SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Interpolation

av

Louise Johansson

2017 - No 45

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Interpolation

Louise Johansson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Annemarie Luger

2017

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1 INLEDNING

I detta arbete ska vi gå igenom interpolation, splines samt minsta kvadratmetoden. Dessa tre är alla approximationer, vilket betyder att vi estimerar funktionsvärden i tal planet och skapar en graf. I interpolation och splines har vi exakta mätvärden som kallas interpolationspunkter. Dessa mätvärden vet vi stämmer och därför skapar vi en kurva som går igenom dessa punkter. Dock så är funktionsvärdena mellan dessa mätpunkter endast estimerade. För approximation med minsta kvadratmetoden använder vi mätvärden som är inexakta eller mätvärden som är av mycket större antal än graden på funktionen vilket skapar ett olösbart ekvationssystem. Grafen är ett estimat som inte nödvändigtvis behöver gå igenom några mätpunkter.

För interpolering med polynom finns det olika tillvägagångssätt beroende på typen av polynom samt användningsområdet. Vilken metod man än väljer att använda så får man alltid ut samma resultat. De metoder som vi kommer att fördjupa oss i är Polynominterpolation, Langranges interpolationspolynom och Newtons interpolationspolynom. Vi kommer även gå in på Runges fenomen som uppträder vid Polynominterpolation för polynom av höga gradtal.

Splines användningsområde är för beräkning med hjälp av datorer och används därför ofta i praktiken. Spline är en kontinuerlig funktion som är styckvis polynom. Man delar upp intervallet i mindre delintervall som man tilldelar ett polynom av lägre grad. På så vis är det möjligt att välja helt olika polynom på varje delintervall. Det finns dock villkor för att övergången mellan delintervallen ska vara jämna så att funktionen globalt sett ska vara glatt. Mer om detta i avsnitt fyra.

Sist men inte minst går vi in på minsta kvadratmetoden och fördjupar oss i hur man gör beräkningar med denna metod samt varför den fungerar.

2 INTERPOLATION

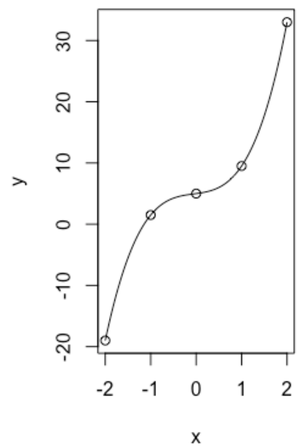
Interpolation är då vi har diskreta punkter i tal planet och vi vill förbinda dessa genom en funktion som går emellan dem. Funktionen skapas genom att beräkna funktionsvärden som ligger mellan de kända punkterna. Detta betyder att interpolering används i ett intervall mellan kända punkter som kallas interpolationspunkter eller noder. Skulle istället ett funktionsvärde beräknas utanför intervallet kallas det extrapolation. För både interpolation och extrapolation är funktionsvärdet endast ett estimat, vi kan inte säkerhetsställa att det stämmer explicit då vi inte kan säkerhetsställa hur funktionen kommer att te sig mellan interpolationspunkterna samt utanför intervallet.

Det är inte bara interpolation man använder sig av för kurvanpassning, man kan även använda sig av approximation. Approximation innebär att vi har en kurva som inte är helt men näst inpå korrekt. Approximation används då vi har en mängd data punkter som vi inte är helt säkra på att de stämmer exakt. Vi väljer då att kurvan ska gå genom ett slags medelvärde av punkterna istället för att gå genom punkterna som man gör med interpolation. Interpolation och approximation kan även användas tillsammans. Man kan exempelvis använda sig av interpolation för att bestämma en kurva men för att beräkna arean under kurvan använder man approximation.

Det finns olika interpolationsmetoder. Då man väljer interpolationsmetod bör man ha följande i åtanke: felmarginalen det vill säga hur noggrant resultat metoden ger, hur beräkningskrävande metoden är, hur glatt interpolationen (d.v.s. den har kontinuerliga derivator) är samt antalet datapunkter som krävs. Det finns styckvis konstant interpolation som är en styckvis konstant funktion som går genom de kända punkterna. Funktionsvärden tilldelas samma värden som den nästliggande interpolationspunkten och på så vis blir funktionen styckvis konstant. För linjär interpolation förbinder man interpolationspunkterna med en linjär funktion. Har man fler interpolationspunkter än två förbinder man dem med olika linjära funktioner. Man får därmed en kontinuerlig kurva i intervallet med en icke kontinuerlig första derivata vilket innebär att man inte får en jämn övergång mellan interpolationspunkterna. Vid spline interpolation delar man upp intervallet i mindre del intervall. Man har en kontinuerlig kurva som är styckvis polynom i varje delintervall. På så vis kan man välja olika polynom för varje delintervall som man förbinder i interpolationspunkterna.

Nedan har vi ett exempel av interpolering av ett polynom.

Vi sambinder punkterna $(-2,-19), (-1, 1.5), (0, 5), (1, 9.5), (2, 33)$ med polynomet $y = 3x^3 + 0.5x^2 + x + 5$ som går exakt igenom punkterna. Med hjälp av interpolation uppskattar vi funktionsvärden i de mellanliggande punkterna.



Interpolering har funnits sedan räkenskapens begynnelse och kommer från latinska verbet interpolare som betyder 'att sätta in något emellan'. Interpolering användes för att beräkna solens, månens samt planeternas position. Man har funnit kvarlevande bevis från 300 f.Kr. i forntida Babylon och Grekland på både linjär och komplex interpolation. Det var bönder som använde sig av interpolering för att beräkna tidpunkten för plantering av skörden. [1]

3 POLYNOMINTERPOLATION

Polynominterpolation är då vi har en kontinuerlig funktion som är ett polynom $y(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0$ och går genom alla interpolationspunkter. Antalet obekanta koefficienter beror på polynomets gradtal, då vi har n obekanta koefficienter är polynomets gradtal n-1.

För att få en unik funktion som går genom interpolationspunkterna så behöver antalet koefficienter vara lika många som antalet interpolationspunkter med åtskilda x värden. Vi har då ett ekvationssystem med n linjära ekvationer och n obekanta koefficienter vilket ger en unik lösning. Existerar det färre interpolationspunkter än obekanta koefficienter får vi oändligt många lösningar till ekvationssystemet och därmed oändligt många funktioner som går genom interpolationspunkterna. Existerar det fler interpolationspunkter än obekanta kan vi inte nödvändigtvis lösa ekvationssystemet och därmed finns det ingen lösning och det existerar inte ett interpolerande polynom.

Sats 3.1. Sats: Unikt Interpolerande Polynom

Givet $x_1, x_{2,\ldots,}x_n$ med motsvarande funktionsvärden $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Då existerar ett unikt polynom P av grad n-1 som uppfyller $P(x_i) = y_i\,, \quad i = 1,2, \ldots, n$
då $x_1 \neq x_2 \neq \cdots \neq x_n$.
[3]

Bevis: Interpolerande polynom

Vi ska visa att det existerar ett polynom

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}, \text{som uppfyller:}$$
$$P(x_i) = y_i \text{ för } i = 1, \ldots, n$$

där x_n är parvis olika. Det blir alltså n ekvationer för n okända koefficienter $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$:

$$\begin{cases} c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \cdots + c_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2 + \cdots + c_{n-1}x_2^{n-1} = y_2 \\ \vdots \\ c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \cdots + c_{n-1}x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

Vi kan lösa ekvationssystemet genom att skriva ekvationssystemet på matrisform. Den första matrisen kallas Vandermonde matrisen, **V**.

$$\boldsymbol{V} \cdot c = y \quad <=>$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Vi kommer att motivera formeln

$$\det(V) = \prod_{1 \le i \le j \le n} (x_j - x_i) \neq 0$$

och vi har därmed en unik lösning till ekvationssystemet.

[9]

Vi utvecklar beräkningen av determinanten för **V** och visar att vi får en unik lösning.

$n = 2$:

$$D(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)$$

$n = 3$:

Vi multiplicerar första kolonnen i Vandermonde matrisen med x_1 och drar ifrån den från andra kolonnen. Samtidigt multiplicerar vi andra kolonnen i Vandermonde matrisen med x_1 och drar ifrån den från tredje kolonnen. Då har vi en determinant där vi kan utveckla efter första raden och bara har kvar en determinant som är $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)$ multiplicerat med Vandermonde determinant för x_2, x_3.

$$D(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 \\ x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)x_3 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

På samma sätt som $n = 3$ visar man för $n \geq 2$ med induktion:

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (x_j - x_i)$$

Eftersom punkterna är parvis olika är determinanten skild från noll och därmed har ekvationssystemet en unik lösning.

■

Har vi ett interpolerande polynom med färre interpolationspunkter än obekanta koefficienter får vi oändligt många lösningar till ekvationssystemet och då blir determinanten lika med noll. Finns fler interpolationspunkter än obekanta finns det inte nödvändigtvis en lösning till ekvationssystemet och därmed existerar det inte ett interpolerande polynom och determinanten är lika med noll.

Exempel på beräkning av interpolerande polynom

$y(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ går genom punkterna $(1,1), (2,3), (-2,5), (-1,-2)$.
Därmed får vi ekvationerna:

$$\begin{cases} 1 = c_3 1^3 + c_2 1^2 + c_1 1 + c_0 \\ 3 = c_3 2^3 + c_2 2^2 + c_1 2 + c_0 \\ 5 = c_3(-2)^3 + c_2(-2)^2 + c_1(-2) + c_0 \\ -2 = c_3(-1)^3 + c_2(-1)^2 + c_1(-1) + c_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = c_3 + c_2 + c_1 + c_0 \\ 3 = 8c_3 + 4c_2 + 2c_1 + c_0 \\ 5 = -8c_3 + 4c_2 - 2c_1 + c_0 \\ -2 = -c_3 + c_2 - c_1 + c_0 \end{cases}$$

För att lösa ekvationssystemet använder vi oss av Vandermonde matrisen och får:

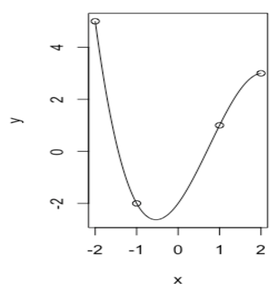
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Då vi löser ekvationssystemet får vi: $c_0 = -2$, $c_1 = \frac{13}{6}$, $c_2 = \frac{3}{2}$, $c_3 = -\frac{2}{3}$

Vi ser även att $\det(V) = 71 \neq 0$ och polynomet är unikt.

Vår funktion ser ut enligt följande och då vi vet att vårt interpolerande polynom är unikt betyder detta att grafen nedan är den enda möjliga som går genom de interpolerade punkterna.

$$y(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x - 2$$



3.1 RUNGES FENOMEN

Runges fenomen är kopplat till den den tyske matematikern Carl Runge (1856-1947). Carl Runge upptäckte fenomenet år 1901 då han undersökte felmarginalen vid interpolering av polynom.

Runges fenomen uppträder då man har ekvidistanta punkter och visar att interpolering vid högre grader inte förbättrar noggrannheten utan tvärtom, det blir större svängningar mellan interpolationspunkterna. Framförallt mellan interpolationspunktern vid ändpunkterna av intervallet. [9] Polynom av höga gradtal borde alltid undvikas i polynominterpolation eftersom de leder till orealistiska svängningar. [7]

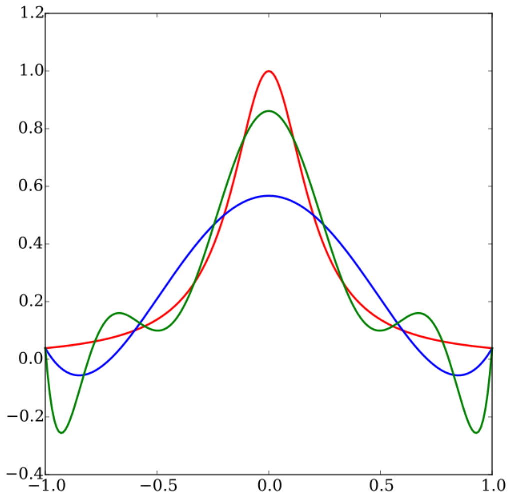
För att undvika Runges fenomen kan man medvetet välja tätare interpolationspunkter i början och slutet av intervallet för att få förbättrad noggrannhet. Ett annat alternativ är att använda Splines, detta kommer vi att diskutera mer noggrant i senare avsnitt.

Exempel av Runges fenomen

I Runge funktionen $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ uppträder Runges fenomenet väldigt tydligt. Vi interpolerar denna funktion i intervallet [-1,1] med interpolationspunkter som är likformigt utspridda. Vi använder oss av interpolationspolynom $P_n(x)$ som är av hög grad $\leq n-1$ som passerar n ekvidistanta punkter eller så kallat noder.

För att demonstrera Runges fenomen har vi valt ett interpolationspolynom av grad fem med sex interpolationspunkter samt ett interpolationspolynom av grad nio med tio interpolationspunkter. Nedan demonstrerar vi funktionerna med en bild. Mot ändpunkterna ser man tydligt att felmarginalen ökar betydligt då graden ökar. För högre grader kommer felet mellan Runge funktionen och det interpolerande polynomet kommer att gå mot positiv oändlighet:

$$lim_{n\to\infty}\left(\max_{-1\leq x\leq 1}|f(x) - P_n(x)|\right) = +\infty$$



[Bilden är tagen från Wikipedia]
Röda kurvan visar $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ som kallas Runges funktion, blå kurvan är av grad fem och grön kurva är av grad nio. Enligt definition är felet vid interpoleringspunkterna mellan funktionen och det interpolerande polynom noll. Däremot ser vi, särskilt vid kanterna, att felmarginalen mellan funktionen och interpolerande polynom ökar vid högre gradtal. [9]

3.2 LANGRANGES INTERPOLATIONSPOLYNOM

För interpolering av ett polynom kan man använda sig av flera metoder, Langranges Interpolationspolynom är en av metoderna. Oavsett vilken metod man använder kommer man alltid att få samma funktion. Det är endast tillvägagångssättet av beräkningen som varierar beroende vilken metod som används.

Fördelen att använda sig av Langranges interpolationspolynom är att vi inte behöver lösa ett helt ekvationssystem som vi gör då vi använder oss av polynominterpolation. Langranges interpolationspolynom är interpolering av ett polynom så för att undvika förvirring så kommer vi hädanefter kalla polynominterpolation för monomial interpolation.

Langranges interpolations formel är uppbyggt så att vi får en unik funktion som består av summan av polynom för varje interpolationspunkt. Vi kollar på varje interpolationspunkt separat som vi sätter in i formeln. På så vis stryks alla termer förutom en. Gör vi detta tillvägagångssätt för alla interpolationspunkter (x_n, y_n) kommer vi att få lika många polynom som interpolationspunkter. Summerar vi dessa polynom så kommer vi att få en funktion som går genom alla interpolationspunkter och även den kommer att vara ett polynom.

Langranges interpolationsformel publicerades år 1795 av Joseph-Louis Lagrange. Det var dock Edward Waring som upptäckte metoden redan år 1779. [10]

Definition 3.2.1. Langranges interpolations formel [5] [10]

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k =$$

$$= y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} + \cdots +$$

$$y_n \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_3)\ldots(x_n-x_{n-1})}$$

där $P_n(x)$ är av grad $\leq n-1$ som passerar *n* punkter $(x_1, y_1) \ldots (x_j, y_j) \ldots (x_n, y_n)$.

Notera att det är n termer i summan och $n-1$ termer i varje produkt, det är därför vi har ett polynom $P_n(x)$ av grad $\leq n-1$ som passerar n punkter. Då $P_n(x)$ utvärderas i $x = x_K$ är alla produkter förutom $k = K$ lika med noll. Dessutom är produkten av K: te termen i summan lika med ett, och den multipliceras med y_K. Alltså blir$P_n(x_K) = y_K$. [5]

Exempel: Langranges interpolation

Vi interpolerar funktionen $y = x^3$ på intervallet $[2,4]$, i punkterna $\mathrm{x}_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$. Vi får därmed $y_1 = 8, y_2 = 27, y_3 = 64$

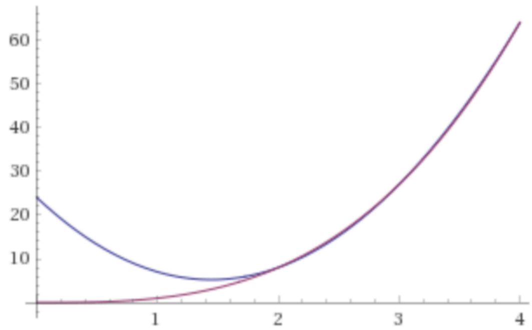
Lagranges form blir då:

$$P_3(x) = \sum_{k=1}^{3}\left(\prod_{j=1,j\neq k}^{3} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right) y_k =$$

$$= \ y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$= 8\frac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(2-4)} + 27\frac{(x-2)(x-4)}{(3-2)(3-4)} + 64\frac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)}$$

$$= 9x^2 - 26x + 24$$



Blå linjen visar $P_3(x) = 9x^2 - 26x + 24$ och röda linjen visar $y = x^3$. Vi ser att båda kurvor går genom interpolationspunkterna (2,8), (3,27), (4,64).

3.3 NEWTONS INTERPOLATIONSPOLYNOM

Newtons interpolation är ett alternativ till Langranges Interpolation samt monomial interpolation. Denna metod är den mest effektiva då beräkningarna inte behöver göras om då man vill lägga till ytterligare en punkt.

Formeln fungerar så att man anpassar en linje till två punkter, därefter lägger man till ytterligare en punkt för att anpassa en kvadratisk kurva till dessa tre punkter och så fortsätter man. Man anpassar alltså en kurva av grad n-1 till n punkter. [5]

Sats 3.3.1 Newtons Interpolationsformel:

$$P_n(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + a_n \prod_{k=1}^{n-1}(x - x_k)$$

Newtons interpolationsformel är som man hör på namnet skapad av Isaac Newton.

Isaac Newton är en av tidernas stora matematiker, naturvetare, teolog och alkemist. Han föddes 1642 utanför London, England. Som 18 åring började han på Trinity College och det var då han började intressera sig för vetenskap. Dock så härjade pesten fyra år senare och därmed stängdes universitet i två år. Han fortsatte ändå att studera på hemgården och började inrikta sig på optik. Han gjorde en serie optiska försök och kom fram till att det vita ljuset egentligen bestod av regnbågens alla färger. Detta publicerades 1704. Inte nog med detta så uppfann han även den matematiska metoden fluxionsmetoden samt lade grundade för forskning av krafter, gravitation och planeternas rörelse. Det var under denna tidsperiod som legenden om varför äpplet faller till marken härstammar. Detta var början till Principia, Newtons mest betydande verk som består av tre böcker och gjorde honom till dåtidens mest kända och betydelsefulla vetenskapsmän. Än idag används hans idéer överallt och har lagt grunden till dagens vetenskap. [11]

Exempel: Newtons interpolation

Vi ska interpolera punkterna $(2,10), (1,-5), (3,-1)$ med hjälp at Newton intrpolations metod. Därefter lägger vi till punkten (4,8) för att visa att denna metod lämpar sig bra för då man vill lägga till en punkt till funktionen.

Givet:

$$P_3(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2)$$

Då får vi beräkningarna:

$10 \ = a_1$

$-5 = a_1 + a_2(1-2) \quad => \quad a_2 = 15$

$-1 \ = a_1 + a_2(3-2) + a_3(3-2)(3-1) => \ a_3 = -13$

Vi får därmed polynomet:

$P_3(x) = 10 + 15(x-2) - 13(x-2)(x-1)$

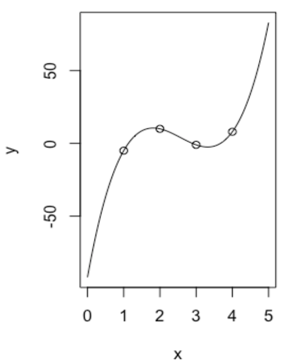
Vi lägger nu till punkten (4,8) till vårt polynom:

$8 \ = a_1 + a_2(4-2) + a_3(4-2)(4-1) + a_4(4-2)(4-1)(4-3) =>$

$=> \ a_4 = \dfrac{23}{3}$

Vårt polynom kommer att se ut enligt följande:

$P_4(x) = 10 + 15(x-2) - 13(x-2)(x-1) + \dfrac{23}{3}(x-2)(x-1)(x-3)$



3.4 SKILLNAD MELLAN MONOMIAL INTERPOLATION, LANGRANGES INTERPOLATIONSPOLYNOM OCH NEWTONS INTERPOLATIONSPOLYNOM

Monomial interpolation använder man sig av då man har ett polynom av låg grad och få interpolationspunkter, eftersom man behöver lösa ett ekvationssystem. Annars är de andra metoderna bättre att använda.

Langranges interpolationspolynom $P_n(x)$ är uppbyggt individuellt så att det inte finns något samband mellan interpolations polynomen $P_n(x)$. Då man lägger till en punkt och därmed får ett nytt interpolationspolynom kan man inte utnyttja tidigare beräkning för det föregående interpolationspolynomet utan måste börja beräkningen på nytt. Fördelen med att använda sig av Langranges polynom är att man behöver inte lösa ett linjärt ekvationssystem vilket man behöver göra då man använder sig av polynominterpolation och Newtons interpolation.

Newtons interpolationspolynom är en rekursiv formel vilket betyder att då man vill använda flera interpolationspolynom kan det vara en fördel att använda Newton polynom. Eftersom det är en rekursiv formel skapar vi ett nytt interpolationspolynom $P_n(x)$ genom att använda det föregående. Därigenom sparar man massor med beräknings tid vilket leder till att denna metod blir betydligt effektivare än Langranges polynom där man istället måste börja om beräkningarna för varje $P_n(x)$.

Det finns alltså flera metoder för beräkning av interpolation men slutresultatet förblir alltid detsamma då vi har ett unikt polynom som går genom interpolationspunkterna.

4 SPLINES

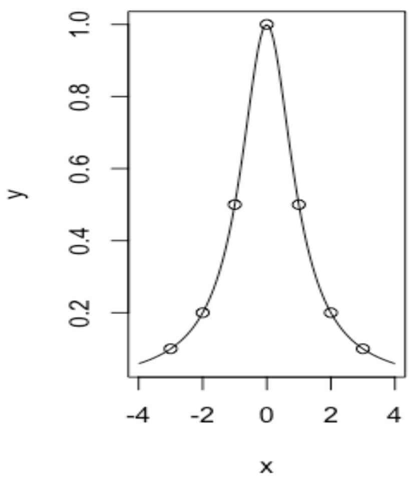
Matematiker använder funktioner som grundläggande verktyg för att beskriva och analysera problem av intresse. I vissa fall är funktioner kända, men för det mesta är det nödvändigt att konstruera approximationer baserade på begränsad information. Splines används för approximation vilket betyder att funktionsvärdet mellan interpolationspunkterna är endast ett estimat. Det finns två sätt att förbättra approximationen med polynom. Ett sätt är att öka graden av polynomet och det andra sättet, som används av splines, är att minska storleken på intervallet som approximationen används på. Splines har visat sig vara särskilt praktiska och effektiva för approximationsändamål och eftersom de är väl anpassade att använda på datorer används splines ofta i praktiken.

En spline är en kontinuerlig funktion som är styckvis polynom. Funktionens definitionsmängd, alltså intervallet, delas in i delintervall som därefter tilldelas polynom. Man approximerar funktionen på varje delintervall med ett polynom av mindre grad men som inte är ett polynom globalt. Avsikten är att polynomen ska passa ihop smidigt och samtidigt är det möjligt att välja helt olika polynom på varje delintervall. En splines grad är den högsta grad av de ingående polynomen på delintervallen. En spline av grad n har $n - 1$ kontinuerliga derivator. Den vanligaste typen av splines är kubiska, alltså funktioner som är styckvis polynom av grad tre.

Det finns tre fördelar med splines:

1. Polynomet har en liten grad och därmed blir utvärdering av approximationen enklare på varje delintervall.
2. Eftersom graden är liten kan enkla metoder användas, som interpolering, för att hitta polynomet på varje underintervall. Dessutom undviks Runges Fenomen då graden är liten.
3. Lokala oegentligheter i funktionen påverkar approximationen endast lokalt, i motsats till polynom approximation globalt.

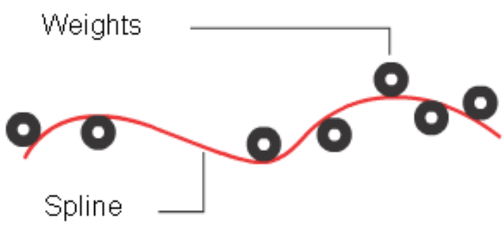
[12][13] [5]



Figuren ovan visar en kubisk spline, det vill säga funktioner som är styckvis polynom av högst grad tre. Det globala intervallet är uppdelat i åtta delintervall och har därmed sju övergångspunkter som även kallas noder. Notera att vi valt udda antal övergångspunkter så att vi får med noll för att förbättra anpassningen nära symmetriaxeln. [6]

Historiskt sett introducerade Schoenberg termen Spline-funktion 1946 i försök att lösa problem för specifik data anpassning. Schoenberg använde terminologi splines för sambandet mellan styckvisa polynom och den mekaniska enheten kallad spline.[12]

Spline är ett East Anglian ord och kan komma från engelska ordet splinter som betyder flisa på svenska. Splines användes ursprungligen för flygplan och varvsindustrier. Trä remsor som kallades splines gav en interpolering av nyckelpunkterna för att skapa släta kurvor. Trä remsor var flexibla så att de skulle böjas lätt när änderna (vikten) var rörda eller deras vikt förändrades. På så vis var det möjligt att manipulera kurvan, vilket resulterade i den jämnaste möjliga kurvan mellan två punkter. [14]



4.1 LINJÄRA SPLINES

Linjära splines är av grad ett och är linjer mellan interpolationspunkterna. Givet data punkterna $(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots n$ kallar vi funktionen S en linjär spline på formen:

$$S_i(x) = a_i x + b_i, \qquad x \in [x_i, x_{i+1}], \qquad i = 0,1, \dots, n-1$$

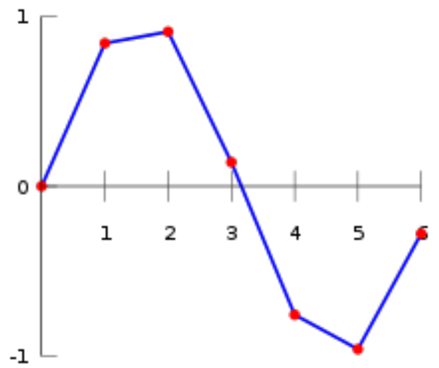
som uppfyller följande villkor:

1) $S_i(x_i) = y_i, \qquad i = 0,1, \dots, n-1$

$S_{n-1}(x_n) = y_n$

2) $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}), \qquad i = 0,1, \dots, n-2$

[Efter mängd av youtube visningar och läsning på internet.] Se även [12].



Exempel på en linjär spline. [Bild hämtad från Wikipedia]

4.2 KUBISKA SPLINES

Kubiska splines är av grad tre med kontinuerlig första och andra derivata. Kubiska splines gör att istället för linjer mellan interpolationspunkterna så har vi grafer till polynom som skapar kurvor av grad tre. En spline kommer därmed enligt definition att vara på formen:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \qquad i = 0,1, \dots, n-1$$

Och ska uppfylla villkoren:

1) $S_i(x_i) = y_i$ $\qquad i = 0, 1, \dots, n-1$

$S_{n-1}(x_n) = y_n$

2) $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$ $\qquad i = 0, \dots, n-2$

3) $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$ $\qquad i = 0, \dots, n-2$

4) $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$ $\qquad i = 0, \dots, n-2$

samt även ett av följande villkor:

5) $S''_0(x_0) = 0, \quad S''_{n-1}(x_n) = 0$

6) $S'_0(x_o) = t_0, \quad S'_{n-1}(x_n) = t_1$ $\qquad$ där t_0 och t_1 är givna

[Efter mängd av youtube visningar och läsning på internet.] Se även [12].

Antalet villkor är lika med antalet obekanta, detta för att vi ska få en entydig lösning. För en kubisk spline med fyra obekanta i n intervall krävs $4 \cdot n$ villkor, punkt ett har $n + 1$ villkor, punkt två till fyra har tillsammans $3(n - 1)$ villkor, punkt fem och sex har två villkor vardera.

Punkt ett innebär att $S(x)$ går genom alla interpolationspunkter. Så simpelt att splinen ska gå igenom interpolationspunkterna. Punkt två till fyra är villkor så att det är glatt övergång mellan delintervallen. Punkt två är villkoret att delintervallens funktioner möts. Punkt tre skapar villkoret att lutningen på de nästliggande polynomen, alltså de nästliggande delintervallen, ska vara samma. Båda polynoms första derivator ska överensstämma. Punkt fyra visar att andra derivatan för de två nästliggande polynom ska överensstämma.

Det finns två typer av kubiska splines: naturlig spline och clamped spline. Vilken typ av spline man har beror på vilket villkor man kan lägga till de första fyra. Har man villkor ett till fyra och dessutom lägger till villkor fem så kallas det för naturlig spline. Villkor fem betyder att ändpunkternas andra derivata är noll. Lägger man till villkor sex så matchar man första derivatorna med underliggande funktion vid ändpunkterna och detta kallas för clamped spline. Vilket betyder att man bestämmer lutningen vid ändpunkterna.

En styckvis polynomiell funktion av grad tre som uppfyller villkoren 1-6 kallas en glatt spline.

[Efter mängd av youtube visningar och läsning på internet.] Se även [12].

Interpolations exempel med en naturlig kubisk spline

Vi har punkterna (2,1),(3,3),(4,2) som vi vill interpolera med en naturlig kubisk spline. Det vill säga en spline av grad tre som uppfyller villkor 1-4 samt villkor 5 som nämnts tidigare.

$S_1(x) = a_1(x-2)^3 + b_1(x-2)^2 + c_1(x-2) + d_1 \quad x \in [2,3]$

$S_1'(x) = 3a_1(x-2)^2 + 2b_1(x-2) + c_1$

$S_1''(x) = 6a_1(x-2) + 2b_1$

$S_2(x) = a_2(x-3)^3 + b_2(x-3)^2 + c_2(x-3) + d_2 \quad x \in [3,4]$

$S_2'(x) = 3a_2(x-3)^2 + 2b_2(x-3) + c_2$

$S_2''(x) = 6a_2(x-3) + 2b_2$

Vi har ekvationerna:

$1 = S_1(2) = d_1$

$3 = S_1(3) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$

$3 = S_2(3) = d_2$

$2 = S_2(4) = a_2 + b_2 + c_2 + d_2$

$S_1'(3) = 3a_1 + 2b_1 + c_1 = c_2 = S_2'(3)$

$S''_1(3) = 6a_1 + 2b_1 = 2b_2 = S_2''(3)$

$S_1''(2) = 0 = 2b_1$

$S_2''(4) = 0 = 6a_2 + 2b_2$

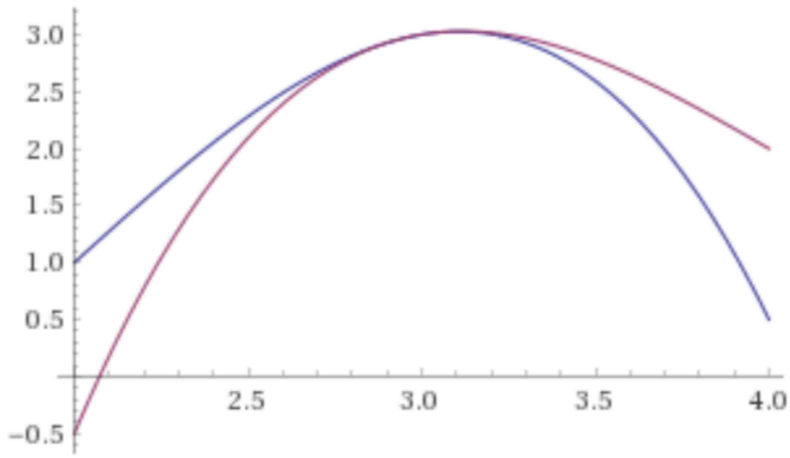
Då vi löst ekvationerna får vi:

$$a_1 = -\frac{3}{4}, b_1 = 0, c_1 = \frac{11}{4}, \ d_1 = 1, \ a_2 = \frac{3}{4}, \ b_2 = -\frac{9}{4}, c_2 = \frac{1}{2}, d_2 = 3$$

Då vi satt in våra variabler i ekvationerna får vi:

$S_1(x) = -\dfrac{3}{4}(x-2)^3 + \dfrac{11}{4}(x-2) + 1 \qquad x \in [2,3]$

$S_2(x) = \frac{3}{4}(x-3)^3 - \frac{9}{4}(x-3)^2 + \frac{1}{2}(x-3) + 3 \qquad x \in [3,4]$

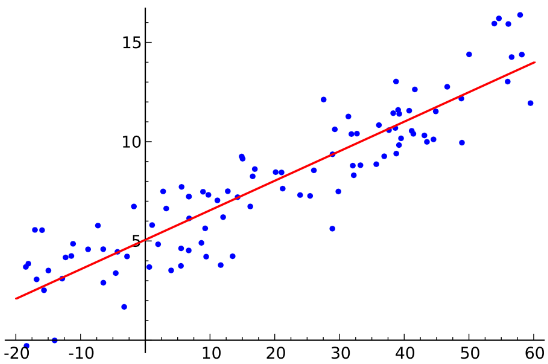


Blå linjen är $S_1(x)$ då $x \in [2,3]$ och röda linjen är $S_2(x)$ då $x \in [3,4]$ på intervallet [2,4]. Vi ser en glatt övergång mellan polynomen vid x=3.

5 MINSTA KVADRATMETODEN

Interpolation är en approximations metod som används då vi vill att en funktion ska gå igenom våra mätpunkter inom ett visst intervall. Denna metod passar bäst då vi vet att våra mätpunkter stämmer och ger oss en unik funktion som går genom dem. Om vi istället skulle ha mätvärden som vi inte vet är sanna eller har många fler mätpunkter än graden på vår funktion kan vi använda en approximations metod som kallas minsta kvadratmetoden. Denna metod approximerar en lösning till ett ekvationssystem som inte har några lösningar på grund av att det har för stort antal ekvationer som i sin tur beror på att vi har för stort antal mätpunkter.

Minsta kvadratmetoden summerar det vertikala avståndet mellan punkterna och funktionen i kvadrat. Anledningen till varför man har avståndet i kvadrat beror på att då en mätpunkt som är längre bort från kurvan väger tyngre än de som är närmre. På så vis tar man varje enskild mätpunkt i åtanke så att man anpassar kurvan till alla mätpunkter. Om man har exempelvis en mätpunkt som är dubbelt så långt bort i jämförelse med resterande punkter så kommer dess avstånd i kvadrat blir fyra gånger så stort så man har viktat punktens betydelse.
Nedan visas ett exempel av approximation mha minsta kvadratmetoden.



[Bild tagen från Wikipedia]

Minsta kvadratmetoden tillskrivs Carl Friedrich Gauss även fast det var Adrien-Marie Legendre som först publicerade metoden. Carl Friedrich Gauss kunde beräkna elliptiska banor utifrån tre observationer. Under nyårsafton 1801 upptäcktes dvärgplaneten Ceres och kunde observeras i fyrtio dagar innan den försvann. Forskare försökte beräkna dess omloppsbana baserat på att omloppsbanan var cirkulär vilket inte gav någon framgång. Istället använde Carl Friedrich Gauss antagandet att omloppsbanan var elliptisk. Med tillgång till fler än tre observationer kunde Gauss använda sig av minsta kvadratmetoden för att öka noggrannheten för omloppsbanan. När astronomer på nytt försökte observera dvärgplaneten med Gauss beräkningar gav det framgång och de fann planeten. [15]

Då vi använder minsta kvadratmetoden vill vi anpassa en funktion $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_m f_m(t)$ till vår mätserie $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ så avståndet mellan funktionen och mätpunkterna är minimal. Vi har större antal mätpunkter än obekanta i vår funktion, alltså kommer vi att få ett överdeterminerat ekvationssystem som inte har någon lösning. Vårt ekvationssystem består alltså av n mätpunkter och m ekvationer där $n > m$ och som använder sig av $f(x_i) = y_i,\ i = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} c_1 f_1(x_1) + c_2 f_2(x_1) + \cdots + c_m f_m(x_1) = y_1 \\ c_2 f_1(x_2) + c_2 f_2(x_2) + \cdots + c_m f_m(x_2) = y_2 \\ \vdots \\ c_m f_m(x_n) + c_m f_m(x_n) + \cdots + c_m f_m(x_n) = y_n \end{cases}$$

Vi behöver använda oss av en annan beräkningsmetod för att finna funktionen som minimerar avståndet till mätserien. Vi börjar med att skriva vårt överdeterminerade ekvationssystem på formen $A \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$:

$$A = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_m(x_n) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$A \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$ är ett olösbart ekvationssystem men genom att multiplicera transponatet till A med båda sidor från vänster skapar vi ett lösbart ekvationssystem:

$$A^t \cdot A \cdot \boldsymbol{c} = A^t \cdot \boldsymbol{y}$$ [15]

$$A^t = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_m(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_m(x_1) & f_m(x_2) & \cdots & f_m(x_n) \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet har en entydig lösning då A är linjärt oberoende, dvs. då determinanten är skilt från noll.

Sats 5.1 Minsta kvadratmetoden

Vi har funktionen $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_m f_m(t)$ och det existerar en mätserie $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Vi ska bestämma $c_1, c_2, \dots, c_m$ så att kurvan $f(t)$ anpassas till mätserien och avståndet mellan mätpunkterna och kurvan minimeras.

$$F(c_1, c_2, \dots, c_m) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - (c_1 f_1(x_i) + c_2 f_2(x_i) + \cdots + c_m f_m(x_i)))^2$$

Där vi ska bestämma $c_1, c_2, \dots, c_m$ sådana att $F(c_1, c_2, \dots, c_m)$ har ett minimum. [15]

För att finna funktionen $f(x)$ som minimerar avståndet deriverar vi F med avseende på *c:*

$$F'_{c_1} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (y_i - (c_1 f_1(x_i) + c_2 f_2(x_i) + \cdots + c_m f_m(x_i))) \cdot (-f_1(x_i)) = 0$$

$$F'_{c_2} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (y_i - (c_1 f_1(x_i) + c_2 f_2(x_i) + \cdots + c_m f_m(x_i))) \cdot (-f_2(x_i)) = 0$$

$$\vdots$$

$$F'_{c_k} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (y_i - (c_1 f_1(x_i) + c_2 f_2(x_i) + \cdots + c_m f_m(x_i))) \cdot (-f_k(x_i)) = 0$$

$$\leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} (f_1(x_i)c_1 + f_2(x_i)c_2 + \cdots + f_m(x_i)c_m) \cdot f_k(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i) \cdot y_i$$

$$k = 1, \dots, m$$

Skulle vi slå ut $A^t \cdot A \cdot \boldsymbol{c} = A^t \cdot \boldsymbol{y}$ så ser vi att vi får exakt samma som F'_{c_k}. HL i sista ekvationen $\sum_{i=1}^{n} f_k(x_i) \cdot y_i$ är precis elementet i rad k i kolonnmatrisen

$A^t \cdot \boldsymbol{y}$. Notera att elementen i rad k för $A^t \cdot A$ är precis
$\left(\sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) \cdot f_k(x_i) \quad \sum_{i=1}^{n} f_2(x_i) \cdot f_k(x_i) \quad \ldots \quad \sum_{i=1}^{n} f_m(x_i) \cdot f_k(x_i)\right)$
och därmed är elementet i k:te raden i $A^t \cdot A \cdot \boldsymbol{c}$ precis VL.

Vi får alltså minsta avståndet mellan mätpunkterna och kurvan då vi finner de obekanta koefficienterna $c_1, c_2, \ldots, c_m$ genom att lösa $\boldsymbol{c} = (A^t \cdot A)^{-\mathbf{1}} \cdot A^t \cdot \boldsymbol{y}$.
Notera att $(A^t \cdot A)$ är en nxn-matris och detta alltid fungerar då $\det(A^t \cdot A) \neq 0$.

Exempel av minsta kvadratmetoden för en rät linje

Vi ska anpassa en linje $c_2 + c_1 x = y$ till punkterna (1,2), (2,3), (3,6)

Sätter vi in punkterna i ekvationen får vi ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} c_2 + c_1 1 = 2 \\ c_2 + c_1 2 = 3 \\ c_2 + c_1 3 = 6 \end{cases}$$

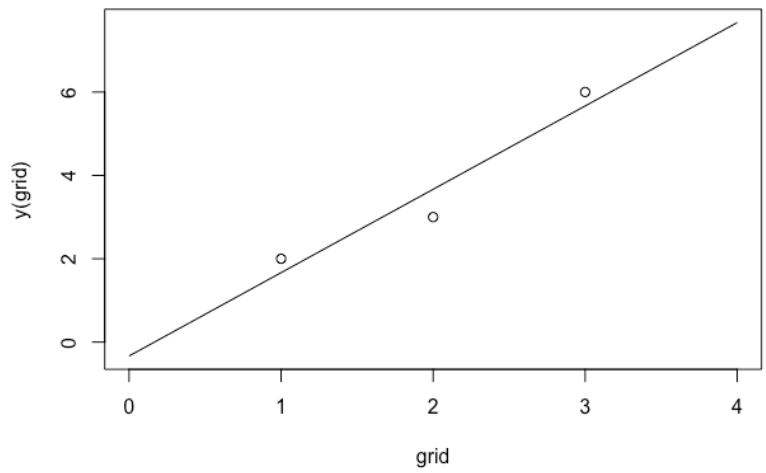
som vi därefter skriver på formen $A^t \cdot A \cdot \boldsymbol{c} = A^t \cdot y$ och löser ut $c_1$och c_2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 26 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$c_1 = 2\,, \qquad c_2 = -\frac{1}{3}$$

Vår har funktionen $y = 2x - \frac{1}{3}$ som är anpassad till punkterna (1,2), (2,3), (3,6)



Tillvägagångssättet vid beräkning med minsta kvadratmetoden av polynom av grad m på formen $c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m$ till mätserien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ skiljer sig insättningen i matrisen A samt kolonnvektorn c för de sökta koefficienterna $c_0, c_1, \dots, c_m$. Resterande beräkning är densamma och löses genom normalekvationen : $A^t \cdot A \cdot \boldsymbol{c} = A^t \cdot \boldsymbol{y}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2^1 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{15}$$

Exempel av minsta kvadratmetoden för ett polynom

Vi ska anpassa ett polynom $y = c_2x^2 + c_1x + c_0$ till punkterna (1,8), (2,6), (3,6), (2,10), (4,8) med hjälp av minsta kvadratmetoden $A^t \cdot A \cdot \boldsymbol{c} = A^t \cdot \boldsymbol{y}$

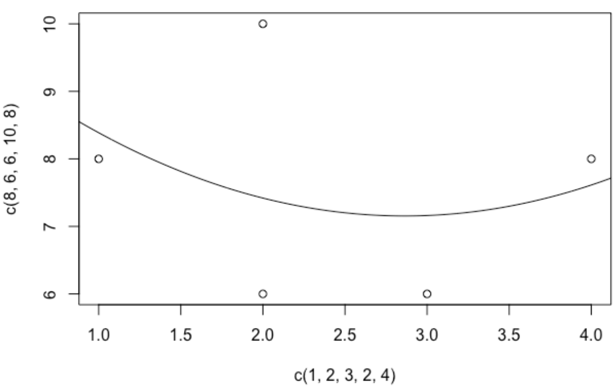
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 4 & 16 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot A \cdot \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 34 \\ 12 & 34 & 108 \\ 34 & 108 & 370 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad A^t \cdot \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 38 \\ 90 \\ 254 \end{bmatrix}$$

Efter beräkning av matriserna får vi matrisen $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 312/31 \\ -63/31 \\ 11/31 \end{bmatrix}$:

$$c_0 = \frac{312}{31}, c_1 = -\frac{63}{31}, c_2 = \frac{11}{31}$$

$y = \frac{11}{31}x^2 - \frac{63}{31}x + \frac{312}{31}$ är anpassad till punkterna (1,8), (2,6), (3,6), (2,10), (4,8)



6 KÄLLFÖRTECKNING

[1]https://www.saylor.org/site/wp-content/uploads/2011/11/ME205-5.1-TEXT2.pdf
[2]https://sv.wikipedia.org/wiki/Interpolation
[3]http://www.math.uconn.edu/~leykekhman/courses/MATH3795/Lectures/Lecture_14_poly_interp.pdf
[4]http://www.math.uconn.edu/~leykekhman/courses/MATH3795/Lectures/Lecture_15_poly_interp_splines.pdf
[5]https://www.cs.usask.ca/~spiteri/M211/notes/chapter3.pdf
[6]http://www.ctr.maths.lu.se/matematiklth/personal/andersk/webbok/Grundkurs/polynominterpolation.pdf
[7]http://www.mv.helsinki.fi/sundius/vb3/vb3-4.pdf
[8]https://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde_matrix
[9]https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon
[10]https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial
[11]https://sv.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
[12]Spline Functions: Basic Theory – Larry L.Schumaker
[13]Real Analysis and Applications – Kenneth Davidson & Allan Donsig
[14]https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_(mathematics)
[15] https://sv.wikipedia.org/wiki/Minstakvadratmetoden