-, *cosinus*- och *secanshyperbolicus*. Jämna funktioner är *cosh* och *sech*, medans *sinh* är en udda funktion

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$

$$\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech}(x)$$

$$\sinh(-x) = -\sinh(x)$$

Hyperboliska ettan är

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

vilket är motsvarigheten till trigonometriska ettan.

De hyperboliska funktionerna $\sinh$, $\cosh$ och sech förhåller sig till de trigonometriska funktionerna genom den imaginära enheten i med egenskapen $i^2 = -1$, så att

$$\sinh(x) = -i \sin(ix), \quad \sinh(ix) = i \sin(x)$$

$$\cosh(x) = \cos(ix), \quad \cosh(ix) = \cos(x)$$

$$\operatorname{sech}(x) = \sec(ix), \quad \operatorname{sech}(ix) = \sec(x)$$

Kapitel 3

Korteweg–de Vries ekvationen

3.1 Korteweg–de Vries ekvationen

Historien om KdV-ekvationen börjar år 1834 då den skotska ingenjören John Scott Russell observerar en soliton som är en typ av vattenvåg. Den franska matematikern och fysikern Joseph Boussinesq publicerade år 1871 den första matematiska teorin av Russells observation [2]. Boussinesq introducerade även KdV-ekvationen något år senare, i rapporten [3] ses utförligare hur nära Boussinesq var KdV-ekvationen. Lord Rayleigh var en engelsk fysiker som år 1876 publicerade sin teori om Russells observation, vilket skedde innan de holländska matematikerna Diederik Korteweg och Gustav de Vries år 1895 upptäckte KdV-ekvationen.

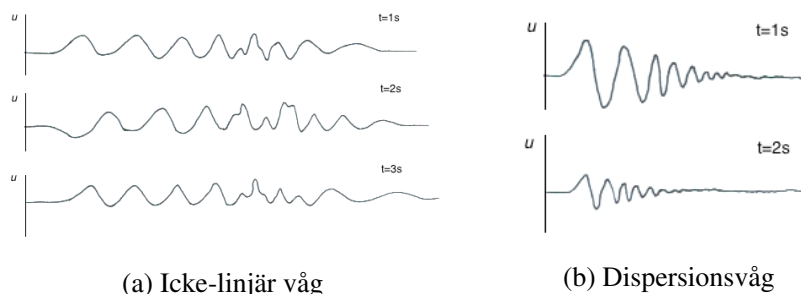
KdV-ekvationen är som tidigare visats, en icke-linjär partiell differentialekvation av tredje ordningen. Det är en modell för långa vågor på grunt vatten. Den förenklade formen av KdV-ekvationen är

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (3.1)$$

där $u = u(x, t)$ beskriver höjden av en våg vid tiden t och positionen x , det vill säga höjden av vattnet ovanför jämviktsnivån, $u \frac{\partial u}{\partial x}$ är den icke-linjära termen, se figur 3.1a, och $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ är dispersionstermen, se figur 3.1b. KdV-ekvationen kan ha olika utseende beroende på vilket variabelbyte man har gjort vid härledningen av formeln. Denna uppsats behandlar ekvationen som i (3.1) om inget annat framkommer.

I detta fall uppstår dispersion på grund av grunt vatten. Dispersion betyder att vågornas hastighet varierar beroende på frekvensen.

Solitonerna, se figur 4.2, bildas av den dispersiva och icke-linjära effekten då de inträffar tillsammans som i KdV-ekvationen. Den dispersiva och icke-linjära effekten neutraliseras av varandra och får ett utseende som i stor utsträckning bevaras.



Figur 3.1 De två termerna i KdV-ekvationen som neutraliserar varandra

3.2 John Scott Russell

Russell gjorde sin observationen i en vattenkanal i Skottland. Observationen beskrivs bäst genom att citera Russell [7].

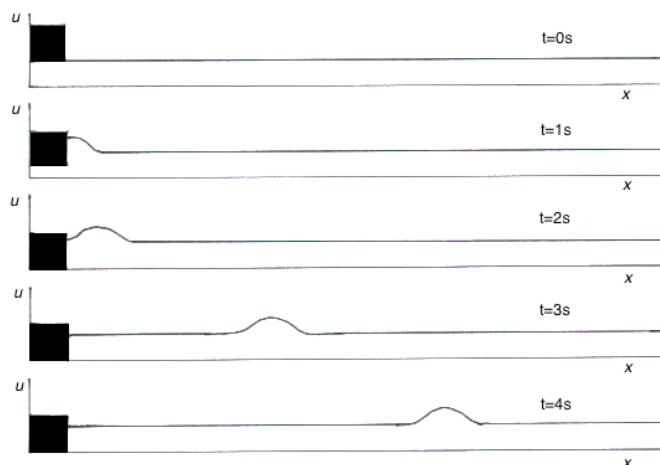
I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped—not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation; then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August, 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation.

Denna våg kallade Russell för The Wave of Translation, idag kallas den för soliton och är en lösning till KdV-ekvationen.

Russell började studera vågens form, utbredningshastighet och stabilitet genom att bygga en vattenkanal. Han återskapade liknande vågor genom att släppa ner vikter i vattenkanalen, se figur 3.2.

Med detta experiment fastställde Russell följande fyra viktiga egenskaper om solitära vågor:

- Vågorna är klockformade och reser med oföränderlig form och hastighet.



Figur 3.2 Illustration av Russells experiment

- Hastigheten för den solitära vågen är

$$c = \sqrt{g(h+a)}$$

där a är maximala amplituden över vattenytan, h är vattendjupet i jämvikt och g är tyngdaccelerationen.

- Vågor som är för stora för vattendjupet delas in i en stor och en liten våg.
- En stor våg kan passera en liten våg utan förändring, till skillnad från vanliga vågor som slås ihop.

Professorerna Sir George Gabriel Stokes och Sir George Biddell Airy på Cambridge Universitet i England accepterade inte Russells teori. De ansåg att den stred mot den matematiska/fysikaliska lagen om flytande rörelse eftersom de trodde att Russells teori var linjär.

3.3 Korteweg–de Vries lösning

Korteweg och de Vries börjar deras teori precis på samma sätt som Boussinesq och Rayleigh. Deras utgångspunkt var att observera långa vågor i vätskor med försumbara densitetsvariationer i en virvelfri kanal med grunt vatten, se figur 3.3.

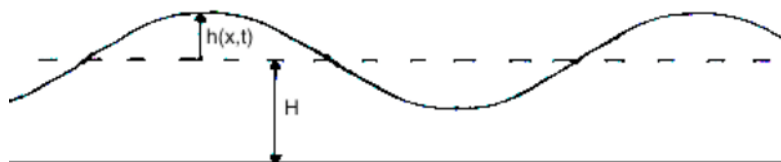
Koordinaterna för vätskepartikeln ges av x och y . Vattenhöjden i jämvikt betecknas med konstanten H , vågens amplitud med h och vågytan med funktionen $y = H + h(x, y)$. En viktig

förutsättning är att våglängden ska vara stor och vågens amplitud h ska vara liten i jämförelse med H . Via långa, tekniska och, enligt Korteweg och de Vries själva, långtråkiga beräkningar framtogs KdV-ekvationen som den såg ut första gången i avhandlingen [4]

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{3}{2} \frac{g}{q_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} h^2 + \frac{2}{3} \alpha h + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)$$

där $\sigma = \frac{1}{3} h^3 - \frac{T}{\rho} \frac{H}{g}$.

Genom enklare variabelbyten och andra algebraiska manipulationer kommer man fram till den förenklade KdV-ekvationen (3.1). För vidare information läses deras avhandling i sin helhet [4].



Figur 3.3 Vågytan

Kapitel 4

Solitoner

En lösning till KdV-ekvationen kallas soliton och är förklaringen till Russells observation.

KdV-ekvationen är

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (4.1)$$

Den konstanta vågformen $u(x, t) = f(x - ct)$, ger

$$u(x, t) = U(x - ct) \quad (4.2)$$

där $X = x - ct$, och c är solitonens hastighet.

Substituera (4.2) till (4.1), vilket ger ordinära differentialekvationen

$$-cU'(X) + 6U(X)U'(X) + U'''(X) = 0. \quad (4.3)$$

Eftersom lösningen ska beskriva en fysisk våg är det rimligt att kräva att vågen klingar av i oändligheten, det vill säga

$$\lim_{X \rightarrow \infty} U(X) = 0. \quad (4.4)$$

Då alla termer i (4.3) är deriverbara kan uttrycket integreras. Detta leder till en andra ordningens ODE

$$-cU + 3U^2 + U'' = C_1 \quad (4.5)$$

där C_1 är en integrationskonstant.

Differentialekvation av första ordningen är lättare att behandla än differentialekvation av andra ordningen, därför multipliceras uttrycket (4.5) med U' ,

$$-cUU' + 3U^2U' + U''U' = C_1U'.$$

Sedan integrera uttrycket, vilket ger

$$-cU^2 + 2U^3 + (U')^2 = C_1U + C_2 \quad (4.6)$$

där C_2 är en integrationskonstant.

Genom att introducera *Lemma 1* så kommer konstanterna C_1 och C_2 kunna elimineras.

Lemma 1. Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion med kontinuerlig derivata f' , sådan att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ och } \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \text{ existerar.}$$

Då gäller det att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

Bevis. Låt $g(x) = x$. Då gäller det att

$$g'(x) = 1 \text{ och } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \text{ samt } \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 1.$$

Låt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \text{ och } \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = b.$$

l'Hospitals regel ger

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - a}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (4.7)$$

Därför är

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - a}{g(x)} = 0$$

eftersom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - a = 0 \text{ och } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

Å andra sidan är

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$$

då

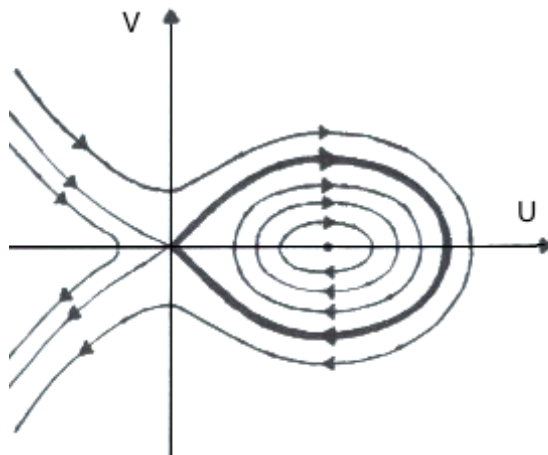
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = b \text{ och } \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 1.$$

Därmed kan slutsatsen via (4.7) dras att $b = 1$. □

Från *Lemma 1* fås att

$$U' \rightarrow 0 \text{ och } U'' \rightarrow 0$$

då $x \rightarrow \infty$, vilket betyder att både C_1 och C_2 måste vara noll.



Figur 4.1 En elliptisk kurva, där den tjocka kurvan visar solitonens lösning

Ekvation (4.5) kan skrivas som ett system av differentialekvationer

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = cU - 3U^2. \end{cases}$$

Betrakta funktionen

$$H(U, V) = V^2 - cU^2 + 2U^3. \quad (4.8)$$

Där

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dX} &= 2VV' - 2cUU' + 6U^2U' = \\ &= 2V(V' - cU + 3U^2) = 2V(V' - V') = 0 \end{aligned}$$

Därmed är H konstant som funktion av X .

Solitoner ligger i nivåkurvor (se figur 4.1) för funktionen $H(U, V)$, det vill säga lösningen till $H(U, V) = c$ för något värde på c .

Visa att

$$H(U, V) = 0$$

ligger i nivåkurvor. Som tidigare visats är H konstant som funktion av X , låt konstanten vara K , det vill säga $H(U, V) = K$.

För solitoner går

$$U \rightarrow 0 \text{ då } X \rightarrow \infty.$$

Då solitonen $U \rightarrow 0$ fås från (4.8) att

$$H \rightarrow V^2 \text{ då } X \rightarrow \infty.$$

Således går

$$V \rightarrow \sqrt{K} \text{ då } X \rightarrow \infty.$$

Från *Lemma 1* ses att

$$U' \rightarrow 0 \text{ då } X \rightarrow \infty,$$

eftersom $U' = V$ måste även

$$V \rightarrow 0 \text{ då } X \rightarrow \infty$$

Ekvationen $H(U, U') = 0$ kan skrivas som den separabla differentialekvationen

$$-cU^2 + 2U^3 + (U')^2 = 0.$$

Då U^2 bryts ut fås

$$(U')^2 = U^2(c - 2U)$$

där kvadratroten ur uttrycket ger

$$\Leftrightarrow U' = \pm U\sqrt{c - 2U}. \quad (4.9)$$

Då $U(X) = U(-X)$ är en jämn funktion räcker det med att välja att kolla på fallet då $X \geq 0$ eller då $X < 0$. Här väljs fallet då $X \geq 0$, där med kan uttrycket (4.9) skrivas som

$$U' = -U\sqrt{c - 2U}$$

för $X \geq 0$.

För separabla differentialekvationer är det tillåtet att separera $\frac{dU}{dX}$ så att var och en av de två variablerna U och X finns på varsin sida om ekvationen. Uttrycket (4.9) skrivs därför på formen

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dX} &= -U\sqrt{c - 2U} = \\ &= -\frac{1}{U\sqrt{c - 2U}} \frac{dU}{dX} = 1 \end{aligned}$$

vilket ger att

$$-\int_{U(X_0)}^{U(X)} \frac{1}{U\sqrt{c-2U}} \frac{dU}{dX} dX = \int_{U(X_0)}^{U(X)} dX$$

$$\Leftrightarrow -\int_{U(X_0)}^{U(X)} \frac{1}{U\sqrt{c-2U}} dU = X - X_0$$

för $X_0 > 0$ och $X > 0$.

På grund av kontinuitet gäller $X_0 \rightarrow 0$, vilket ger

$$-\int_{c/2}^{U(X)} \frac{1}{U} \frac{1}{\sqrt{c-2U}} dU = X, \quad X > 0. \quad (4.10)$$

Integrering av vänstra sidan görs genom att introducera variabeln θ och genom att sätta

$$U = \frac{c}{2 \cosh^2(\theta)}. \quad (4.11)$$

Omskrivning av (4.11) ger

$$U = \frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2(\theta)$$

eftersom $\operatorname{sech}(\theta) = \frac{1}{\cosh(\theta)}$.

Faktorisera ut konstanten

$$U = \frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2(\theta) = \frac{1}{2}c \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \operatorname{sech}^2(\theta) \right)$$

Derivera med hjälp av kedjeregeln

$$y = f(g(\theta)) \text{ derivering ger } y' = f'(g(\theta))g'(\theta).$$

Sätt

$$y = f(u) = u^2 \text{ derivering ger } f'(u) = 2u$$

och

$$u = g(\theta) = \operatorname{sech}(\theta) = \frac{1}{\cosh(\theta)}.$$

Här måste kedjeregeln användas igen. Sätt

$$g = h(v) = \frac{1}{v} \text{ derivering ger } h'(v) = -\frac{1}{v^2}$$

och

$$v = k(\theta) = \cosh(\theta) \text{ derivering ger } k'(\theta) = \sinh(\theta).$$

Vilket ger

$$g'(\theta) = h'(k(\theta))k'(\theta) = -\frac{1}{v^2} \sinh(\theta) = -\frac{\sinh(\theta)}{\cosh^2(\theta)}.$$

Således är

$$u = g(\theta) = \frac{1}{\cosh(\theta)} \text{ derivering ger } g'(\theta) = -\frac{\sinh(\theta)}{\cosh^2(\theta)}.$$

Vilket ger

$$\begin{aligned} f'(g(\theta))g'(\theta) &= 2u \left(-\frac{\sinh(\theta)}{\cosh^2(\theta)} \right) = \\ &= 2 \frac{1}{\cosh \theta} \left(-\frac{\sinh(\theta)}{\cosh^2(\theta)} \right) = \left(-\frac{2 \sinh(\theta)}{\cosh^3(\theta)} \right) \end{aligned}$$

Med konstanten som faktorerades ut i början fås

$$\frac{1}{2}c \left(-\frac{2 \sinh(\theta)}{\cosh^3(\theta)} \right) = \left(-\frac{c \sinh(\theta)}{\cosh^3(\theta)} \right).$$

Således är derivatan av (4.11)

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{c \sinh(\theta)}{\cosh^3(\theta)}, \quad \theta > 0. \quad (4.12)$$

Notera att $\theta = 0$ motsvarar $U = \frac{c}{2}$, och $\theta = \infty$ motsvarar $U = 0$.

För att lösa integralen (4.10) beräknas först $\sqrt{c - 2U}$ med hjälp av (4.11),

$$\sqrt{c - 2U} = \sqrt{c - 2 \left(\frac{c}{2 \cosh^2(\theta)} \right)} = \sqrt{c - \frac{c}{\cosh^2(\theta)}}$$

bryt ut c

$$\sqrt{c \left(1 - \frac{1}{\cosh^2(\theta)} \right)}$$

utveckla parentesen så allt står under samma nämnare

$$\sqrt{c \left(\frac{\cosh^2(\theta) - 1}{\cosh^2(\theta)} \right)}$$

parentesen kan skrivas om eftersom $\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1$, vilket ger

$$\sqrt{c} \frac{\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)}.$$

Uttrycket (4.10) kan då beräknas med hjälp av (4.11) och (4.12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{U} \frac{1}{\sqrt{c-2U}} \frac{\partial U}{\partial \theta} &= \\ &= \frac{1}{\frac{c}{2\cosh^2(\theta)}} \frac{1}{\sqrt{c-2\left(\frac{c}{2\cosh^2(\theta)}\right)}} \left(-\frac{c \sinh(\theta)}{\cosh^3(\theta)} \right) = \\ &= -\frac{2\cosh^2(\theta)}{c} \frac{\cosh(\theta)}{\sqrt{c} \sinh(\theta)} \frac{c \sinh(\theta)}{\cosh^3(\theta)} = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{c}}. \end{aligned}$$

Således är

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{c}} \theta(X) &= \int_0^{\theta(X)} \frac{2}{\sqrt{c}} d\theta = - \int_{c/2}^{U(X)} \frac{dU}{U \sqrt{c-2U}} = X \Leftrightarrow \\ X &= \frac{2}{\sqrt{c}} \theta(X) \Leftrightarrow \theta(X) = \frac{\sqrt{c}}{2} X \end{aligned}$$

Därför blir (4.11) solitonen

$$U(X) = \frac{c}{2\cosh^2(\theta(X))} = \frac{c}{2\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}X\right)} = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}X\right),$$

eftersom $\operatorname{sech}\theta = \frac{1}{\cosh\theta}$. Vilket ger i ursprungsvariablerna

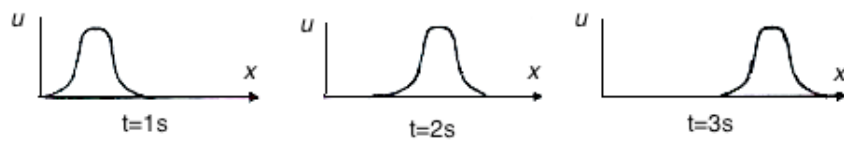
$$U(X) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right), \quad X \geq 0.$$

Detta är en lösning till KdV-ekvationen som beskriver en soliton som rör sig åt höger, se figur 4.2. Eftersom att både U och sech är jämna funktioner så gäller ekvationen även för $X < 0$.

Sats 2. Funktionen

$$U(X) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right)$$

löser KdV-ekvationen.



Figur 4.2 Högerförflyttad soliton

Kapitel 5

Weierstrass elliptiska funktion

En annan funktion som ger lösningar till KdV-ekvationen är Weierstrass elliptiska funktion som betecknas med $\wp$, och används för att parametrisera elliptiska kurvor över komplexa tal.

Weierstrass funktion är en funktion av den komplexa variabeln z och ett gitter Λ i det komplexa planet. Gittret är mängden av alla komplexa tal på formen $m + n\omega$ där ω är ett komplext tal med nollskild imaginärdel, där m och n är heltal. Funktionen definieras som

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n \neq 0} \left(\frac{1}{(z - (m + n\omega))^2} - \frac{1}{(m + n\omega)^2} \right), \quad (5.1)$$

Weierstrass funktion uppfyller

$$\wp''' = 12\wp\wp', \quad (5.2)$$

se [1] för grundligare information.

Uttrycket (5.2) påminner om KdV-ekvationen och uttrycket (4.3), därför kan det tänkas att

$$U(X) = -\frac{1}{2} c \wp\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} (x - ct) + x_0\right) + \frac{1}{6}c \quad (5.3)$$

är en lösning till KdV-ekvationen. Vi påminner oss om att uttrycket (4.3) skrivs som

$$-cU'(X) + 6U(X)U'(X) + U'''(X) = 0.$$

I ekvation (5.3) sätter vi $X = x - ct$, vilket ger

$$U(X) = -\frac{1}{2} c \wp\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right) + \frac{1}{6}c. \quad (5.4)$$

Derivera uttrycket för att få första och tredjederivatans som behövs för att lösa ekvation (4.3). Då funktionen är en sammansatt funktion finns en yttre och inre funktion med derivator. Alla ordningar av derivator har samma inre funktion och därmed samma inre derivata, medan den yttre funktionen kommer vara annorlunda för varje ordning av derivering och därmed har de olika yttre derivator.

Inre funktionen är

$$\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right),$$

med derivatan

$$\frac{1}{2} \sqrt{c}.$$

Förstaderivatans yttre funktionen är

$$-\frac{1}{2} c \wp\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right) + \frac{1}{6} c,$$

med derivatan

$$-\frac{1}{2} c \wp'\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right),$$

detta med inre funktionens derivata ger förstaderivatans

$$\begin{aligned} U'(X) &= -\frac{1}{2} c \wp'\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right) \frac{1}{2} \sqrt{c} = \\ &= -\frac{1}{4} c \sqrt{c} \wp'\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Andraderivatans fås på samma sätt. Yttre funktionen är

$$-\frac{1}{4} c \sqrt{c} \wp'\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right),$$

med derivatan

$$-\frac{1}{4} c \sqrt{c} \wp''\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right),$$

detta med inre funktionens derivata ger andraderivatans

$$\begin{aligned} U''(X) &= -\frac{1}{4} c \sqrt{c} \wp''\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right) \frac{1}{2} \sqrt{c} = \\ &= -\frac{1}{8} c^2 \wp''\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right) \end{aligned}$$

Tredjederivatatan fås på samma sätt. Yttre funktionen är

$$-\frac{1}{8} c \wp''\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right),$$

med derivatan

$$-\frac{1}{8} c \wp'''\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right),$$

detta med inre funktionens derivata ger tredjederivatatan

$$\begin{aligned} U'''(X) &= -\frac{1}{8} c^2 \wp'''\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right) \frac{1}{2} \sqrt{c} = \\ &= -\frac{1}{16} c^2 \sqrt{c} \wp'''\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0\right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ekvationerna (5.4), (5.5) och (5.6) insatt i ekvationen (4.3) ger

$$\begin{aligned} &-c \left(-\frac{1}{4} c \sqrt{c} \wp' \left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0 \right) \right) \\ &+ 6 \left(-\frac{1}{2} c \wp \left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0 \right) + \frac{1}{6} c \right) \left(-\frac{1}{4} c \sqrt{c} \wp' \left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0 \right) \right) \\ &+ \left(-\frac{1}{16} c^2 \sqrt{c} \wp''' \left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0 \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

Utveckling av parenteserna ger

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} c^2 \sqrt{c} \wp' \left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0 \right) \\ &\frac{3}{4} c^2 \sqrt{c} \wp \left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0 \right) \wp' \left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0 \right) - \frac{1}{4} c^2 \sqrt{c} \wp' \left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0 \right) \\ &- \frac{1}{16} c^2 \sqrt{c} \wp''' \left(\frac{1}{2} \sqrt{c} X + x_0 \right) = 0. \end{aligned}$$

Efter förkortning och multiplikation med 16 fås

$$\wp''' = 12 \wp \wp',$$

vilket betyder att (5.3) är en lösning till KdV-ekvationen.

Sats 3. *Funktionen*

$$U(X) = -\frac{1}{2} c \wp\left(\frac{1}{2} \sqrt{c} (x - ct) + x_0\right) + \frac{1}{6}c$$

löser KdV-ekvationen.

Litteraturförteckning

- [1] Arbarello, E. *Sketches of KdV*, Symposium in Honor of C.H. Clemens Salt Lake City, UT 2000. Contemporary Mathematics, vol. 312, s.9-69, 2002.
- [2] Boussinesq, J. *Théorie de l'intumescence liquide, appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire*. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. 72:755-759, 1871.
- [3] de Jager, E.M. *On the Origin of the Korteweg-de Vries Equation* arxiv:math/0602661, s.8-13, 2006.
- [4] Korteweg, D & de Vries, G. *On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves* Phil. Mag., 39, s.422-443, 1895
- [5] Olver, PJ. *Introduction to Partial Differential Equations*. Switzerland : Springer International Publishing, 2014. E-bok.
- [6] Persson, A & Böiers, L, *Analys i en variabel*, 3. [rev.] uppl. Lund: Studentlitteratur, s.363-416, 2010.
- [7] Scott Russell, J. *Report on Waves, Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*. London, 1845.