SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

En jämförelse mellan olika algebraiska lösningsmetoder - för tredje - och fjärdegradsekvationer

av

Ling Zhao

2019 - No K12

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

En jämförelse mellan olika algebraiska lösningsmetoder - för tredje - och fjärdegradsekvationer

Ling Zhao

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2019

En jämförelse mellan olika algebraiska lösningsmetoder
-för tredje- och fjärdegradsekvationer

Ling Zhao

19 mars 2019

Sammanfattning

I den här uppsatsen ska vi studera och jämföra olika utvalda algebraiska lösningsmetoder för tredje- och fjärdegradsekvationer. Teorier och metoder för kvadratiska ekvationer är lätta att förstå och komma ihåg samt använda, medan de algebraiska lösningsmetoderna för tredje- och fjärdegradsekvationer inte är lika lättillgängliga. Syftet med uppsatsen är att samla och klargöra de teorierna och metoderna för att underlätta förståelsen av olika algebraiska lösningsmetoder för tredje- och fjärdegradsekvationer.

Tack

Jag vill tacka mina handledaren Christian Gottlieb och Torbjörn Tambour för stora tålamod och handledningar. De också hjälper mig att utveckla gällande kunskaper för att förbättra min uppsats.

Innehåll

1 Introduktion

Idag finns formler för att lösa kvadratiska ekvationer. Men hur är med tredje- och fjärdegradsekvationer? Finns det inga formler för att lösa dessa ekvationer? Jo, det finns väldigt många olika formler men de är inte lika korta och lätta att komma ihåg. Syftet med min text är att samla och visa flera algebratiska lösningsmetoder och genom att använda samma exempel för att förstå, komma ihåg och jämföra dessa metoder. För att nå mitt syfte kommer jag att svara på frågan: Vilka likheter och olikheter finns mellan dessa metoder?

1.1 Historia och bakgrund till tredjegradsekvationen

En generell tredjegradsekvation ser ut som

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0.$$

Matematiker har genom historien försökt att få fram en lösningsformel. Antikens matematiker i Babylonien, Grekland, Kina och Italienen hittade många olika sätt att lösa några särskilda tredjegradsekvationer. T.ex. lyckades den persiska matematikern och poeten Omar Khayyam (1048-1122) hitta en geometrisk lösning till vissa tredjegradsekvationer.

Under åren 1500-1550 utvecklades många lösningsmetoder för att lösa tredjegradsekvationer och fjärdegradsekvationer. Runt 1515 lyckades Scipione del Ferro (Italiensk matematiker, 1465-1526) ange en formel för ekvationer av typen

$$ax^3 + bx + c = 0,$$

vilken ger möjlighet att lösa alla tredjegradsekvationer som kan omskrivas till denna form. Problemet var bara att Ferro inte publicerade sin upptäckt före sin död. Han berättade bara muntligen för sin svärson och en elev som hette Antonio Fior (Italiensk matematiker, 1506-?) .

Fior utmanade en annan matematiker Niccolò Fontana Tartaglia (Italiensk matematiker, 1499-1557) till en problemlösningstävling om tredjegradsekvationer. Tartaglia lyckades lösa alla 30 ekvationerna som Fior presenterade för honom. När sedan Tartaglia i sin tur utmanade Fior med 30 ekvationer lyckades Fior inte lösa dessa ekvationer. Så Tartaglia vann tävlingen. Men Tartaglia behöll också kunskapen om hur han lyckats lösa ekvationerna för sig själv.

1545 publicerade Girolamo Cardano (Italiensk uppfinnare och matematiker, 1501-1576) sin berömda bok Ars Magna (eller Den stora konsten). För första gången beskrevs metoder för att lösa tredjegradsekvationer. Vi vet inte hur Cardano kommit över kunskapen. Men eftersom Cardano var den första som publicerade formeln så kallar vi den för Cardanos formel.

Efter 1550-talet fanns många matematiker som har bidragit med metoder att lösa tredjegradsekvationer: Francois Viéte (Fransk matematiker, 1540-1603) , Leonhard Euler (Schweizisk matematiker, 1707-1783) , Arthur Cayley (Brittisk matematiker, 1821-1895) , Joseph-Louis Lagrange (Italiensk och fransk matematiker och astronom, 1736-1813) , Abraham de Moivre (Fransk matematiker, 1667-1754) ... Jag kommer i min uppsats att visa ett flertal av dessa metoder. Alla dessa matematiker har försökt att göra formlerna mer lättillgängliga och förenklade.

1.2 Historia och bakgrund till fjärdegradsekvationen

Utvecklandet av lösningsmetoder för fjärdegradsekvationer tog sin början i och med att Cardano 1545 publicerade sin elev Lodovico Ferraris (Italiensk matematiker, 1522-1565) metod i sin bok: Ars Magna. Ferrari hade inspirerats av Cardanos lösningsmetod för tredjegradsekvationer och utvecklade sin metod genom att lösa en tredjegradsekvation och två kvadratiska ekvationer. Sedan förbättrades Ferraris metod av matematiker Viéte. Men fortfarande krävdes att man kunde lösa tredjegradsekvation. 1637 upptäckte dock Descartes en annan metod för att lösa en fjärdegradsekvationer. Formeln är tyvärr lång och kräver många beräkningar. Eulers lösningsmetod för fjärdegradsekvationer är en utveckling av hans lösningsmetod för att lösa tredjegradsekvationer. Lagrange upptäckte ännu en metod för att lösa fjärdegradsekvationer.

Jag förutsätter att alla koefficienter till ekvationerna som tas upp i min uppsats är reella.

2 Teorier och metoder för att lösa tredjegradsekvationer

2.1 Eliminering av andragradstermen

Man kan få en speciell tredjegradsekvation som saknar andragradsterm för x som ser ut så

$$x^3 + px + q = 0$$

från en generell tredjegradsekvation som ser ut så

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0.$$

Dela bägge sidor med a

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0. \tag{1}$$

Ersätt $x = y - \frac{b}{3a}$ i ekvation (1)

$$(y - \frac{b}{3a})^3 + \frac{b}{a}(y - \frac{b}{3a})^2 + \frac{c}{a}(y - \frac{b}{3a}) + \frac{d}{a} = 0.$$

Efter utveckling och förenkling får man

$$y^3 + y(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}) + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0. \qquad (2)$$

Sätt $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$ och $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$ så att vi kan omskriva ekvation (2) till

$$y^3 + py + q = 0.$$

Nu får man en speciell tredjegradsekvation som saknar andragradsterm för x.

2.2 Primitiv tredje enhetsrot ω

Man sätter $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ och $\omega^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ och kallar ω för primitiv tredje enhetsrot. Om vi har fått en särskild kubikrot $x = x_0$, så är ωx_0 och $\omega^2 x_0$ de andra två kubikrötterna för x. Vi får

$$\begin{aligned}
\omega &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\
\omega^2 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\
\omega^3 &= \omega\cdot\omega^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = 1 \\
\omega^2+\omega+1 &= \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1 = 0 \\
-\omega^2-1 &= \omega, \quad \omega^2+\omega = -1, \quad \omega^2 = -\omega-1.
\end{aligned}$$

2.3 Diskriminant för ett allmänt polynom

Vi har ett allmänt polynom $k(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ med nollställen $x_1, ..., x_n$. Diskriminanten till k definieras som talet

$$\prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)^2.$$

När $n = 2$ får vi $k(x) = x^2 + a_1x + a_2$ och $x_1 + x_2 = -a_1, x_1x_2 = a_2$. Vi kan uttrycka D som ett polynom i koefficienterna a_1, a_2

$$D = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = a_1^2 - 4a_2.$$

När $n = 3$ antar vi $f(x) = x^3 + px + q$. Vi kan uttrycka D som ett polynom i koefficienterna p, q. Rötterna kan skrivas enlig Cardanos formler, se nedan

$$x_1 = u+v, \quad x_2 = \omega u + \omega^2 v, \quad x_3 = \omega^2 u + \omega v,$$

där

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Nu är

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= (u+v) - (\omega u + \omega^2 v) = (1-\omega)u + (1-\omega^2)v = (1-\omega)(u-\omega^2 v) \\
x_1 - x_3 &= (u+v) - (\omega^2 u + \omega v) = -\omega^2(1-\omega)(u-\omega v) \\
x_2 - x_3 &= (\omega u + \omega^2 v) - (\omega^2 u + \omega v) = \omega(1-\omega)(u-v) \\
(u-\omega v)(u-\omega^2 v)(u-v) &= u^3 - v^3,
\end{aligned}$$

alltså är

$$\begin{aligned}
(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3) &= -\omega^3(1-\omega)^3(u-\omega v)(u-\omega^2 v)(u-v) \\
&= -(1-\omega)^3(u^3-v^3) = (1-\omega)^3(v^3-u^3).
\end{aligned}$$

Man får genast att

$$v^3 - u^3 = -2\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

så

$$D = (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2 = (1-\omega)^6(v^3-u^3)^2 = (-3\omega)^3 \cdot 4(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}) = -108(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}).$$

2.4 Cardanos teori och metod

Vi har gått från $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$ till $y^3 + py + q = 0$ genom att ersätta $x = y - \frac{b}{3a}$. Ersätt $y = u + v$ och vi får

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0.$$

Efter utveckling och förenkling får man

$$(u^3 + v^3) + (3uv + p)(u+v) + q = 0.$$

Om u och v kan uppfylla $u^3 + v^3 = -q$ och $3uv + p = 0$ kommer ekvationen ovan att vara uppfylld. Det betyder att $uv = -\frac{p}{3}$ och $u^3 + v^3 = -q$, vilket är ett ekvationssystem i två variabler u och v. Sätter vi in $v = -\frac{p}{3u}$ i den andra ekvationen, så får vi

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Detta är en sjättegradsekvation i u. Om vi låter $z = u^3$ så kan vi omskriva ekvationen ovan till

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Löser vi den här andragradsekvationen, så får vi

$$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Det ger $z = u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.

När $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ och $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ eller $u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ och $v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ får vi samma resultat i $y = u + v$ på grund av att u och v är symmetiska variabler. Så vi kan välja

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\
u_2 &= \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \omega u_1 \\
u_3 &= \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \omega^2 u_1 \\
v_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\
v_2 &= \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \omega v_1 \\
v_3 &= \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \omega^2 v_1.
\end{aligned}$$

Men u och v måste uppfylla $uv = -\frac{p}{3}$, därför kan vi inte kombinera dem hur som helst. Vi får

$$u_1 v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}},$$

alltså

$$\begin{aligned} u_1v_1 &= -\frac{p}{3} \\ u_2v_3 &= \omega u_1 \cdot \omega^2 v_1 = \omega^3 u_1 v_1 = -\frac{p}{3} \\ u_3v_2 &= \omega^2 u_1 \cdot \omega v_1 = \omega^3 u_1 v_1 = -\frac{p}{3}. \end{aligned}$$

På grund av att $y = u + v$ får vi

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ y_2 &= u_2 + v_3 = \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \omega u_1 + \omega^2 v_1 \\ y_3 &= u_3 + v_2 = \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \omega^2 u_1 + \omega v_1. \end{aligned}$$

Eftersom $x = y - \frac{b}{3a}$, så får vi följande rötter till ekvationen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$

$$x_1 = y_1 - \frac{b}{3a},\ x_2 = y_2 - \frac{b}{3a},\ x_3 = y_3 - \frac{b}{3a}.$$

I Cardanos metod [1] gör vi först ersättningen $x = y - \frac{b}{3a}$ för att ta bort termen bx^2 och göra den generella tredjegradsekvationen till en särskild tredjegradsekvation utan bx^2. Sedan sätter vi $y = u + v$ och u samt v bestäms av ett ekvationssystem. När vi har fått u och v kan vi få x genom $x = y - \frac{b}{3a}$.

Ekvations diskriminant visar relationer mellan ekvations koeffcienter och rötter. Alltså att man kan undersöka ekvations rötter genom att studera diskriminanten. Diskriminanten i den här fallet är $D = -108(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}) = -108\Delta$, och $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$.

När $\Delta < 0$, har ekvationen tre olika reella rötter. Bevis:
För $\Delta < 0$ betyder att $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ är rent imaginärt tal och därför

$$v_1^3 = \overline{u_1^3} = \overline{u_1}^3.$$

Alltså är $v_1 = \overline{u_1}$ eller $v_1 = \omega\overline{u_1}$ eller $v_1 = \omega^2\overline{u_1}$. Men vi vet att $uv = -\frac{p}{3}$ är ett reellt tal, så $v_1 = \overline{u_1}$, vilket betyder v_1 och u_1 är konjugerade komplexa tal. Alltså är $u_1 + v_1$ en reell rot. Och lägg märke till ω och ω^2 också är komplext konjugerade, så $\omega u_1 + \omega^2 v_1$ och $\omega^2 u_1 + \omega v_1$ är också summor av ett komplext tal med sitt konjugerade tal och resultatet är reellt. Därmed gäller att om $\Delta < 0$, så har ekvationen tre olika reella rötter.

När $\Delta = 0$, har ekvationen tre reella rötter, två av dem är lika. Bevis:
För $\Delta = 0$ betyder att $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = 0$. Man får $v_1^3 = u_1^3 = -\frac{q}{2}$. Därmed $u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ är en reell rot. Och genom beräckningar får vi $\omega u_1 + \omega^2 v_1 = \omega^2 u_1 + \omega v_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ som också är reella. Därmed gäller att om $\Delta = 0$, så har ekvationen tre reella rötter, två av dem är lika.

När $\Delta > 0$, har ekvationen tre olika rötter, en av dem är en reell rot och de två övriga är komplexa konjugerade rötter. Bevis:

För $\Delta > 0$, betyder att $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ är ett reellt tal. Därmed är v_1 och u_1 samt $u_1 + v_1$ är också reella tal. Den andra roten $y_2 = \omega u_1 + \omega^2 v_1$, om vi skriver $\omega = a + bi$ och $\omega^2 = a - bi$ då är $\omega u_1 + \omega^2 v_1 = (au_1 + av_1) + i(bu_1 - bv_1)$ ett komplext tal. Tredje roten $y_3 = \omega^2 u_1 + \omega v_1$, om vi skriver $\omega = a + bi$ och $\omega^2 = a - bi$ då är $\omega^2 u_1 + \omega v_1 = (au_1 + av_1) + i(bv_1 - bu_1) = (au_1 + av_1) - i(bu_1 - bv_1)$ också ett komplext tal och konjugerat med y_2. Därmed gäller att om $\Delta > 0$, så har ekvationen tre olika rötter, en av dem är en reell rot och två av dem är konjugerade komplexa rötter.

2.5 Viétes teori och metod

I Viétes metod [1] får vi starta också med en särskild tredjegradsekvation: $y^3 + py + q = 0$. Ersätt $y = z - \frac{p}{3z}$. Efter utveckling och förenkling får vi

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Det är en andragradsekvation i z^3

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

För varje val av z, kan vi få en rot för $y = z - \frac{p}{3z}$. Efter beräkningar märker vi att$\pm$ ger samma rötter till y. Därmed har vi

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 - \frac{p}{3z_1} \\ y_2 &= z_2 - \frac{p}{3z_2} = z_1\omega - \frac{p}{3z_1\omega} \\ y_3 &= z_3 - \frac{p}{3z_3} = z_1\omega^2 - \frac{p}{3z_1\omega^2}. \end{aligned}$$

Om vi vill ha tre rötter till tredjegradsekvationen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$, beräknar vi bara $x = y - \frac{b}{3a}$.

2.6 Eulers teori och metod

För tredjegradsekvationen $y^3 + py + q = 0$ är Eulers substitution [1]

$$y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}.$$

Nu sätter vi in y i ekvationen och får

$$(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v})^3 + p(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}) + q = 0.$$

Efter utveckling och förenkling får vi

$$(u + v) + (3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v} + p)(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}) + q = 0.$$

Om u och v uppfyller $u + v = -q$ och $3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v} + p = 0$ kommer ekvationen ovan att vara uppfylld. Det betyder att $uv = -\frac{p^3}{27}, u + v = -q$, vilket är ett ekvationssystem i två variabler u och v. Sätter vi in $v = -\frac{p^3}{27u}$ i den andra ekvationen, så får vi $u - \frac{p^3}{27u} + q = 0$. Multiplicera med $27u$ på bägge sidor och vi får

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0,$$

och därmed

$$u = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Då kan man välja

$$u_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v_1 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Med Cardanos metod får vi

$$y_1 = \sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{v_1}, \quad y_2 = \omega\sqrt[3]{u_1} + \omega^2\sqrt[3]{v_1}, \quad y_3 = \omega^2\sqrt[3]{u_1} + \omega\sqrt[3]{v_1}.$$

De flesta algebraiska beräkningar påminner om Cardanos metod.

2.7 Cayleys teori och metod

Cayley gör substitutionen [1] $y = u^2v + uv^2$ i stället för Cardanos $y = u + v$, så vi får

$$(u^2v + uv^2)^3 + p(u^2v + uv^2) + q = 0.$$

Efter utveckling och förenkling får vi

$$u^3v^3(u^3 + v^3) + uv(u + v)(3u^3v^3 + p) + q = 0.$$

Om u och v uppfyller $u^3 + v^3 = \frac{3q}{p}$ och $3u^3v^3 + p = 0$, kommer ekvationen ovan att vara uppfylld. Det betyder att $u^3v^3 = -\frac{p}{3}, u^3 + v^3 = \frac{3q}{p}$, vilket är ett ekvationssystem i två variabler u och v. Sätter vi in $v^3 = -\frac{p^3}{3u^3}$ i den andra ekvationen, så får vi

$$u^6 - \frac{3qu^3}{p} - \frac{p}{3} = 0.$$

Ersätt $z = u^3$ i ekvationen och vi får

$$z^2 - \frac{3q}{p}z - \frac{p}{3} = 0,$$

vilket ger rötterna för ekvationen

$$z = u^3 = \frac{3q}{2p} \pm \sqrt{\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{p}{3}}.$$

Man kan välja

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{3q}{2p} + \sqrt{\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{p}{3}}},\ v_1 = \sqrt[3]{\frac{3q}{2p} - \sqrt{\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{p}{3}}}.$$

De tre rötterna till ekvationen blir
$y_1 = u_1^2v_1 + u_1v_1^2,\ y_2 = \omega u_1^2v_1 + \omega^2u_1v_1^2,\ y_3 = \omega^2u_1^2v_1 + \omega u_1v_1^2.$

2.8 Lagranges teori och metod

I Lagranges metod [2] antog han att e, f, g är tre rötter till tredjegradsekvationen

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Sätt nu

$$\begin{aligned} r &= e+\omega f+\omega^2 g,\ s = e+\omega^2 f+\omega g \\ p(y) &= (y-r)(y-\omega r)(y-\omega^2 r)(y-s)(y-\omega s)(y-\omega^2 s). \end{aligned}$$

Då är $r, \omega r, \omega^2 r, s, \omega s, \omega^2 s$ rötter till $p(y) = 0$. Vi vet

$$\begin{aligned} (y-r)(y-\omega r)(y-\omega^2 r) &= y^3 - y^2 r(\omega^2+\omega+1) + yr^2(\omega^2+\omega+1) - r^3 = y^3 - r^3 \\ (y-s)(y-\omega s)(y-\omega^2 s) &= y^3 - y^2 s(\omega^2+\omega+1) + ys^2(\omega^2+\omega+1) - s^3 = y^3 - s^3. \end{aligned}$$

Därmed är $p(y) = (y^3 - r^3)(y^3 - s^3) = y^6 - (r^3 + s^3)y^3 + r^3 s^3 = 0$. Eftersom

$$r = e+\omega f+\omega^2 g, \quad s = e+\omega^2 f+\omega g.$$

Därmed

r$^3 = (e+\omega f+\omega^2 g)^3 = e^3+f^3+g^3+3\omega e^2 f+3\omega f^2 g+3\omega e g^2+3\omega^2 e f^2$
$+\,3\omega^2 f g^2+3\omega^2 e^2 g+6efg$
s$^3 = (e+\omega^2 f+\omega g)^3 = e^3+f^3+g^3+3\omega e^2 g+3\omega e f^2+3\omega f g^2+3\omega^2 g f^2$
$+\,3\omega^2 e g^2+3\omega^2 e^2 f+6efg$
r$^3 + s^3 = 2(e^3+f^3+g^3) - 3e^2 f - 3eg^2 - 3gf^2 - 3ef^2 - 3fg^2 - 3e^2 g + 12efg,$

och från sambandet mellan en ekvations rötter och koefficienter vet vi att

$$\begin{aligned} e+f+g &= -b \\ ef+eg+fg &= c \\ efg &= -d. \end{aligned}$$

Därmed

-2b$^3 + 9bc - 27d$
$= 2(e+f+g)^3 - 9(e+f+g)(ef+eg+fg) + 27efg$
$= 2(e^3+f^3+g^3) - 3e^2 f - 3eg^2 - 3gf^2 - 3ef^2 - 3fg^2 - 3e^2 g + 12efg.$

På samma sätt genom beräkning kan man få ut $r^3 s^3$ och $(b-3c)^3$. Och

$$\begin{aligned} r^3 + s^3 &= -2b^3 + 9bc - 27d \\ r^3 s^3 &= (b-3c)^3. \end{aligned}$$

Då kan vi omskriva $y^6 - (r^3+s^3)y^3 + r^3 s^3 = 0$ till

$$y^6 + (2b^3 - 9bc + 27d)y^3 + (b-3c)^3 = 0.$$

Vi låter $z = y^3$ och vi får

$$z^2 + (2b^3 - 9bc + 27d)z + (b-3c)^3 = 0.$$

Antag att z_1 och z_2 är rötter till $z^2 + (2b^3 - 9bc + 27d)z + (b - 3c)^3 = 0$. Därmed är $y = \sqrt[3]{z_1}$ eller $y = \sqrt[3]{z_2}$. Detta ger $y = r = \sqrt[3]{z_1}$ eller $y = s = \sqrt[3]{z_2}$. Från sambandet mellan en ekvations rötter och koefficienter har vi ett ekvationssystem

$$e + f + g = -b \tag{3}$$

$$r = e + \omega f + \omega^2 g = \sqrt[3]{z_1} \tag{4}$$

$$s = e + \omega^2 f + \omega g = \sqrt[3]{z_2}. \tag{5}$$

Nu ska vi lösa systememet ovan genom att (4)-(3) , (5)-(3) och detta ger

$$(\omega - 1)f + (\omega^2 - 1)g = \sqrt[3]{z_1} + b \tag{6}$$

$$(\omega^2 - 1)f + (\omega - 1)g = \sqrt[3]{z_2} + b. \tag{7}$$

Från (6) får vi

$$f = \frac{\sqrt[3]{z_1} + b - (\omega^2 - 1)g}{\omega - 1}. \tag{8}$$

Om vi sätter in (8) i (7), så får vi

$$\frac{\sqrt[3]{z_1} + b - (\omega^2 - 1)g}{\omega - 1}(\omega^2 - 1) + g(\omega - 1) = \sqrt[3]{z_2} + b,$$

alltså är

$$\begin{aligned}
(-\omega^2 - 1 + 2\omega)g &= \sqrt[3]{z_2} + b - (\sqrt[3]{z_1} + b)(\omega + 1) \\
(\omega + 2\omega)g &= \sqrt[3]{z_2} + b - (\sqrt[3]{z_1} + b)(\omega + 1) \\
(3\omega)g &= \sqrt[3]{z_2} + b - (\sqrt[3]{z_1} + b)(\omega + 1) \\
g &= \frac{\sqrt[3]{z_2} + b - (\sqrt[3]{z_1} + b)(\omega + 1)}{3\omega} \\
g &= \frac{\sqrt[3]{z_2} + b - (\sqrt[3]{z_1} + b)(-\omega^2)}{3\omega} \\
g &= \frac{\sqrt[3]{z_2} + b + \omega^2 \sqrt[3]{z_1} + b\omega^2}{3\omega}.
\end{aligned}$$

Det betyder att

$$g = \frac{b(\omega^2 + 1) + \omega^2 \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}}{3\omega}. \tag{9}$$

Vi kan skriva om (9) till

$$g = \frac{-\omega b + \omega^2 \sqrt[3]{z_1} + \omega^3 \sqrt[3]{z_2}}{3\omega}.$$

Om vi förkortar med ω får vi

$$g = \frac{-b + \omega \sqrt[3]{z_1} + \omega^2 \sqrt[3]{z_2}}{3}. \tag{10}$$

Sätt in (10) i (8)

$$f = \frac{-b + \omega^2 \sqrt[3]{z_1} + \omega \sqrt[3]{z_2}}{3}. \tag{11}$$

Sätt in (10) och (11) i (3). Detta ger

$$e = \frac{-b + \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}}{3}.$$

Till sist får vi

$$\begin{aligned} e &= \frac{-b + \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}}{3} \\ f &= \frac{-b + \omega^2 \sqrt[3]{z_1} + \omega \sqrt[3]{z_2}}{3} \\ g &= \frac{-b + \omega \sqrt[3]{z_1} + \omega^2 \sqrt[3]{z_2}}{3}. \end{aligned}$$

Nu har vi tredjegradsekvationens tre rötter.

2.9 De Moivres teori och metod

De Moivre fösökte ta bort rottecken från Cardanos lösningsformler genom att använda trigonometiska funktioner [2]. Den metoden är särskilt lämplig då

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

för tredjegradsekvationen

$$y^3 + py + q = 0.$$

I Cardanos lösningformler ser vi

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = u_1 + v_1 \\ y_2 &= \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = u_2 + v_3 = \omega u_1 + \omega^2 v_1 \\ y_3 &= \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = u_3 + v_2 = \omega^2 u_1 + \omega v_1. \end{aligned}$$

Enligt De Moivres formel

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

får vi

$$(r\cos\theta + ir\sin\theta)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{r}(\cos\theta/3 + i\sin\theta/3)$$

$$(r\cos\theta - ir\sin\theta)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{r}(\cos\theta/3 - i\sin\theta/3).$$

Vi antar att $0 \leq \theta < 2\pi$ så att vårt uttryck för kubik roten är väldefinierat. Vi diskuterar här bara situationen när diskriminanten $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ för tredjegradsekvationen $y^3 + py + q = 0$. Alltså att absolut värde av Δ är $|\Delta| = |\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}| = -\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$. Därmed

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} &= (-\frac{q}{2} + i\sqrt{\frac{-q^2}{4} + \frac{-p^3}{27}})^{\frac{1}{3}} \\
\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} &= (-\frac{q}{2} - i\sqrt{\frac{-q^2}{4} + \frac{-p^3}{27}})^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Låt $r\cos\theta = -\frac{q}{2}$ och $r\sin\theta = \sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$. Därmed

$$\begin{aligned}
(-\frac{q}{2} + i\sqrt{\frac{-q^2}{4} + \frac{-p^3}{27}})^{\frac{1}{3}} &= (r\cos\theta + ir\sin\theta)^{\frac{1}{3}} \\
(-\frac{q}{2} - i\sqrt{\frac{-q^2}{4} + \frac{-p^3}{27}})^{\frac{1}{3}} &= (r\cos\theta - ir\sin\theta)^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Om vi tar summa av kvadraterna på bägge sidor för $r\cos\theta = -\frac{q}{2}$ och $r\sin\theta = \sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$, får vi $r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$, vilket ger $r^2 = -\frac{p^3}{27}$. Därmed $r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$ och från $r\cos\theta = -\frac{q}{2}$ får vi $\theta = \arccos(-\frac{q}{2r}) = \arccos((\frac{-q}{2})\sqrt{\frac{-27}{p^3}})$. Så vi kan omskriva Cardanos formler till

$$\begin{aligned}
y_1 &= (r\cos\theta + ir\sin\theta)^{\frac{1}{3}} + (r\cos\theta - ir\sin\theta)^{\frac{1}{3}} \\
&= \sqrt[3]{r}(\cos(\frac{\theta}{3}) + i\sin(\frac{\theta}{3}) + \cos(\frac{\theta}{3}) - i\sin(\frac{\theta}{3})) \\
&= 2\sqrt[3]{r}\cos(\frac{\theta}{3}) \\
y_2 &= \omega(r\cos\theta + ir\sin\theta)^{\frac{1}{3}} + \omega^2(r\cos\theta - ir\sin\theta)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega\sqrt[3]{r}(\cos(\frac{\theta}{3})+i\sin(\frac{\theta}{3}))+\omega^2\sqrt[3]{r}(\cos(\frac{\theta}{3})-i\sin(\frac{\theta}{3}))\\
&= \sqrt[3]{r}((\omega+\omega^2)\cos(\frac{\theta}{3})+i(\omega-\omega^2)\sin(\frac{\theta}{3}))\\
&= -\sqrt[3]{r}(\cos(\frac{\theta}{3})+\sqrt{3}\sin(\frac{\theta}{3}))\\
y_3 &= \omega^2(r\cos\theta+ir\sin\theta)^{\frac{1}{3}}+\omega(r\cos\theta-ir\sin\theta)^{\frac{1}{3}}\\
&= \omega^2\sqrt[3]{r}(\cos(\frac{\theta}{3})+i\sin(\frac{\theta}{3}))+\omega\sqrt[3]{r}(\cos(\frac{\theta}{3})-i\sin(\frac{\theta}{3}))\\
&= \sqrt[3]{r}((\omega^2+\omega)\cos(\frac{\theta}{3})+i(\omega^2-\omega)\sin(\frac{\theta}{3}))\\
&= -\sqrt[3]{r}(\cos(\frac{\theta}{3})-\sqrt{3}\sin(\frac{\theta}{3})).
\end{aligned}
$$

Enligt att

$$\cos(\frac{\theta}{3})+\sqrt{3}\sin(\frac{\theta}{3})=2(\frac{1}{2}\cos(\frac{\theta}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\theta}{3}))=2\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}),$$

så vi kan omskriva $y_2=2\sqrt[3]{r}\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})$. På samma sätt får vi $y_3=2\sqrt[3]{r}\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3})$. Så till sist får vi

$$y_{1,2,3}=2\sqrt[3]{r}\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3}),\ (k=0,1,2).$$

Enligt härledningen ovan kan vi skriva Cardanos formler för tre olika rötter när $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ av tredjegradsekvationen $y^3+py+q=0$ som

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\theta}{3})\\
y_2 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})\\
y_3 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}),
\end{aligned}
$$

och $\theta=\arccos((\frac{-q}{2})\sqrt{\frac{-27}{p^3}})=\arccos(\frac{-q}{2r})$ och $r=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$.

2.10 E.J.Oglesbys teori och metod

En generell tredjegradsekvation $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ har tre rötter x_1,x_2,x_3 och Oglesby (Amerikansk matematiker) antar att de rötterna är funktioner av A,B,C och kan uttryckas så [3]

$$\begin{aligned} x_1 &= A+B+C \\ x_2 &= A+\omega B+\omega^2 C \\ x_3 &= A+\omega^2 B+\omega C. \end{aligned}$$

Tal A, B, C kan bestämmas genom

$(A+B+C)+(A+\omega B+\omega^2 C)+(A+\omega^2 B+\omega C)$
$=3A+B(\omega^2+\omega+1)+C(\omega^2+\omega+1)=3A$

$(A+B+C)(A+\omega B+\omega^2 C)+(A+\omega B+\omega^2 C)(A+\omega^2 B+\omega C)$
$+(A+\omega^2 B+\omega C)(A+B+C)=3(A^2-BC)$

$(A+B+C)(A+\omega B+\omega^2 C)(A+\omega^2 B+\omega C)=A^3+B^3+C^3-3ABC,$

alltså

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 3A \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 &= 3(A^2-BC) \\ x_1x_2x_3 &= A^3+B^3+C^3-3ABC. \end{aligned}$$

Från sambandet mellan en ekvations rötter och koefficienter har vi ett ekvationssystem

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= -\frac{3b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 &= \frac{3c}{a} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

Därmed att

$3A=-\frac{3b}{a}$ vilket ger $A=-\frac{b}{a}$.

$3(A^2-BC)=\frac{3c}{a}$ vilket ger $A^2-BC=\frac{c}{a}$.

$A^3+B^3+C^3-3ABC=-\frac{d}{a}$.

Om vi sätter $A=-\frac{b}{a}$ in i $A^2-BC=\frac{c}{a}$ får vi

$$BC=\frac{b^2-ac}{a^2}.$$

Och om vi sätter $A = -\frac{b}{a}, BC = \frac{b^2-ac}{a^2}$ in i $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = -\frac{d}{a}$, så får vi

$$B^3 + C^3 = \frac{3abc - a^2d - 2b^3}{a^3}.$$

Vi låter $H = ac - b^2$ och $G = a^2d - 3abc + 2b^3$, Så har vi

$$BC = -\frac{H}{a^2},$$

och

$$B^3 + C^3 = -\frac{G}{a^3}.$$

Vi får ett ekvationssystem i B och C. Lös det systemet och vi får

$C = -\frac{H}{a^2B}$ och sätt in detta uttryck i $B^3 + C^3 = -\frac{G}{a^3}$. Då får vi

$$B^6 + \frac{G}{a^3}B^3 - \frac{H^3}{a^6} = 0.$$

Sätt $z = B^3$ vilket ger $z^2 + \frac{G}{a^3}z - \frac{H^3}{a^6} = 0$. Då får vi

$$B^3 = \frac{-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2a^3}$$

$$C^3 = \frac{-G - \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2a^3}.$$

Alltså en kubikrot till B är $\frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}{2}}$, och två andra kubikrötter till samt en kubikrot till C är $\frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{-G-\sqrt{G^2+4H^3}}{2}}$, och två andra kubikrötter till. Därmed får vi rötterna till ekvationen $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a}(-b + \sqrt[3]{\frac{-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-G - \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2}}) \\
x_2 &= \frac{1}{a}(-b + \omega\sqrt[3]{\frac{-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2}} + \omega^2\sqrt[3]{\frac{-G - \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2}}) \\
x_3 &= \frac{1}{a}(-b + \omega^2\sqrt[3]{\frac{-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2}} + \omega\sqrt[3]{\frac{-G - \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2}}).
\end{aligned}$$

2.11 Orrin Frinks teori och metod

Orrin Frink (Amerikansk matematiker, 1901-1988) [4] utgår från en tredjegradsekvation $x^3 + px + q = 0$. Dividera båda leden med 2

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{2} + \frac{p}{2}x + \frac{q}{2} &= 0 \\ \frac{4x^3}{8} + \frac{p}{2}x + \frac{q}{2} &= 0 \\ \frac{x^3}{8} + \frac{3x^3}{8} + \frac{p}{2}x + \frac{q}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Låt $y^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{p}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{8} + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{q}{2} &= 0 \\ \frac{x^3}{8} + \frac{3}{2}xy^2 &= -\frac{q}{2}. \end{aligned}$$

Låt $\frac{3}{4}x^2y + y^3 = R$ och addera R till båda leden

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{8} + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{3}{4}x^2y + y^3 &= R - \frac{q}{2} \\ (\frac{x}{2} + y)^3 &= R - \frac{q}{2}. \end{aligned}$$

De tre lösningarna till ekvationen $(\frac{x}{2} + y)^3 = R - \frac{q}{2}$ är $\sqrt[3]{R - \frac{q}{2}}$ och $\omega\sqrt[3]{R - \frac{q}{2}}$ och $\omega^2\sqrt[3]{R - \frac{q}{2}}$.

Vi har $\frac{3}{4}x^2y + y^3 = R$ och subtrahera detta från ekvationen $\frac{x^3}{8} + \frac{3}{2}xy^2 = -\frac{q}{2}$. Vi får

$$(\frac{x}{2} - y)^3 = -R - \frac{q}{2}.$$

De tre lösningarna till ekvationen $(\frac{x}{2} - y)^3 = -R - \frac{q}{2}$ är $\sqrt[3]{-R - \frac{q}{2}}$ och $\omega\sqrt[3]{-R - \frac{q}{2}}$ och $\omega^2\sqrt[3]{-R - \frac{q}{2}}$.

Addera och subtrahera två ekvationer

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + y &= \sqrt[3]{R - \frac{q}{2}} \\ \frac{x}{2} - y &= \sqrt[3]{-R - \frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}+\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}} \\
x^2 &= (\sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}+\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}})^2,
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
y &= \frac{\sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}}}{2} \\
y^2 &= (\frac{\sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}}}{2})^2.
\end{aligned}$$

Vi har $y^2 = \frac{x^2}{4}+\frac{p}{3}$, alltså att

$$\begin{aligned}
-\frac{p}{3} &= \frac{x^2}{4}-y^2 \\
-\frac{p}{3} &= \frac{(\sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}+\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}})^2}{4}-(\frac{\sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}}}{2})^2 \\
-\frac{p}{3} &= \sqrt[3]{\frac{q^2}{4}-R^2} \\
(-\frac{p}{3})^3 &= (\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}-R^2})^3 \\
-\frac{p^3}{27} &= \frac{q^2}{4}-R^2 \\
R^2 &= \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.
\end{aligned}$$

Rötterna till ekvationen ovan blir

$$R = \pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

När $R = \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ eller $R = -\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ påverkas inte något av resultaten av x, y. Därför får vi

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}+\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}} \\
x_2 &= \omega\sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}+\omega^2\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}} \\
x_3 &= \omega^2\sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}+\omega\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}}.
\end{aligned}$$

2.12 Thomas J. Oslers teori och metod

Osler (Amerikansk matematiker, 1940-) [5] börjar med tredjegradsekvationen $x^3 - 3cx - 2d = 0$. Om vi använder Cardanos förmler och sätter $p = -3c$ och $q = -2d$ i Cardanos ekvationen $x^3 + px + q = 0$ får vi

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{d + \sqrt{d^2 - c^3}} + \sqrt[3]{d - \sqrt{d^2 - c^3}} \\
x_2 &= \omega \sqrt[3]{d + \sqrt{d^2 - c^3}} + \omega^2 \sqrt[3]{d - \sqrt{d^2 - c^3}} \\
x_3 &= \omega^2 \sqrt[3]{d + \sqrt{d^2 - c^3}} + \omega \sqrt[3]{d - \sqrt{d^2 - c^3}}.
\end{aligned}
$$

Om vi låter $b = d^2 - c^3$ kan vi skriva om de lösningar till

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{d + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{d - \sqrt{b}} \\
x_2 &= \omega(\sqrt[3]{d + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{d - \sqrt{b}}) \\
x_3 &= \omega^2(\sqrt[3]{d + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{d - \sqrt{b}}).
\end{aligned}
$$

Oslers metod är en variant av Cardanos. Det är en särskilt fall när $x^3 - 3cx - 2d = 0$ motsvarande får vi $p = -3c$ och $q = -2d$ i ekvationen $x^3 + px + q = 0$. När man använder Cardanos formler för att lösa $x^3 - 3cx - 2d = 0$ får man en lite snyggare formler i lösningar. Om man sätter $b = d^2 - c^3$ får man en mer snyggare resultat.

3 Teorier och metoder för att lösa fjärdegradsekvationer

3.1 Ferraris teori och metod

Cardanos elev Ferrari är den första person som upptäcker en metod för att lösa en fjärdegradsekvation [1]. Han gjorde så här

$$
\begin{aligned}
x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \\
x^4 + ax^3 &= -bx^2 - cx - d \\
x^2(x^2 + ax) &= -bx^2 - cx - d \\
x^2(x + \frac{a}{2})^2 &= -bx^2 - cx - d + \frac{a^2x^2}{4} \\
(x^2 + \frac{ax}{2})^2 &= \frac{x^2(a^2 - 4b)}{4} - cx - d.
\end{aligned}
$$

Här inför han en extra hjälpvariabel t. Addera $(x^2 + \frac{ax}{2})t + \frac{t^2}{4}$ till bägge sidor i ekvationen ovan

$$\begin{aligned}
(x^2+\frac{ax}{2})^2+(x^2+\frac{ax}{2})t+t^2/4 &= (x^2+\frac{ax}{2}))t+\frac{t^2}{4}+\frac{x^2(a^2-4b)}{4}-cx-d \\
(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{t}{2})^2 &= (\frac{a^2-4b}{4}+t)x^2+(\frac{at}{2}-c)x+\frac{t^2}{4}-d.
\end{aligned}$$

Om vi kan få värdet av variabeln t så att högra sidan i ekvationen ovan blir en perfekt kvadrat så kan vi ta kvadraten ur båda leden och få en fjärdegradsekvation. För att åstadkomma detta gör vi högra ledets diskriminant=0, alltså $\Delta = (\frac{at}{2}-c)^2-4((\frac{a^2-4b}{4}+t)(\frac{t^2}{4}-d)) = -t^3+bt^2-(ac-4d)t-4bd+a^2d+c^2 = 0$. Låt $t = y+\frac{b}{3}$, och vi får en tredjegradsekvation som $y^3+py+q = 0$, och $p = ac-\frac{b^2}{3}-4d, q = \frac{abc}{3}-\frac{2b^3}{27}-a^2d+\frac{8bd}{3}-c^2$.

Använd Cardanos formler

$$\begin{aligned}
u &= \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\
v &= \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\
y &= u+v.
\end{aligned}$$

Antag att u_0, v_0 är rötter för u, v och uppfyller villkoret $uv = \frac{-p}{3}$, då får vi

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{b}{3}+u_0+v_0 \\
t_2 &= \frac{b}{3}+\omega u_0+\omega^2 v_0 \\
t_3 &= \frac{b}{3}+\omega^2 u_0+\omega v_0.
\end{aligned}$$

Låt $\alpha^2 = \frac{a^2}{4}-b+t, \beta^2 = \frac{t^2}{4}-d$ och $\alpha\beta = \frac{at}{4}-\frac{c}{2}$, detta ger

$$\begin{aligned}
x^2+\frac{ax}{2}+\frac{t}{2} &= \alpha x+\beta \\
x^2+(\frac{a}{2}-\alpha)x+\frac{a}{2}-\beta &= 0.
\end{aligned}$$

Därmed får vi

$$x_{1,2} = \frac{\alpha-\frac{a}{2}\pm\sqrt{(\frac{a}{2}-\alpha)^2-4(\frac{t}{2}-\beta)}}{2}.$$

Och

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{t}{2} &= -\alpha x - \beta \\ x^2 + (\frac{a}{2} + \alpha)x + \frac{t}{2} + \beta &= 0. \end{aligned}$$

Detta ger rötterna

$$x_{3,4} = \frac{-\alpha - \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2} + \alpha)^2 - 4(\frac{t}{2} + \beta)}}{2}.$$

Anmärkning: Det finns tre möjliga värden på t och α, β kunde ha två par värden för varje t. Därmed kunde x ha fyra rötter för varje t och varje par av α, β. Men de fyra rötterna är identiska. Därför behöver vi bara beräkna ett av t och ett par av α, β värden för att få ut de fyra rötterna för x. De fyra rötterna för fjärdegradsekvationen är

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{\alpha - \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2} - \alpha)^2 - 4(\frac{t}{2} - \beta)}}{2} \\ x_{3,4} &= \frac{-\alpha - \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2} - \alpha)^2 - 4(\frac{t}{2} + \beta)}}{2}. \end{aligned}$$

3.2 Descartes teori och metod

Descartes ersätter $x = y - \frac{a}{4}$ i fjärdegradsekvationen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, så får vi en ny fjärdegradsekvation $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ [1]. Anta att vi kan faktorisera ekvationen ovan till

$$y^4 + py^2 + qy + r = (y^2 + ky + t)(y^2 - ky + m) = y^4 + (t + m - k^2)y^2 + k(m - t)y + tm.$$

Vi jämför med ekvationen: $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ och får

$$\begin{aligned} t + m - k^2 &= p \\ t + m &= k^2 + p \\ k(m - t) &= q \\ m - t &= \frac{q}{k} \\ tm &= r. \end{aligned}$$

Därefter får vi

$$t = \frac{(k^3 + pk - q)}{2k},\ m = \frac{(k^3 + pk + q)}{2k},\ tm = r.$$

Ersätt t,m i ekvationen ovan

$$\frac{(k^3 + pk - q)}{2k} \cdot \frac{(k^3 + pk + q)}{2k} = r.$$

Vi får en sjättegradsekvation

$$k^6 + 2pk^4 + (p^2 - 4r)k^2 - q^2 = 0.$$

Om vi låter $z = k^2$ får vi $z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0$. Vi kan använda Cardanos formel för att lösa ut tre rötter för z så att vi kan få k, på samma sätt som vi noterade i 3.1 behöver vi bara beräkna ett k, t, m värden för att få ut x. Nu antar vi att $k = k_0$ vi får

$$(y^2 + k_0 y + t_0)(y^2 - k_0 y + m_0) = 0.$$

Det betyder att
$y^2 + k_0 y + t_0 = 0$ och därmed $y_{1,2} = \frac{-k_0 \pm \sqrt{k_0^2 - 4t_0}}{2}$.
$y^2 - k_0 y + m_0 = 0$ och därmed $y_{3,4} = \frac{k_0 \pm \sqrt{k_0^2 - 4m_0}}{2}$.

Och från $x = y - \frac{a}{4}$, får vi fyra rötter till x

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-k_0 + \sqrt{k_0^2 - 4t_0}}{2} - \frac{a}{4} \\ x_2 &= \frac{-k_0 - \sqrt{k_0^2 - 4t_0}}{2} - \frac{a}{4} \\ x_3 &= \frac{k_0 + \sqrt{k_0^2 - 4m_0}}{2} - \frac{a}{4} \\ x_4 &= \frac{k_0 - \sqrt{k_0^2 - 4m_0}}{2} - \frac{a}{4}. \end{aligned}$$

3.3 Eulers teori och metod

Eulers lösningsmetod för fjärdegradsekvationen är en förlängning av hans lösningmetod för tredjegradsekvationer [1]. Han antar att $x = \sqrt{r} + \sqrt{s} + \sqrt{t}$. Kvadrerar vi bägge sidor får vi

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sqrt{r} + \sqrt{s} + \sqrt{t})^2 \\ x^2 &= r + s + t + 2(\sqrt{sr} + \sqrt{st} + \sqrt{rt}) \\ x^2 - (r + s + t) &= 2(\sqrt{sr} + \sqrt{st} + \sqrt{rt}). \end{aligned}$$

Kvadrerar vi bägge sidor igen får vi

$(x^2 - (r+s+t))^2 = (2(\sqrt{sr} + \sqrt{st} + \sqrt{rt}))^2$

$x^4 - 2x^2(r+s+t) - 8(r\sqrt{st} + s\sqrt{rt} + t\sqrt{rs}) + (r+s+t)^2 - 4(rs+rt+st) = 0.$

Förenkla och ersätt $r\sqrt{st} + s\sqrt{rt} + t\sqrt{rs} = x\sqrt{rst}$ får vi

$x^4 - 2(r+s+t)x^2 - 8\sqrt{rst}x + (r+s+t)^2 - 4(rs+rt+st) = 0.$

Om vi jämför ekvationen ovan med fjärdegradsekvationen $x^4 + px^2 + qx + n = 0$ får vi:

$$-2(r+s+t) = p,\ -8\sqrt{rst} = q,\ (r+s+t)^2 - 4(rs+rt+st) = n.$$

Låt

$$k = r+s+t,\ l = rs+rt+st,\ m = rst,$$

då får vi

$$-2k = p,\ -8\sqrt{m} = q,\ k^2 - 4l = n,$$

vilket betyder att

$$k = -\frac{p}{2},\ \ m = \frac{q^2}{64},\ \ l = \frac{p^2 - 4n}{16}.$$

Enligt sambandet mellan en tredjegradsekvations tre rötter och koefficienter kan vi se att r, s, t är rötter till en tredjegradsekvation vilken har $-k, l, -m$ som koefficienter

$$x^3 - kx^2 + lx - m = 0.$$

Ersätt k, m, j med p, q i ekvationen ovan. Då får vi

$$x^3 + (\frac{p}{2})x^2 + (\frac{p^2 - 4n}{16})x - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Lös tredjegradsekvationen och vi får r, s, t vilket ger oss en rot $x_1 = \sqrt{r}+\sqrt{s}+\sqrt{t}$ till x. Då kan ekvationen $x^4 + px^2 + qx + n = 0$ omskrivas till

$$(x - x_1)(x^3 + fx^2 + gx + h) = 0.$$

Genom att använda Cardanos formler för att lösa $x^3 + fx^2 + gx + h = 0$, kan vi få de tre återstående rötterna för x. Därmed har vi fyra rötter.

3.4 Lagranges teori och metod

Lagrange börjar från fjärdegradsekvation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ [6] Anta att de fyra rötterna är e, f, g, h. Låt $s = e + f - g - h$. Rötterna e, f, g, h är bara bestämda upp till en permutation. Alltså beroende på val av rötter kan s också vara följande möjligheter
$s_1 = e + f - g - h$, $s_2 = e - f + g - h$, $s_3 = e - f - g + h$

$s_4 = -e - f + g + h$, $s_5 = -e + f - g + h$, $s_6 = -e + f + g - h$.

Hjälpekvationen är en

$$\prod_{1 \le i \le 6} (s - s_i) = 0.$$

Den är en sjättegradsekvation i s och eftersom de sex rötterna är parvis motsatta tal, ser den ut som

$$s^6 - As^4 + Bs^2 - C = 0.$$

Låt $s^2 = t$, så att hjälpekvationen övergår till en tredjegradsekvation i t

$$t^3 - At^2 + Bt - C = 0.$$

Anta att de tre rötterna för t är t_1, t_2, t_3 och

$$\begin{aligned} t_1 &= (e + f - g - h)^2 \\ t_2 &= (e - f + g - h)^2 \\ t_3 &= (e - f - g + h)^2. \end{aligned}$$

Enligt sambandet mellan en ekvations rötter och koefficienter har vi

$$\begin{aligned} e + f + g + h &= -a \\ ef + eg + eh + fg + fh + gh &= b \\ efg + efh + egh + fgh &= -c \\ efgh &= d, \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} A &= t_1 + t_2 + t_3 \\ &= (e + f - g - h)^2 + (e - f + g - h)^2 + (e - f - g + h)^2 \\ &= 3(e^2 + f^2 + g^2 + h^2) - 2(ef + eg + eh + fg + fh + gh). \end{aligned}$$

Vi beräknar vidare

$$\begin{aligned} 3a^2 - 8b &= 3(-(e + f + g + h))^2 - 8(ef + eg + eh + fg + fh + gh) \\ &= 3(e^2 + f^2 + g^2 + h^2) - 2(ef + eg + eh + fg + fh + gh), \end{aligned}$$

alltså $A = 3a^2 - 8b$. På samma sätt får vi

$$\begin{aligned} B &= t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 \\ &= (e+f-g-h)^2(e-f+g-h)^2 + (e+f-g-h)^2(e-f-g+h)^2 \\ &+ (e-f+g-h)^2(e-f-g+h)^2 \\ &= 3a^4 - 16a^2b + 16b^2 + 16ac - 64d, \end{aligned}$$

och

C=t$_1t_2t_3 = (e+f-g-h)^2(e-f+g-h)^2(e-f-g+h)^2 = (a^3-4ab+8c)^2$.

Så tredjegradsekvationen i t kan omskrivas till

$$t^3 - (3a^2-8b)t^2 + (3a^4 - 16a^2b + 16b^2 + 16ac - 64d)t - (a^3-4ab+8c)^2 = 0.$$

De tre rötterna t_1, t_2, t_3 för t

$t_1 = (e+f-g-h)^2$ vilket ger $e+f-g-h = \sqrt{t_1}$

$t_2 = (e-f+g-h)^2$ vilket ger $e-f+g-h = \sqrt{t_2}$

$t_3 = (e-f-g+h)^2$ vilket ger $e-f-g+h = \sqrt{t_3}$

$e+f+g+h = -a$.

Om vi löser dessa ekvationssystem får vi

$$\begin{aligned} e &= \frac{\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}-a}{4} \\ f &= \frac{\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}-a}{4} \\ g &= \frac{-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}-a}{4} \\ h &= \frac{-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}-a}{4}. \end{aligned}$$

Nu har vi fyra rötter för fjärdegradsekvationen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

4 Exempel på tredjegradsekvations metoder

4.1 Cardanos metod

I exemplet: $x^3 - 6x - 4 = 0$, är $p = -6$ och $q = -4$. Insättning i Cardanos formler ger direkt

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} \\
&= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} \\
&= \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i} \\
&= i - 1 + (-i - 1) \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Här behöver man göra några kontroller

$(i - 1)^3 = i^3 + 3i^2(-1) + 3i - 1 = -i + 3 + 3i - 1 = 2 + 2i.$

$(-i - 1)^3 = (-i)^3 - 3(-i)^2 + 3(-i) - 1 = i + 3 - 3i - 1 = 2 - 2i.$

Alltså att

Kubikrötter till $2 + 2i$ är $i - 1, \omega(i - 1)$ och $\omega^2(i - 1)$. Kubikrötter till $2 - 2i$ är $-i - 1, \omega(-i - 1)$ och $\omega^2(-i - 1)$. De rötterna representerar värden på u och v i Cardanos formler och vi har $uv = -\frac{p}{3} = -\frac{-6}{3} = 2$. När man väljer ett värde av kubikrot till $2 + 2i$ måste man också väljia ett motsvarande värde av kubikrot till $2 - 2i$ som kan uppfylla $uv = 2$. Övan väljer vi $i - 1$som kubikroten till $2 + 2i$ och $-i - 1$ som motsvarande kubikrot till $2 - 2i$ enligt $(i - 1)(-i - 1) = -i^2 + i - i + 1 = 2$. Man får också välja de andra två pars värden $\omega(i - 1)$ och $\omega^2(-i - 1)$ samt $\omega^2(i - 1)$ och $\omega(-i - 1)$.

$$\begin{aligned}
x_2 &= \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\
&= \omega\sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \omega^2\sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} \\
&= \omega\sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \omega^2\sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} \\
&= \omega\sqrt[3]{2 + 2i} + \omega^2\sqrt[3]{2 - 2i} \\
&= \omega(i - 1) + \omega^2(-i - 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(i-1) + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(-i-1)\\
&= \frac{-i+1+i^2\sqrt{3}-i\sqrt{3}+i+1+i^2\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{2}\\
&= \frac{2-2\sqrt{3}}{2}\\
&= 1-\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\\
&= \omega^2\sqrt[3]{-\frac{-4}{2}+\sqrt{\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}}} + \omega\sqrt[3]{-\frac{-4}{2}-\sqrt{\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}}}\\
&= \omega^2\sqrt[3]{2+\sqrt{-4}} + \omega\sqrt[3]{2-\sqrt{-4}}\\
&= \omega^2\sqrt[3]{2+2i} + \omega\sqrt[3]{2-2i}\\
&= \omega^2(i-1)+\omega(-i-1)\\
&= \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(i-1) + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(-i-1)\\
&= \frac{-i+1-i^2\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i+1-i^2\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{2}\\
&= 1+\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Diskriminanten till ekvationen är
$D = (-108)(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}) = (-108)(\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}) = 432$ och $\Delta = \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} = -4$.

Alltså är $\Delta = -4 < 0$, vilket medför att ekvationen har tre olika reella rötter. Det överensstämmer med resultat.

4.2 Viétes metod

I vårt exempel $x^3-6x-4=0$, är $p=-6$ och $q=-4$. Insättning i Viétes formler ger

$$
z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}} = 2 \pm \sqrt{-4} = 2 \pm 2i.
$$

Vi kan välja $z_1 = \sqrt[3]{2+2i} = i-1$, vilket ger

$x_1 = z_1 - \frac{p}{3z_1} = i-1-\frac{-6}{3(i-1)} = i-1-1-i = -2$
$x_2 = z_1\omega - \frac{p}{3z_1\omega} = \omega(i-1) - \frac{-6}{\omega 3(i-1)} = \frac{1-\sqrt{3}-i-i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3})}{2} = 1-\sqrt{3}$
$x_3 = z_1\omega^2 - \frac{p}{3z_1\omega^2} = \omega^2(i-1) - \frac{-6}{\omega^2 3(i-1)} = \frac{1+\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}+i+\sqrt{3})}{2} = 1+\sqrt{3}.$

4.3 Eulers metod

I exemplet $x^3 - 6x - 4 = 0$, är $p = -6$ och $q = -4$. Insättning i Eulers formler direkt ger

$u_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = 2 + 2i.$

Därmed kan vi välja $\sqrt[3]{u_1} = \sqrt[3]{2+2i} = i - 1,$

$v_1 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = 2 - 2i.$

Och vi väljer $\sqrt[3]{v_1} = \sqrt[3]{2-2i} = -i - 1$

$x_1 = \sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{v_1} = i - 1 + (-i - 1) = -2$

$x_2 = \omega\sqrt[3]{u_1} + \omega^2\sqrt[3]{v_1} = \omega(i-1) + \omega^2(-i-1) = 1 - \sqrt{3}$

$x_3 = \omega^2\sqrt[3]{u_1} + \omega\sqrt[3]{v_1} = \omega^2(i-1) + \omega(-i-1) = 1 + \sqrt{3}.$

4.4 Cayleys metod

I exemplet $x^3 - 6x - 4 = 0$, är $p = -6$ och $q = -4$. Sätt i Cayleys formler direkt och vi får

$u^3 = \frac{3q}{2p} \pm \sqrt{\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{p}{3}}. = \frac{3(-4)}{2(-6)} \pm \sqrt{\frac{9(-4)^2}{4(-6)^2} + \frac{-6}{3}} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i.$

Vi kan välja $u^3 = 1 + i$ och $v^3 = 1 - i$. Det innebär $u_1 = \sqrt[3]{1+i}, v_1 = \sqrt[3]{1-i}$. Eftersom vi har räknat ut i 4.1

$(i-1)^3 = 2 + 2i$ och $(-i-1)^3 = 2 - 2i.$

Därmed

$(i-1)^3 = 2(1+i)$ vilket ger $1 + i = \frac{(i-1)^3}{(2^{\frac{1}{3}})^3}$, alltså $u_1 = \sqrt[3]{1+i} = \frac{i-1}{2^{\frac{1}{3}}}$.
$(-i-1)^3 = 2(1-i)$ vilket ger $1 - i = \frac{(-i-1)^3}{(2^{\frac{1}{3}})^3}$, alltså $u_1 = \sqrt[3]{1-i} = \frac{-i-1}{2^{\frac{1}{3}}}$.

Då är:

$u_1 = \sqrt[3]{1+i} = \frac{i-1}{2^{\frac{1}{3}}}$
$v_1 = \sqrt[3]{1-i} = \frac{-i-1}{2^{\frac{1}{3}}}$.

Vi får tre rötter

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1^2 v_1 + u_1 v_1^2 = -2 \\ x_2 &= \omega u_1^2 v_1 + \omega^2 u_1 v_1^2 = 1 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$x_3 = \omega^2 u_1^2 v_1 + \omega u_1 v_1^2 = 1 + \sqrt{3}.$$

4.5 Lagranges metod

I vårt exempel $x^3 - 6x - 4 = 0$ är $b = 0, c = -6$ och $d = -4$. Sätt i Lagranges formler direkt och ekvationen $z^2 + (2b^3 - 9bc + 27d)z + (b - 3c)^3 = 0$ blir

$$\begin{aligned} z^2 + 27dz - 27c^3 &= 0 \\ z^2 + 27(-4)z - 27(-6)^3 &= 0 \\ z^2 - 108z + 5832 &= 0. \end{aligned}$$

Vi får $z = 54 \pm \sqrt{54^2 - 5832} = 54 \pm \sqrt{-2916} = 54 \pm 54i$,

alltså att $z_1 = 54 + 54i, z_2 = 54 - 54i$. Vi kan välja

$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{54 + 54i} = \sqrt[3]{27(2 + 2i)} = 3(i - 1)$

$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{54 - 54i} = \sqrt[3]{27(2 - 2i)} = 3(-i - 1)$.

Vidare får vi att

$x_1 = \frac{-b + \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}}{3} = \frac{0 + 3(i-1) + 3(-i-1)}{3} = \frac{-6}{3} = -2$

$x_2 = \frac{-b + \omega^2 \sqrt[3]{z_1} + \omega \sqrt[3]{z_2}}{3} = \frac{0 + 3(i-1)\omega^2 + 3(-i-1)\omega}{3} = \omega^2(i - 1) + \omega(-i - 1) = 1 - \sqrt{3}$

$x_3 = \frac{-b + \omega \sqrt[3]{z_1} + \omega^2 \sqrt[3]{z_2}}{3} = \frac{0 + 3(i-1)\omega + 3(-i-1)\omega^2}{3} = \omega(i - 1) + \omega^2(-i - 1) = 1 + \sqrt{3}$.

4.6 De Moivres metod

I vårt exempel med $x^3 - 6x - 4 = 0$, är $p = -6$ och $q = -4$, får vi med De Moivres formler följande

$r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{(-6)^3}{27}} = 2\sqrt{2}$

$\theta = \arccos(\frac{-q}{2r}) = \arccos(\frac{4}{4\sqrt{2}}) = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$x_1 = 2\sqrt[3]{r} cos(\frac{\theta}{3}) = 2\sqrt[3]{2\sqrt{2}} cos(\frac{\pi}{12}) \approx 2 \cdot 1.414 \cdot 0.9659 \approx 2.732$

$x_2 = -\sqrt[3]{r}(cos(\frac{\theta}{3}) + \sqrt{3} sin(\frac{\theta}{3})) = 2\sqrt{2} \cos\frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -2$

$x_3 = -\sqrt[3]{r}(cos(\frac{\theta}{3}) - \sqrt{3} sin(\frac{\theta}{3})) = 2\sqrt{2} \cos\frac{17\pi}{12} \approx -0.732$.

Resultat verkar inte överensstämma med våra tidigare resultat men då vi omvandlar våra rotuttryck till decimaltal ser vi att de har samma värden.

$1+\sqrt{3} \approx 1+1.732 = 2.732$

$1-\sqrt{3} \approx 1-1.732 = -0.732.$

4.7 E.J. Oglesbys metod

I mitt exempel $x^3-6x-4=0$ är $a=1, b=0, c=-2$ och $d=-4$. Insättning i Oglesbys formler ger

H=ac-b$^2 = -2-0=-2$, $G=a^2b-3abc+2b^3=a^2d=-4$

$x_1 = \frac{1}{a}(-b+\sqrt[3]{\frac{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-G-\sqrt{G^2+4H^3}}{2}}) = -2$

$x_2 = \frac{1}{a}(-b+\omega\sqrt[3]{\frac{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}{2}}+\omega^2\sqrt[3]{\frac{-G-\sqrt{G^2+4H^3}}{2}}) = 1-\sqrt{3}$

$x_3 = \frac{1}{a}(-b+\omega^2\sqrt[3]{\frac{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}{2}}+\omega\sqrt[3]{\frac{-G-\sqrt{G^2+4H^3}}{2}}) = 1+\sqrt{3}.$

4.8 Orrin Frinks metod

Mitt exempel $x^3-6x-4=0$, då är $p=-6$ och $q=-4$. Sätt in i De Orrin Frinks formler direkt och vi får

$R=\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}} = \sqrt{-4} = 2i.$

Vidare får vi

$x_1 = \sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}+\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{2i-\frac{-4}{2}}+\sqrt[3]{-2i-\frac{-4}{2}} = -2$

$x_2 = \omega\sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}+\omega^2\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}} = \omega\sqrt[3]{2i-\frac{-4}{2}}+\omega^2\sqrt[3]{-2i-\frac{-4}{2}} = 1-\sqrt{3}$

$x_3 = \omega^2\sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}+\omega\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}} = \omega^2\sqrt[3]{2i-\frac{-4}{2}}+\omega\sqrt[3]{-2i-\frac{-4}{2}} = 1+\sqrt{3}.$

4.9 Thomas J. Oslers metod

I $x^3-6x-4=0$, är $c=2$ och $d=2$. Insättning i Oslers formler ger oss tre rötter

$x_1 = \sqrt[3]{d+\sqrt{d^2-c^3}}+\sqrt[3]{d-\sqrt{d^2-c^3}} = \sqrt[3]{2+2i}+\sqrt[3]{2-2i} = i-1-i-1 = -2$

$x_2 = \omega\sqrt[3]{d+\sqrt{d^2-c^3}}+\omega^2\sqrt[3]{d-\sqrt{d^2-c^3}} = \omega\sqrt[3]{2+2i}+\omega^2\sqrt[3]{2-2i} = 1-\sqrt{3}$

$x_3 = \omega^2\sqrt[3]{d+\sqrt{d^2-c^3}}+\omega\sqrt[3]{d-\sqrt{d^2-c^3}} = \omega^2\sqrt[3]{2+2i}+\omega\sqrt[3]{2-2i} = 1+\sqrt{3}.$

5 Exempel på fjärdegradsekvations metoder

5.1 Ferraris metod

Jag löser följande ekvationen $x^4 - 51x^2 - 10x + 600 = 0$ då är $a = 0, b = -51, c = -10, d = 600$. Sätt i Ferraris formler och vi får

$$p = ac - \tfrac{b^2}{3} - 4d = 0 - \tfrac{51^2}{3} - 2400 = -867 - 2400 = -3267$$
$$q = \tfrac{abc}{3} - \tfrac{2b^3}{27} - a^2d + \tfrac{8bd}{3} - c^2 = 2 \cdot 17^3 - 8 \cdot 17 \cdot 600 - 100 = -71874.$$

Använd Cardanos formel

$$u = \sqrt[3]{\tfrac{-q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{35937 + \sqrt{35937^2 + \tfrac{(-3267)^3}{27}}} = \sqrt[3]{35937} = 33$$
$$v = \sqrt[3]{\tfrac{-q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{35937 - \sqrt{35937^2 + \tfrac{(-3267)^3}{27}}} = \sqrt[3]{35937} = 33$$

$y = u + v = 66$

$t = y + \tfrac{b}{3} = 66 - \tfrac{51}{3} = 66 - 17 = 49$

$\alpha^2 = \tfrac{a^2}{4} - b + t = 0 - (-51) + 49 = 51 + 49 = 100,$

vilket ger $\alpha = \pm 10,$

$\beta^2 = \tfrac{t^2}{4} - d = \tfrac{49^2}{4} - 600 = \tfrac{2401-2400}{4} = \tfrac{1}{4},$

och vidare $\beta = \pm\tfrac{1}{2},\ \alpha\beta = \tfrac{at}{4} - \tfrac{c}{2} = 0 - \tfrac{-10}{2} = 5.$

Ur detta får vi

$\alpha = 10, \beta = \tfrac{1}{2}$ och $\alpha = -10, \beta = -\tfrac{1}{2},$

då kan vi erhålla lösningarna genom att välja $\alpha = 10, \beta = \tfrac{1}{2}$ och

$$x_{1,2} = \frac{(\alpha - \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2} - \alpha)^2 - 4(\frac{t}{2} - \beta)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4(\frac{49}{2} - \frac{1}{2})}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2},$$

vilket innebär $x_1 = 6, x_2 = 4.$

$$x_{3,4} = \frac{(-\alpha - \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2} - \alpha)^2 - 4(\frac{t}{2} + \beta)}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(\frac{49}{2} + \frac{1}{2})}}{2} = \frac{-10}{2},$$

alltså $x_3 = -5, x_4 = -5.$

5.2 Descartes metod

I ekvationen $x^4 - 51x^2 - 10x + 600 = 0$ är $p = -51, q = -10, r = 600$. Descartes formler ger

$$\begin{aligned} k^6 + 2pk^4 + (p^2 - 4r)k^2 - q^2 &= 0 \\ k^6 + 2 * (-51)k^4 + (51^2 - 2400)k^2 - 100 &= 0 \\ k^6 - 102k^4 + 201k^2 - 100 &= 0. \end{aligned}$$

Sätt $z = k^2$ detta ger

$$z^3 - 102z^2 + 201z - 100 = 0.$$

Nu ska vi lösa ekvationen ovan med hjälp av Cardanos formler för z. I det fallet är

$$a = 1, b = -102, c = 201, d = -100.$$

Vi omvandlar ekvationen till $y^3 + p_1 y + q_1 = 0$ genom att ersätta $z = y - \frac{b}{3a} = y - \frac{-102}{3} = y + 34$ och
$p_1 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} = 201 - \frac{102^2}{3} = 201 - 3468 = -3267$
$q_1 = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = \frac{2\cdot(-102)^3}{27} - \frac{(-102)\cdot 201}{3} - 100 = -71874.$

Vi får en ekvation i y

$$y^3 - 3267y - 71874 = 0.$$

Använd Cardanos formel igen att lösa ekvationen ovan

$p_1 = -3276, q_1 = -71874$

$u^3 = \frac{-q_1}{2} \pm \sqrt{\frac{q_1^2}{4} + \frac{p_1^3}{27}} = 35937 \pm \sqrt{35937^2 - \frac{(-3267)^3}{27}} = 35937.$

På samma sätt får vi $v^3 = 35937$;

Då är $u_1 = 33, v_1 = 33$ och $u_2 = \omega 33, v_2 = \omega^2 33$ och $u_3 = \omega^2 33, v_3 = \omega 33$, vilket ger oss

$$y_1 = u_1 + v_1 = 66,\ y_2 = \omega 33 + \omega^2 33 = -33,\ y_3 = \omega^2 33 + \omega 33 = -33.$$

Vi har tidigare satt $z = y + 34$, vilket ger

$$z_1 = y_1 + 34 = 100,\ z_2 = y_2 + 34 = 1,\ z_3 = y_3 + 34 = 1.$$

Eftersom $k^2 = z$, får vi

$k_1 = 10, k_2 = -10, k_3 = 1, k_4 = -1, k_5 = 1, k_6 = -1.$

Vi väljer ett k värde, t.ex. $k = 1$. Detta medför

$p = -51, q = -10, r = 600;$

$t = \frac{k^3+pk-q}{2k} = \frac{1+(-51)-(-10)}{2} = \frac{1-51+10}{2} = -20$

$m = \frac{r}{t} = \frac{600}{-20} = -30.$

Nu kan vi beräkna fram våra rötter

$x_1 = \frac{-k+\sqrt{k^2-4t}}{2} - \frac{a}{4} = \frac{-1+\sqrt{1+80}}{2} - 0 = \frac{-1+9}{2} = 4$

$x_2 = \frac{-k-\sqrt{k^2-4t}}{2} - \frac{a}{4} = \frac{-1-\sqrt{1+80}}{2} - 0 = \frac{-1-9}{2} = -5$

$x_3 = \frac{k+\sqrt{k^2-4m}}{2} - \frac{a}{4} = \frac{1+\sqrt{1+120}}{2} - 0 = \frac{1+11}{2} = 6$

$x_4 = \frac{k-\sqrt{k^2-4m}}{2} - \frac{a}{4} = \frac{1-\sqrt{1+120}}{2} - 0 = \frac{1-11}{2} = -5.$

5.3 Eulers metod

Ur exemplet $x^4 - 51x^2 - 10x + 600 = 0$ får vi $p = -51, q = -10, n = 600$. Sätt in i Eulers formel. Då får vi

$$k = -\frac{p}{2} = \frac{51}{2},\ m = \frac{q^2}{64} = \frac{25}{16},\ l = \frac{p^2 - 4n}{16} = \frac{201}{16}.$$

Den nya ekvationen i y blir

$$y^3 - \frac{51}{2}y^2 + \frac{201}{16}y - \frac{25}{16} = 0.$$

Ekvationens rötter är r, s, t. Ur ekvationen ovan får vi $a = 1, b = -\frac{51}{2}, c = \frac{201}{16}, d = -\frac{25}{16}$. Lös ekvationen med Cardanos metod $y = m - \frac{b}{3a} = m + \frac{17}{2}$ och vi får

$p_1 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} = \frac{201}{16} - \frac{51^2}{12} = \frac{-3267}{16}$

$q_1 = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = \frac{2*(\frac{-51}{2})^3}{27} - \frac{(-\frac{-51}{2})*\frac{201}{16}}{3} - \frac{25}{16} = -\frac{4913}{4} + \frac{3417}{32} - \frac{25}{16} = -\frac{35937}{32}.$

Vi får en ekvation i m

$$m^3 - \frac{3267}{16}m - \frac{35937}{32} = 0.$$

Lös den med Cardanos metod

$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} + \sqrt{\frac{q_1^2}{4} + \frac{p_1^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{35937}{64} + \sqrt{\frac{35937^2}{4*32*32} - \frac{3267^3}{27*16^3}}} = \sqrt[3]{\frac{33^3}{4^3}} = \frac{33}{4}.$

På samma sätt kan vi beräkna $v_1 = \frac{33}{4}$. Vi får

$$m_1 = u_1 + v_1 = \frac{33}{2},\ m_2 = \omega u_1 + \omega^2 v_1 = -\frac{33}{4},\ m_3 = \omega^2 u_1 + \omega v_1 = -\frac{33}{4},$$

då har r, s, t värdena $\frac{33}{2}, -\frac{33}{4}, -\frac{33}{4}$. Detta ger oss

$$y_1 = m_1 + \frac{17}{2} = 25,\ y_2 = m_2 + \frac{17}{2} = \frac{1}{4},\ y_3 = m_3 + \frac{17}{2} = \frac{1}{4},$$

vilket ger

$$x_1 = \sqrt{r} + \sqrt{s} + \sqrt{t} = \sqrt{25} + \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}} = 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 6.$$

Då kan vi omskriva ekvationen

$$x^4 - 51x^2 - 10x + 600 = 0$$

till

$$(x-6)(x^3 + 6x^2 - 15x - 100) = 0.$$

Vi använder Cardanos metod igen för att lösa ekvationen

$$x^3 + 6x^2 - 15x - 100 = 0.$$

Mosvarande värden är $a_1 = 1, b_1 = 6, c_1 = -15, d_1 = -100$. Sätt $x = z - \frac{b_1}{3a_1} = z - 2$,

$p_2 = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1^2}{3a_1^2} = -15 - \frac{6^2}{3} = -15 - 12 = -27$

$q_2 = \frac{2b_1^3}{27a_1^3} - \frac{b_1 c_1}{3a_1^2} + \frac{d_1}{a_1} = \frac{2*6^3}{27} - \frac{6*(-15)}{3}) - 100 = 16 + 30 - 100 = -54.$

Vi får en ny ekvation i z

$$z^3 - 27z - 54 = 0.$$

Använd Cardanos metod igen

$\mathrm{u}_2 = \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} + \sqrt{\frac{q_2^2}{4} + \frac{p_2^3}{27}}} = \sqrt[3]{27 + \sqrt{27^2 - \frac{27^3}{27}}} = \sqrt[3]{27} = 3.$

På samma sätt får vi $v_2 = 3$

$$z_1 = u_2 + v_2 = 6,\ z_2 = \omega u_2 + \omega^2 v_2 = -3,\ z_3 = \omega^2 u_2 + \omega v_2 = -3.$$

Därmed har vi fyra rötter

$$x_2 = z_1 - 2 = 4, \quad x_3 = z_2 - 2 = -5, \quad x_4 = z_3 - 2 = -5.$$

5.4 Lagranges metod

Ekvationen $x^4 - 516x^2 - 10x + 600 = 0$ ger $a = 0, b = -51, c = -10, d = 100$. Sätt in dessa värden i Lagranges formler. Detta ger oss

$$\begin{aligned} A &= 3a^2 - 8b = 0 - 8 \cdot (-51) = 408 \\ B &= 3a^4 - 16a^2b + 16b^2 + 16ac - 64d = 0 - 0 + 16 \cdot (-51)^2 + 0 - 64 \cdot 600 = 3216 \\ C &= (a^3 - 4ab + 8c)^3 = (8c)^2 = 64 \cdot 100 = 6400. \end{aligned}$$

Den nya ekvationen i t är $t^3 - 408t^2 + 3216t - 6400 = 0$. Motsvarande värden är $a_1 = 1, b_1 = -408, c_1 = 3216, d = -6400$. Använd Cardanos metod för att lösa ekvationen

$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} = -52272$

$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = (-2) \cdot 136^3 + 136 \cdot 3216 - 6400 = -4599936.$

Den nya ekvationen i s blir $s^3 - 52272s - 4599936 = 0$. Använd åter Cardanos metod

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{2299968 + \sqrt{2299968^2 - \frac{52272^3}{27}}} = 132.$$

På samma sätt får vi $v_1 = 132$. Då är

$$s_1 = u_1 + v_1 = 264,\ s_2 = \omega u_1 + \omega^2 v_1 = -132,\ s_3 = \omega^2 u_1 + \omega v_1 = -132.$$

Därmed $t_1 = s_1 + 136 = 400$, $t_2 = s_2 + 136 = 4$, $t_3 = s_3 + 136 = 4$. Till slut får vi

$$\begin{aligned} e &= \frac{\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} - a}{4} = \frac{20 + 2 + 2 - 0}{4} = 6 \\ f &= \frac{\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3} - a}{4} = \frac{20 - 2 - 2 - 0}{4} = 4 \\ g &= \frac{-\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3} - a}{4} = \frac{-20 + 2 - 2 - 0}{4} = -5 \\ h &= \frac{-\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} - a}{4} = \frac{-20 - 2 + 2 - 0}{4} = -5. \end{aligned}$$

6 Jämförelse och resultat mellan de olika metoderna

6.1 För tredjegradsekvationer

Likheter hos metoderna för att lösa tredjegradsekvationer:
· Alla metoder använder substitutionsmetod i lösningsprocesserna;
· Alla metoder är baserade på att lösa kvadratiska ekvationer. I 2.12 Thomas J. Oslers metod verkar det inte så men han använder Cardanos formel för att lösa tredjegradsekvation vilket också innebär att man utnyttjar lösningsmetoden för en kvadratisk ekvation.
· Alla metoder ger samma resultat oberoende av i vilken ordning de olika delberäkningarna utförs.
· Metoder och formlerna för att lösa en tredjegradsekvation är mer komplexa än de för en kvadratisk ekvation.

Olikheter mellan metoderna för att lösa tredjegradsekvationer:
· Olika förutsättningar för att tillämpa olika metoder.
· Formler och metoder är också olika.
· Beräkningarnas svårighetsgrad skiljer sig mycket mellan de olika metoderna.
· Vissa metoder passar bättre vid vissa situationer än andra. T.ex. Metod 2.9 kan bara tillämpas då $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$; Metod 2.12 används helst då $3b = n$ och $3c = m$ och n, m är naturliga tal, annars blir beräkningarna mycket komplicerade.
Det är praktiskt att använda Cardanos metod med $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ för att bedöma vilka rötter ekvationen har. Utifrån detta kan man sedan välja lämplig lösningsmetod.

Tabell 1: Jämförelse mellan tredjegradsekvations lösningsmetoder för ekvations exempel $x^3 - 6x - 4 = 0$

Metod	Formler och steg	Förutsättning	Rötter	Användning av andragrads -ekvations lös -nings metod
1.Cardano $p = -6$ $q = -4$	(1) $u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ $v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ (2) $x_1 = u_1 + v_1$ $x_2 = \omega u_1 + \omega^2 v_1$ $\mathrm{x}_3 = \omega^2 u_1 + \omega v_1$	$x = u + v$ $uv = -\frac{p}{3}$ $u^3 + v^3 = -q$	$x_1 = -2$ $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ $x_3 = 1 + \sqrt{3}$	En gång
2.Viétes $p = -6$ $q = -4$	(1) $z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ (2) $x_1 = z_1 - \frac{p}{3z_1}$ $x_2 = \omega z_1 - \frac{p}{3\omega z_1}$ $x_3 = \omega^2 z_1 - \frac{p}{3\omega^2 z_1}$	$x = z - \frac{p}{3z}$	$x_1 = -2$ $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ $x_3 = 1 + \sqrt{3}$	En gång
3.Euler $p = -6$ $q = -4$	(1) $u_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ $v_1 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ (2) $x_1 = \sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{v_1}$ $x_2 = \omega \sqrt[3]{u_1} + \omega^2 \sqrt[3]{v_1}$ $x_3 = \omega^2 \sqrt[3]{u_1} + \omega \sqrt[3]{v_1}$	$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ $uv = -\frac{p^3}{27}$ $u + v = -q$	$x_1 = -2$ $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ $x_3 = 1 + \sqrt{3}$	En gång
4.Cayley $p = -6$ $q = -4$	(1) $u_1 = \sqrt[3]{\frac{3q}{2p} + \sqrt{\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{p}{3}}}$ $v_1 = \sqrt[3]{\frac{3q}{2p} - \sqrt{\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{p}{3}}}$ (2) $x_1 = u_1^2 v_1 + u_1 v_1^2$ $x_2 = \omega u_1^2 v_1 + \omega^2 u_1 v_1^2$ $x_3 = \omega^2 u_1^2 v_1 + \omega u_1 v_1^2$	$x = u^2 v + uv^2$ $u^3 v^3 = -\frac{p}{3}$ $u^3 + v^3 = \frac{3q}{p}$	$x_1 = -2$ $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ $x_3 = 1 + \sqrt{3}$	En gång

Metod	Formler och steg	Förutsättning	Rötter	Användning av andragrads -ekvations lös -nings metod
5.Lagrange $b=0$ $c=-6$ $d=-4$	(1)$e+f+g=-b$ $ef+eg+fg=c$ $efg=-d$ (2) $z_1=-\frac{2b^3-9bc+27d}{2}$ $+\sqrt{(\frac{2b^3-9bc+27d}{2})^2-(b-3c)^3}$ $z_2=-\frac{2b^3-9bc+27d}{2}$ $-\sqrt{(\frac{2b^3-9bc+27d}{2})^2-(b-3c)^3}$ (3) $e=\frac{-b+\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}}{3}$ $f=\frac{-b+\omega^2\sqrt[3]{z_1}+\omega\sqrt[3]{z_2}}{3}$ $g=\frac{-b+\omega\sqrt[3]{z_1}+\omega^2\sqrt[3]{z_2}}{3}$	Ekvationen har tre rötter: e,f,g; Sätt: $r=e+\omega f$ $+\omega^2 g$ $s=e+\omega^2 f$ $+\omega g$ $f(y)=(y-r)$ $(y-\omega r)$ $(y-\omega^2 r)$ $(y-s)$ $(y-\omega s)$ $(y-\omega^2 s)$ $=(y^3-r^3)$ $(y^3-s^3)=0$	$x_1=-2$ $x_2=1-\sqrt{3}$ $x_3=1+\sqrt{3}$	En gång
6.De Moivre $p=-6$ $q=-4$	(1) $r=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$ (2)$\theta=\arccos((\frac{-q}{2})(\sqrt{\frac{-27}{p^3}}))$ $=\arccos(\frac{-q}{2r})$ (3) $x_1=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\theta}{3})=2\sqrt[3]{r}\cos(\frac{\theta}{3})$ $x_2=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})$ $=2\sqrt[3]{r}\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})$ $x_3=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3})$ $=2\sqrt[3]{r}\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3})$	$D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ <0 därmed: $\|D\|=\|\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\|$ $=-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}$ >0 $r\cos\theta=-\frac{q}{2}$ $r\sin\theta$ $=\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}$	$x_1\approx 2,732$ $x_2=-2$ $x_3\approx -0,732$ $1+\sqrt{3}\approx 2,7321$ $1-\sqrt{3}\approx -0,732$ Därmed: $x_1=1+\sqrt{3}$ $x_2=-2$ $x_3=1-\sqrt{3}$	En gång
7.E.J. Oglesby $a=1$ $b=0$ $c=-2$ $d=-4$	(1) $H=ac-b^2$ $G=a^2d-3abc+2b^3$ (2) $x_1=\frac{1}{a}(-b+\frac{\sqrt[3]{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}}{2}$ $+\frac{\sqrt[3]{-G-\sqrt{G^2+4H^3}}}{2})$ $x_2=\frac{1}{a}(-b+\omega\frac{\sqrt[3]{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}}{2}$ $+\omega^2\frac{\sqrt[3]{-G-\sqrt{G^2+4H^3}}}{2})$ $x_3=\frac{1}{a}(-b+\omega^2\frac{\sqrt[3]{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}}{2}$ $+\omega\frac{\sqrt[3]{-G-\sqrt{G^2+4H^3}}}{2})$	$x_1+x_2+x_3$ $=-\frac{3b}{a}$ $x_1x_2+x_2x_3$ $+x_1x_3=\frac{3c}{a}$ $x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$	$x_1=-2$ $x_2=1-\sqrt{3}$ $x_3=1+\sqrt{3}$	En gång

Metod	Formler och steg	Förutsättning	Rötter	Användning av andragrads -ekvations lös -nings metod
8.Orrin Frink, JR.,Brook -lyn $p=-6$ $q=-4$	(1) $R=\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ (2)$x_1=\sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}+\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}}$ $x_2=\omega\sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}+\omega^2\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}}$ $x_3=\omega^2\sqrt[3]{R-\frac{q}{2}}+\omega\sqrt[3]{-R-\frac{q}{2}}$	$y^2=\frac{x^2}{4}+\frac{p}{3}$ $R=\frac{3x^2y}{4}+y^3$	$x_1=-2$ $x_2=1-\sqrt{3}$ $x_3=1+\sqrt{3}$	En gång
9.Thomsa J. Osler $c=2$ $d=2$	(1) $b=d^2-c^3$ (2)$x_1=\sqrt[3]{d+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{d-\sqrt{b}}$ $x_2=\omega\sqrt[3]{d+\sqrt{b}}+\omega^2\sqrt[3]{d-\sqrt{b}}$ $x_3=\omega^2\sqrt[3]{d+\sqrt{b}}+\omega\sqrt[3]{d-\sqrt{b}}$	$b=d^2-c^3$	$x_1=-2$ $x_2=1-\sqrt{3}$ $x_3=1+\sqrt{3}$	En gång

6.2 För fjärdegradsekvationer

Likheter hos metoderna för att lösa fjärdegradsekvationer:
· Alla metoder använder substitutionsmetod i lösningsprocesserna.
· Alla metoder är baserade på att lösa tredjegradsekvationer.
· Alla metoder ger samma resultat oberoende av i vilken ordning de olika delberäkningarna utförs.
· Metoderna och formlerna för att lösa en fjärdegradsekvation är mycket mer komplexa än de för tredjegradsekvationer.

Olikheter mellan metoderna för att lösa fjärdegradsekvationer:
· Olika förutsättningar för att tillämpa olika metoder.
· Formler och processer är också olika.
· Beräkningarnas svårightesgrad skiljer sig mycket mellan de olika metoderna.

Det är svårt att säga vilken metod som är bäst. Det bästa är att välja en av metoderna som verkar förståelig och utveckla sin färdighet genom att flitigt tillämpa metoden vid ekvationslösning.

Tabell 2: Jämförelse mellan fjärdegradsekvations lösningsmetoder för ekvations exempel $x^4 - 516x^2 - 10x + 600 = 0$

Metod	Formler och steg	Förutsättning	Rötter	Användning av tredjegrads -ekvations lös -nings metod
1.Ferrari $a = 0$ $b = -51$ $c = -10$ $b = 600$	(1) $p = ac - \frac{b^2}{3} - 4d$ $q = \frac{abc}{3} - \frac{2b^3}{27} - a^2d + \frac{8bd}{3} - c^2$ (2) $u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ $v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ (3) $\alpha = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + t}$ $\beta = \sqrt{\frac{t^2}{4} - d}$ $\alpha\beta = \frac{at}{4} - \frac{c}{2}$ (3) $x_{1,2} = \frac{\alpha - \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2} - \alpha)^2 - 4(\frac{t}{2} - \beta)}}{2}$ $x_{3,4} = \frac{-\alpha - \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2} + \alpha)^2 - 4(\frac{t}{2} + \beta)}}{2}$	$-t^3 + bt^2$ $-(ac - 4d)t$ $-4bd + a^2d$ $+c^2 = 0$ $y = u + v$ $t = y + \frac{b}{3}$ $uv = -\frac{p}{3}$	$x_1 = 6$ $x_2 = 4$ $x_3 = -5$ $x_4 = -5$	En gång
2. Descarte $p = -51$ $q = -10$ $r = 600$	(1)Ekvationen av k är : $k^6 + 2pk^4 + (p^2 - 4r)k^2 - q^2 = 0$ (2)Ekvationen av z är : $z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0$ $v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ (3)Välja ett värde av : $k = \sqrt{z}$ $t = \frac{k^3 + pk - q}{2k}$ $m = \frac{r}{t}$ $tm = r$ (4) $x_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4t}}{2}$ $x_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4t}}{2}$ $x_3 = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4m}}{2}$ $x_4 = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4m}}{2}$	$z = k^2$ $t = \frac{k^3 + pk - q}{2k}$ $m = \frac{r}{t}$ $tm = r$	$x_1 = 4$ $x_2 = -5$ $x_3 = 6$ $x_4 = -5$	En gång

Metod	Formler och steg	Förutsättning	Rötter	Användning av tredjegrads -ekvations lös -nings metod
3.Euler $p = -51$ $q = -10$ $n = 600$	(1) $k = -\frac{p}{2}$ $m = \frac{q^2}{64}$ $l = \frac{p^2-4n}{16}$ (2)Ekvationen av y är : $y^3 - ky + ly - m = 0$ Vi får :$y_1 = r, y_2 = s, y_3 = t$ (3) $x_1 = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$ $= \sqrt{r} + \sqrt{s} + \sqrt{t}$ (4)Omskriv ursprunglig ekvationen till: $(x - x_1)(x^3 + fx^2 + gx + h) = 0$ (5)Använd Cardanos metod igen för att lösa x i : $x^3 + fx^2 + gx + h = 0$	$x = \sqrt{r}$ $+\sqrt{s} + \sqrt{t}$	$x_1 = 6$ $x_2 = 4$ $x_3 = -5$ $x_4 = -5$	Två gånger
4.Lagrange $a = 0$ $b = -51$ $c = -10$ $d = 600$	(1) $A = 3a^2 - 8b$ $B = 3a^4 - 16a^2b + 16b^2 + 16ac$ $-64d$ $C = (a^3 - 4ab + 8c)^2$ (2)Hjälpekvationen av t är: $t^3 - At^2 + Bt - C = 0$ (3) $e = x_1 = \frac{\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}}{4}$ $f = x_2 = \frac{\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}}{4}$ $g = x_3 = \frac{-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}}{4}$ $h = x_4 = \frac{-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}}{4}$	Anta att ekvationen har fyra rötter: $e, f, g, h;$	$x_1 = 6$ $x_2 = 4$ $x_3 = -5$ $x_4 = -5$	En gång

7 Avslutning

Det finns också många andra algebraiska lösningsmetoder för tredje- och fjärdegradsekvationer som jag inte har visat i uppsatsen. Här jämför vi bara några utvalda algebraiska lösningsmetoder för tredje- och fjärdegradsekvationer. Det finns geometriska lösningsmetoder också. En av de mest kända metoderna är Mardens sats. Kalman har sagt i sin text:"I call Mardens Theorem one of my favorite results in mathematics. It establishes a fantastic relation between the geometry of plane figures and the relative positions of roots of a polynomial and its derivative."[7] Kunskapsutveckling är obegränsad. Det finns mycket utrymme för ny forskning.

8 Referenser

[1] Dan Kalman (2009). Polynomials and related realms, The mathematical Association of America, 71-79 och 84-86.

[2] Fu Zhong Peng (1987). Händelser om tredjegradsekvation, Xin Lei Press, Kina, 92-98.

[3] E . J . Oglesby (1923). Note on the algebraic solution of the cubic, American Mathematical Monthly, vol. 30, no. 6(1923), 321-323.

[4] Orrin Frink, Jr (1925). A method for solving the cubic, American Mathematical Monthly, vol. 32, no. 3(1925), 134.

[5] Thomas J. Osler (2001). Cardan polynomials and the reduction of radicals, Mathematics Magazine, vol. 74, no. 1 (2001), 26-32.

[6] Feng Cheng Tian (2012). Från förstagradsekvation till Galois teorier, East China Normal University Press, 31-25.

[7] Dan Kalman (2008). An Elementary Proof of Marden‘s Theorem, The mathematical Association of America, 330.

9 Bilaga: kinesiska referenser för refrerenser 8.2 och 8.6

Kinesiska referenser :

1. 傅钟鹏（1987），《三次方程风云记》，新蕾出版社。(Motsvarande översättningen till ”Referenser 8.2”)
2. 冯承天（2012），《从一元一次方程到伽罗瓦理论》，华东师范大学出版社 SN6503。(Motsvarande översättningen till ”Referenser 8.6”)