SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

2000 år av parallella linjer. En överblick av parallellpostulatets historia.

av

Christoffer Andersson

2019 - No K5

2000 år av parallella linjer. En överblick av parallellpostulatets historia.

Christoffer Andersson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2019

2000 år av parallella linjer

En överblick av parallellpostulatets historia

Christoffer Andersson

Sammanfattning

In 300 B.C. Euclid defines his five mathematical axioms for geometry, called *postulates*, in his work the Elements. Quickly after the release of the Elements, mathematicians in the Ancient Mediterranean start to speculate whether the fifth postulate, known as the *Parallel Postulate*, is a theorem derivable from the other four postulates. For the following 2000 years, mathematicians from across the world attempts to prove this without success. With the discovery of hyperbolic geometry, mathematicians eventually realize that the parallel postulate is a postulate for one of many different geometries. The aim of this paper is to give a brief summary of the history of parallel postulate, the different works done and attempts to prove it as a theorem up until the discovery of hyperbolic geometry.

Innehåll

1 Introduktion

Kring år 300 f.Kr. författar matematikern Euklides den matematiska sammanställningen *Elementa*. Det 13 kapitel långa verket är en samling av matematisk kunskap där grunden för den då kända matematiken presenteras. Verket blev en mycket framgångsrik sammanställning och lärobok för kommande matematiker.

En anledning till att Elementa blev så framgångsrik var dess användning av vad Hartshorne [8. s.2] benämner som den *axiomatiska metoden* där *axiomen*, de grundläggande förutsättningarna, presenteras först och sedan byggs den matematiska modellen upp från dessa. Greenberg [7. 198] och Tambour [14, s.67-71] påpekar att Euklides var först med att göra denna uppställning för matematiken.

Elementa börjar således med ett antal definitioner och axiom vilka sedan används för att bevisa den stora mängden satser som verket innehåller. I detta arbete är det dock de fem geometriska axiomen, kallade *postulat*, som är av störst intresse. Postulaten presenteras i Johanssons [9. .80-89] svenska översättning:

1. ”Låt följande krävas: Att dra en rät linje från varje punkt till varje punkt”
2. ”och att fortsätta en ändlig rät linje kontinuerligt i en rät linje”
3. ”och att med varje centrum och avstånd kan en cirkel beskrivas”
4. ”och att alla räta vinklar är lika”
5. ”och att, om en rät linje faller över två räta linjer och gör de inre vinklarna på samma sida mindre än två räta vinklar, så möts de två räta linjerna, om de förlängs obegränsat, på den sida på vilken vinklarna är mindre än de två räta.”.

Med orden ”Låt följande krävas” menade Euklides att dessa fem punkter först måste antas gälla. Utifrån de antagna förutsättningarna bygger sedan Euklides upp sin geometri genom olika satser. Alltså bör vi se postulaten som fem geometriska axiom vilka måste antas för att konstruera Euklides geometri.

Få saker inom matematiken har skapat konflikt under så lång tid som Euklides femte postulat. Dess långa och komplicerade formulering i jämförelse med de resterande postulaten särskiljer det från de andra. Dessutom tycks Euklides själv dra sig från att använda postulatet, så långt det är möjligt, i bevisen av satserna i Elementa. Enligt Rosenfeld [13, s.36] kan detta tolkas som en osäkerhet hos Euklides själv kring postulatet.

Detta förhållande till det femte postulatet gav upphov till en diskussion om huruvida postulatet egentligen är en sats vilken kan bevisas med de resterande fyra. I och med den axiomatiska metoden fanns en vilja att ge det minsta antal axiom och postulat vilka krävdes för att bygga upp matematiken. Flera tidigare axiom hade visat sig vara satser som kunde visas ur andra satser och axiom. Bland annat därför misstänktes parallellpostulatet länge vara en sats då det inte sågs lika självklart som de andra postulaten. Diskussionen kring postulatet tog snabbt fart och skulle visa sig återkomma ett flertal gånger på flera platser i världen tack vare Elementas spridning. Den avslutades först på 1800-talet med upptäckten av icke-euklidisk geometri.

Även om problemet är löst idag så finns fortfarande motiv för en tillbakablick till de äldre bevisförsöken. Dels ger de insikt i matematikens framsteg genom historien och hur matematiskt tänkande förändrats genom århundradena. Dels visar det också på matematikens spridning då postulatet behandlats av matematiker på många olika platser i världen.

Uppsatsens ambition är att kortfattat sammanställa parallellpostulatets historia genom att kronologiskt presentera några olika arbeten och bevisförsök kring postulatet som gjorts genom århundradena. Arbetets tidsram börjar med Euklides presentation av postulaten i Elementa och avslutas med grundandet av icke-euklidisk geometri.

I och med uppsatsens begränsade omfattning kommer inte alla arbeten kring postulatet presenteras. Istället begränsar sig sammanställningen till de mer kända och tongivande arbetena. Dock kommer de arbeten vilka inte behandlas i texten att listas i appendixet för intresserade läsare, med reservation för eventuella missade arbeten och bevisförsök.

I postulaten finns implicita antaganden vilka först syns i de senare bevisen i Elementa. Bland annat, berättar Coxeter [3, s.2], ingår i det första postulatet att det är en och endast en rät linje vilken kan dras mellan två punkter. Detta syns även tydligt i de tidiga bevisförsöken och läggs därför nu till för att förtydliga kommande delar i texten.

Postulaten används fortfarande idag för det vi kallar *euklidisk geometri.* Dock är de numera mer strikt definierade. Detta gäller även för de olika definitionerna t.ex. för punkt, sträcka och linje, vilket nämns av Coexter [3, s.2]. Tambour [14, s.67-71] påpekar likt många tidigare matematiker att Elementa har en del luckor i sina resonemang och inte är helt logiskt sammanhängande. För att lösa detta har definitionerna och postulaten omdefinierats på senare tid för att undvika logiska felaktigheter och så att de tidigare antagandena istället är definierade och inkluderade i texten. Ett exempel på detta är Hilberts axiom vilka inkluderats i appendixet för intresserade läsare.

I min framställning kommer jag presentera bevisen med dagens definitioner i åtanke. Dock kan det ibland leda till skillnader mellan de definitioner jag använder och de som användes ursprungligen. Vid diskrepans mellan dåtida och nutida definitioner kommer detta poängteras.

Ett begrepp som blivit nära besläktat med parallellpostulatet är just *parallellitet*. Även om begreppets grundidé är enkel så blir det problematiskt när vi undersöker de olika definitioner som finns, något som kommer bli tydligt i senare stycken. Därför kommer texten utgå från följande definition av parallellitet:

Definition: Två linjer i samma plan vilka inte skär varandra kallas *parallella*.

I senare delar, där arbeten presenteras vilka utgår från en annan definition av parallellitet, kommer detta redogöras för innan.

Även om parallellpostulatet är ett axiom för euklidisk geometri så kommer senare stycken att benämna *sfärisk geometri* och *hyperbolisk geometri*. Dessa är två andra geometrier vilka skiljer sig från den euklidiska. Den hyperboliska geometrin är den närmast besläktade. Denna utgår från att det finns oändligt antal parallella linjer. Den sfäriska geometrin är ett fall av *elliptisk geometri* och utgår istället från att det inte finns några räta parallella linjer, tillsammans med några andra ändringar i Euklides postulat för att bli hållbar. Denna är dock lättare att visualisera då sfärisk geometri kan ses som geometrin för ytan på ett klot. Dessa kommer användas som exempel ibland för att visa på felaktigheter i vissa matematikers antaganden eller resonemang i senare stycken. Hyperbolisk geometri kommer även behandlas närmare mot slutet av texten då dess upptäckt haft stor påverkan för parallellpostulatet.

I allt historisk arbete finns alltid en målsättning att utgå från orginalkällorna, eller andra källkritiskt nära källor, i så stor utrsträckning som möjligt. I detta fall är det dock en omöjlighet, givet arbetets knappa tidsomfattning. Inte bara är spänner arbetet över flera olika källtexter, utan de är dessutom på flera olika språk. Därför har jag ofta utgått från pålitliga sammanställningar och översättningar utifrån andra böcker och texter. Då de olika arbetena från de olika tidsperioderna är välkända och hanterade av flera nutida matematiker och historiker så bedöms det säkert att utgå från dem ur ett källkritiskt perspektiv. Dock är det viktigt att notera, ur ett historievetenskapligt perspektiv, att texten ofta saknar en direkt koppling till originalkällorna.

2 Antikens Grekland och Egypten

Det tog inte lång tid efter Elementas sammanställning innan diskussionen kring postulaten startade. Redan i antikens Grekland och Egypten fanns matematiker vilka hävdade att det femte postulatet var en sats grundad på de andra postulaten. Många av dem kom med egna förslag och bevisförsök i hopp om att visa detta.

Postulatet visade sig dock svårt att bevisa som sats. Till postulatet finns en uppsjö av ekvivalenta påståenden. I de flesta bevisförsöken råkade matematikerna omedvetet använda något av dessa ekvivalenta påståenden, vilket betyder att de använde postulatet i sitt försök att bevisa det.

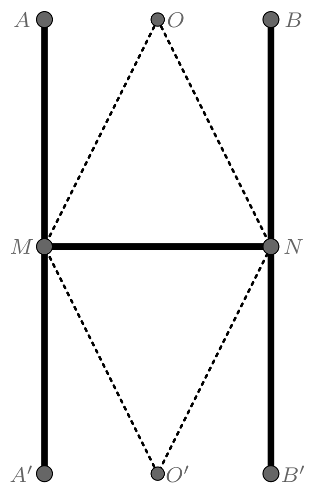
Vi kommer här gå igenom två mer kända bevisförsök av Ptolemaios och Proklos. Båda är exempel problematiken med antaganden inom matematik och hur de ekvivalenta påståendena enkelt smyger sig in i bevisföringen.

2.1 Ptolemaios bevisförsök

Det första försöket att bevisa satsen som presenteras närmare är av Ptolemaios (100-talet e.kr) från Alexandria enligt Johansson [9. s.89]. Det är ett av de mer kända tidiga försöken att faktiskt bevisa postulatet. Bevisförsöket består av två delar vilka implicerar varandra. Först vill Ptolemaios visa att om de mellanliggande vinklarna är lika med två räta så skär linjerna inte varandra. Därefter försöker han visa att om linjerna är parallella så måste de mellanliggande vinklarna vara lika med två räta. Den första delen bevisar således postulatet medan den andra bevisar att parallella linjer innebär räta mellanliggande vinklar.

Påstående: Låt AA' och BB' vara två räta linjer. Låt MN vara en transversal från AA' till BB' sådan att de inre vinklarna AMN och BNM tillsammans är lika stora som två räta vinklar.

Då gäller att AA' och BB' är parallella.



Bevis: Vinklarna AMN och MNB' är lika, vilket fås genom att undersöka supplementvinklarna. Anta sedan att linjerna MA och NB möts i en punkt O, vilket vidare ger en triangel MON.

Men eftersom vinklarna är lika på båda sidor av linjen MN så möts även linjerna MA' och NB' i en punkt O', vilket bildar en triangel $NO'M$. Genom kongruensfallet *vinkel-sida-vinkel* ser vi vidare att trianglarna är kongruenta.

Det betyder dock att de räta linjerna AA' och BB' skär varandra i två punkter, vilket ger en motsägelse då endast en rät linje kan dras mellan två punkter enligt Euklides första postulat. Således ser vi att linjerna AA' och BB' måste vara parallella.

Påstående: Låt AA' och BB' vara två parallella linjer. Låt MN vara en transversal från AA' till BB'.

Då gäller att vinklarna AMN och BNM tillsammans är lika stora som två räta vinklar.

Bevis: Antag att vinklarna AMN och BNM tillsammans inte är lika stora som två räta vinklar. Då kan de antingen tillsammans vara större eller mindre än två räta.

Antar vi att vinklarna är större så innebär det även att vinkarna $A'MN$ och $B'NM$ är större eller lika med två räta vinklar tillsammans, eftersom linjerna är parallella även på den sidan. Detta leder dock vidare till en motsägelse då det skulle innebära att alla fyra vinklar tillsammans skulle vara större än fyra räta vinklar, vilket vidare ger att vinklarna utmed en linje är större än två räta.

Samma resonemang kan användas för att lösa fallet då de mellanliggande vinklarna är mindre än två räta.

Kommentarer: Problemet med Ptolemaios resonemang är att han indirekt antar att det finns en och endast en parallell linje till linjen BB' genom punkten M. Frankland [5. s.7] påpekar att i det första beviset blir detta tydligt ifall vi undersöker samma fall fast på ett klots yta, alltså i *sfärisk geometri* där det inte finns några parallella linjer. I det fallet kan punkterna O och O' vara samma punkt, vilket skulle innebära att resonemanget med två kongruenta trianglar håller utan att vi får flera linjer mellan O och O'.

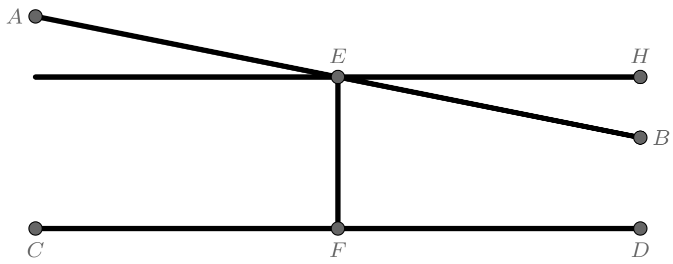
I det andra beviset ser vi problemet ifall vi utgår från möjligheten av flera parallella linjer, alltså *hyperbolisk geometri*. Där kan det konstrueras parallella linjer vilka inte uppfyller att vinklarna är lika på samma sida av linjen MN vid punkterna M respektive N. Detta fall kommer behandlas vidare i del 5.1.

Antagandet om endast en parallell linje till en annan genom en given punkt är ekvivalent med parallellpostulatet och är idag en omskrivning känd som *Playfairs axiom*. Playfairs axiom säger att givet en linje AB och en punkt C utanför linjen kan som mest en linje dras genom C vilken är parallell med AB. Playfairs axiom kommer vi tillbaka till igen senare.

2.2 Proklos bevisförsök

Ptolemaios bevisförsök är idag känt bland annat genom Proklos (ca. 410-485 f.Kr.) kommentarer till Elementa. Enligt Johansson [9, s.89-90] kritiserade Proklos Euklides i sina kommentarer för att inkludera parallellpostulatet som just ett postulat. Proklos hävdade att det är en sats och lämnade ett eget bevisförsök.

Bevis: Låt AB och CD vara två räta linjer. Låt EF vara transversalen från AB till CD sådan att summan av vinklarna BEF och EFD tillsammans är mindre än två räta vinklar. Från punkten E, dra en ny linje EH vilken är parallel mot linjen CD.



Ju längre avståndet är från punkten E i riktning mot punkten H, desto större blir avståndet mellan linjerna EB och EH. Med ett tillräckligt stort avstånd från punkten E kommer avståndet mellan linjerna EB och EH vara större än avståndet mellan CD och EH. Vidare innebär detta att EB någon gång måste skära CD. Då EB är en del av AB så skär AB alltså CD, vilket skulle bevisas.

Kommentarer: Proklus gör antagandet att avståndet mellan linjer i samma plan vilka inte skär varandra är konstant. Detta antagande är dock ekvivalent med parallellpostulatet och således använder Proklus postulatet självt i sitt bevis. Dock fås följande omskrivning av postulatet: Om en linje skär en av två parallella linjer så skär den även den andra parallella linjen.

En uppmärksam läsare noterar en koppling till Playfairs axiom från tidigare del. Det är Proklos bevisförsök som lägger grunden för Playfairs omskrivning av postulatet. Playfair [12, s.289-293] nämner själv Proklos i noteringarna till omskrivningen av postulatet.

3 Medeltida mellanöstern

Antika Grekland och Egypten tappade så småningom sin status som matematikernas huvudcentrum. Under 600-talet gör Islam sitt intåg tillsammans med det islamska riket i mellanöstern. Efter en lång tid av expansion börjar riket intressera sig för vetenskap, speciellt matematik. De gamla texterna från antiken översätts och förs till Baghdad som tog över Alexandrias roll som matematikens centrum. Bland de gamla verken har vi Elementa, vilket blev ett centralt verk även bland mellanösterns matematiker. I och med Elementas spridning följer även geometrin och postulaten med.

Även om den arabiska matematiken är väl känd för sina bidrag till bland annat algebran så arbetade de mycket med geometri, framför allt med bevisförsök till det femte postulatet. Ett flertal försök från diverse framgångsrika matematiker finns bevarade och att behandla dem alla rättvist och fullständigt är omöjligt givet arbetets omfattning. Därför har jag begränsat mig till de tre mer kända och tongivande försöken av al-Haytham, al-Khayyam och al-Tusi.

3.1 Al-Haythams bevisförsök

Abu'Ali al-Hasan ibn Al-Haytham (965-1041) var en framgångsrik matematiker vilken främst är känd för sitt arbete inom optik. Trots att han föddes i Basra (idag Irak) så var han främst verksam i Egypten berättar Katz [10. s.240]. Dock var han även intresserad av geometri och lämnade ett bevisförsök till parallellpostulatet. Hans bevisförsök skiljer sig från de tidigare, framför allt då det använder rörelse för att beskriva och bevisa hans resonemang. Ett bra exempel är hans definition av parallella linjer vilken presenteras utifrån Rosenfelds [13, s.60] översättning. Definitionen behövs senare för att förstå al-Haythams bevisförsök.

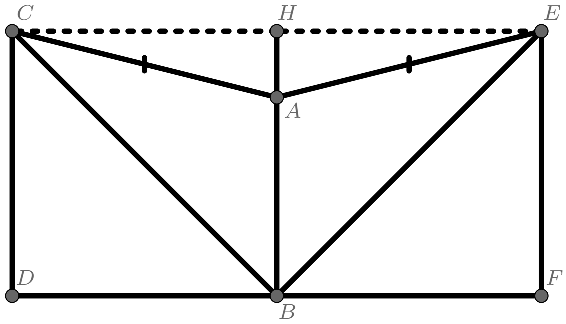
Definition: Om en rät linje A rör sig så att en ände alltid ligger utmed en annan linje B och om linje A alltid är rät mot linje B så kommer den andra änden av linje A att spåra en linje C parallell till linje B.

Rörelsebegreppet i al-Haythams geometri är intuitivt grundat och hans införande av rörelse ledde till kritik av beviset, bland annat av al-Khayyam som gav upphov till nästa bevis, enligt Katz [10, s.248-249]. Det kan vi själva även inse när vi betraktar hans bevis för postulatet.

Påstående: Låt AB vara en linje dragen från punkten A till B. Dra sedan linjerna AC och BD så att vinklarna CAB och DBA är räta. Dra därefter linjen CD från en punkt C så att CD blir vinkelrät mot BD.

Då gäller att CD har samma längd som AB.

Bevis: Utgå från fyrhörningen $ABDC$ från stycket ovan. Antag att linjerna AB och CD inte är lika. Då är linjen AB antingen större eller mindre än CD. Vi utgår från att $AB < CD$.



Förläng linjen CA i riktning mot punkten A till en punkt E så att $AC = AE$[1]. Förläng även linjen DB till en punkt F sådan att linjen EF kan dras vinkelrät med linjen BF. Dra sedan linjerna CB och BE.

Vi undersöker nu trianglarna CAB och EAB. Dels noterar vi att $AC = AE$ enligt tidigare premiss. Vi noterar även att trianglarna delar sidan AB. Till sist ser vi även att vinklarna CAB och EAB är lika (då de båda är räta vinklar). Vidare innebär detta att trianglarna CAB och EAB är kongruenta enligt kongruensfallet *sida-vinkel-sida*.

Vidare fås dels att linjen $CB = EB$, men även att vinkeln $CBA = EBA$. Från detta fås att vinkeln $CBD = EBF$ eftersom de tillsammans med motsvarande tidigare nämna vinklar bildar en rät vinkel vardera. Samma resonemang används för att få fram att vinkeln $DCB = FEB$. Utifrån kongruensfallet *vinkel-sida-vinkel* fås att trianglarna CDB och EFB är kongruenta. Från detta får vi att linjen $CD = EF$.

Då $AB < CD$ enligt tidigare antagande så gäller även att $AB < EF$. Låt linjen EF röra sig utmed linje FB mot punkten B samtidigt som den fortsätter vara rät mot linjen BF. Om då linjen EF rör sig så långt att punkterna B och F sammanfaller kommer linjerna BA och EF delvis sammanfalla. Då $BA < EF$ så kommer en del av linjen EF fortsätta ovanför punkten A till en ny punkt H med följden att linjen $EF = BH$.

Om nu linjen BH rör sig på samma sätt som EF utmed linjen BD mot punkten D tills dess att punkten D sammanfaller med punkten B kommer linjerna BH och DC att sammanfalla då $DC = EF = BH$.

[1]Notera att linjen genom C, A och E ritas bruten för att göra resonemanget klarare.

I och med den givna definitionen för parallella linjer ser vi att om vi drar linjen EHC så kommer den vara parallell med linjen FBD. Dock är även EAC parallell med FBD enligt premiss, vilket ger en motsägelse då vi får två räta linjer mellan två punkter vilka inte delar alla inre punkter. Alltså kan inte linjen $AB < CD$.

Fallet $AB > CD$ bevisas med samma resnomenang och leder till en liknande motsägelse.

Kommentarer: Först vill jag notera att det finns fortsättningar av beviset i andra scenarion. Dock har jag valt att exkludera dem då de bygger på samma princip kring rörelse.

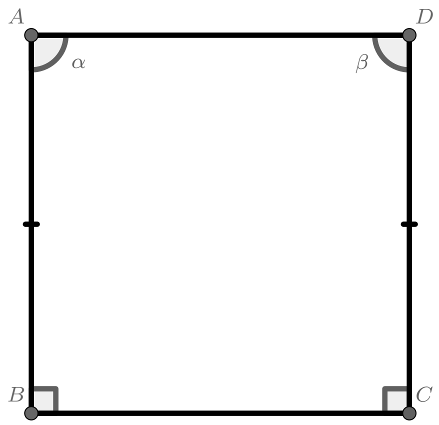
Det huvudsakliga problemet med al-Haythams bevis är antagandet av rektangelns existens så som en fyrhörning där alla vinklar är räta. Detta gäller endast i euklidisk gemometri.

Katz [10, s.249] poängterar att eftersom beviset bygger på att rektangeln $ABDC$ existerar så faller beviset redan där. Rektangeln blir dock en central figur för kommande bevisförsök av satsen, vilket vi ser redan i nästa bevisförsök.

3.2 Al-Khayyams bevisförsök

Omar al-Khayyam (1048-1131) var en matematiker från Iran vars bidrag till arbetet kring parallellpostulatet kom att inspirera många av de kommande arbetena. Med introduktionen av det vi idag kallar *Saccheris fyrhörning* ger al-Khayyam en ny effektiv vinkel att angripa problemet från.

Den saccheriska fyrhörningen är en fyrhörning med tre möjliga former. Fyrhörningens bas har räta vinklar medan dess topp har vinklar vilka antingen är spetsiga, räta eller trubbiga. När fyrhörningen först togs fram var målet att bevisa att endast fallet då vinklarna är räta var möjliga, vilket vidare kan användas för att bevisa parallellpostulatet. Detta är en metod vi kommer se vidare av i några av de kommande bevisförsöken. Idag vet vi dock att fallet med spetsiga toppvinklar gäller i hyperbolisk geometri och fallet med trubbiga i bland annat sfärisk geometri. Den saccheriska fyrhörningen är döpt efter den italienska matematikerna Girolamo Saccheri som använde fyrhörningen i sina matematiska bevis. Saccheri kommer behandlas vidare senare i texten.



$\alpha = \beta > 90°$

$\alpha = \beta = 90°$

$\alpha = \beta < 90°$

På grund av detta kräver beviset en längre förklaring än de tidigare och kommer därför presenteras i tre olika delar för att göra det mer överskådligt.

3.2.1 Aristoteles fem principer

Innan vi går in på al-Khayyams bevis måste vi göra en snabb tillbakablick till antikens Grekland. En stor inspirationskälla till al-Khayyam var Aristoteles. Dels syns detta i kritiken av al-Haythams bevis, där han likt Aristoteles motsätter sig användandet av rörelse. Men det syns också i hans eget bevisförsök vilket utgår från de fem principer han lånar från Aristoteles.

Al-Khayyams bevisförsök har flera kreativa steg. Det första är att inte försöka bevisa postulatet direkt, utan att byta ut det mot Aristoteles principer, främst den tredje och fjärde. Denna metod används även av i senare bevisförsök. Principerna presenteras nedan översatta till svenska utifrån Rosenfelds [13, 38-39] översättning. Rosenfelds översättning till engelska finns även i appendixet.

1. Mängder är oändligt delbara.
2. En rät sträcka kan förlängas oändligt.
3. Två räta linjer vilka skär varandra avviker från varandra efter skärningspunkten i den grad de rör sig från varandra från skärningspunktens vinkel.
4. Två linjer vilka går mot varandra skär till slut varandra och det är omöjligt för två linjer vilka går mot varandra att avvika i samma riktning som de går mot varandra.
5. Av två begränsade storheter kan den mindre tas i multipler så pass att den överstiger den större.

En uppmärksam läsare kanske har insett redan nu att Aristoteles fjärde princip är väldigt lik parallelpostulatet och det visar sig även vara ekvivalent med postulatet. Det är detta som senare blir bevisets problem.

3.2.2 De åtta propositionerna

I verket *Kommentarer till svårigheterna i premisserna i Euklides bok* presenterar al-Khayyam åtta nya propositioner vilka han anser bör läggas till i Elementa som sats 29 till 37 enligt Rosenfeld [13, s.65-66]. De tidigare satserna i Elementa utgår från *absolut geometri*, alltså utan användning av det femte postulatet och är således korrekta enligt al-Khayyam. De åtta som han lägger till bygger ut satserna och bevisar några av de befintliga utifrån antagandet av Aristoteles principer.

Den åttonde propositionen är parallellpostulatet självt, men innan vi kan ta oss an det behöver vi gå genom de andra propositionerna. Framför allt de tre första vilka hanterar Saccheris fyrhörning. De kommer därför presenteras nedan, med betoning på de tre första. Dock kommer endast beviset för den tredje propostionen presenteras då deras bevis är viktigast för att förstå al-Khayyams tankegångar samt hur de skiljer sig från kommande bevisförsök.

Proposition 1: Låt AC och BD vara två räta linjer med samma längd och båda vinkelräta till linjen AB. Dra linjen CD.

Då gäller att vinkeln $ACD = BDC$.

Proposition 2: Konstruera fyrhörningen $ABDC$ från proposition ett. Markera mittpunkten på linjen AB som punkten E. Dra en vinkelrät linje från E till punkten G, vilken är skärningspunkten på linjen DC.

Då gäller att linjen $CG = GD$ samt att linjen EG är vinkelrät mot linjen DC.

Proposition 3: I rektangeln $ABDC$ är vinklarna ACD och BDC räta.

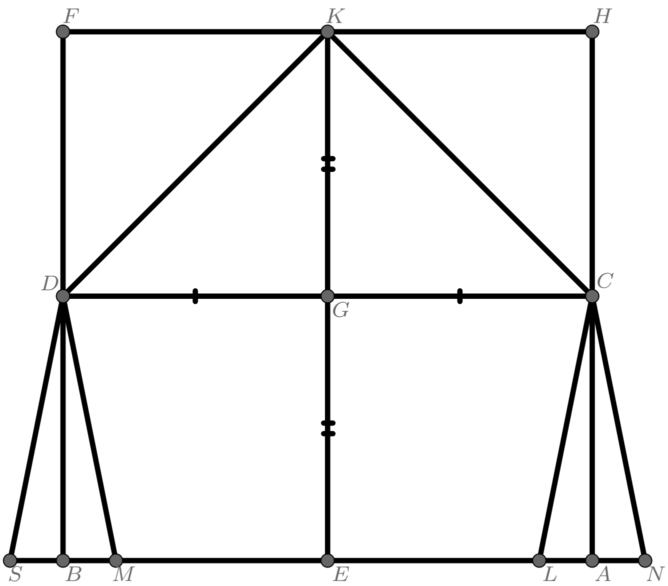
Bevis: Markera mitten på sidan AB som punkten E. Dra linjen EG vinkelrät mot AB, där punkten G är skärningspunkten med linjen CD.

Förläng linjen EG i riktning mot G till punkten K så att linjen $EG = GK$.

Dra sedan linjen HKF vinkelrät mot EK så att linjen AC kan förlängas till punkten H och linjen BD kan förlängas till punkten F. Dra även linjerna DF och CH.

Dra sedan linjerna CK och DK. Då linjen $DG = GC$, linjen GK är delad och vinkelrät mot både DG och GC så ger kongruensfallet *sida-vinkel-sida* att trianglarna GKD och GKC är kongruenta. Från detta fås även att linjen $DK = KC$ samt att vinkeln $GCK = GDK$ samt $DKG = CKG$.
Undersöker vi komplementvinklarna får vi vidare att vinkel $HCK = KDF$ samt $DKF = CKH$.

Undersöker vi trianglarna KDF och KCH så ser vi att även de är kongruenta genom kongruensfallet *vinkel-sida-vinkel*. Detta innebär att linjen $HK = KF$, $DF = CH$ samt att vinkeln $KFD = KHC$.



Nu när dessa samband är fastställda kan vi gå vidare till att undersöka vinklarna ACD och BCD. Är dessa vinklar räta så följer de propositionen och därför behöver fallet inte undersökas. Istället undersöker vi de andra möjliga fallen, att vinklarna antingen är större eller mindre än en rät vinkel.

Vi utgår först från fallet där vinklarna är mindre än en rät vinkel. Vi tänker oss att figuren $CDFH$ läggs över figuren $CDBA$ så att linjen GK överlappar linjen GE. Vi ser då att linjen HF inte överlappar med AB utan med den förlängda linjen NS.

Vidare ser vi då att om linjerna CH och DF förlängs så kommer varje linje sammankopplad med dem också förlängas. Detta innebär att linjerna CH och DF avviker från varandra.

Därefter ser vi att om linjerna förlängs åt motsatt håll så kommer de även avvika på den sidan. Detta get oss att två linjer skär en annan med rät vinkel, för att sedan öka i avstånd på båda sidor. Detta bryter mot Aristoteles principer och kan således inte gälla.

Nu antar vi istället att vinklarna ACD och BDC är större än två räta. Med liknande resonemang med samma figurer som läggs över varandra och sidor som förlängs så ser vi att vi får två linjer vilka går genom samma två punkter, vilket bryter mot postulaten. Således ser vi att det enda möjliga fallet är att vinklarna ACD och BDC är räta och beviset är därmed avslutat.

Kommentarer: Även om beviset här är klart så vill jag stanna upp och diskutera det innan vi går vidare till de resterande propositionerna. Al-Khayyam gjorde misstaget att anta Aristoteles principer i blindo, istället för att utmana dem vidare. Som redan nämnts så är den fjärde principen ekvivalent med parallellpostulatet. Detta blir den stora skillnaden senare när Saccheri tacklar problemet med liknande metodik och de är intressanta att jämföra bland annat av den anledningen. Men innan vi går vidare till Saccheri har vi först de andra postulaten, det slutgiltiga beviset samt ett antal bevisförsök mellan al-Khayyam och Saccheri.

Proposition 4: I en rektangel är motstående sidor lika.

Proposition 5: Två linjer vinkelräta mot samma linje har samma vinkelräta linjer.

Proposition 6: Två parallella linjer är två vinkelräta linjer till en och samma linje.

Proposition 7: Den sjunde propositionen är alternatvinkelsatsen bevisad med hjälp av al-Khayyams antaganden istället för parallellpostulatet.

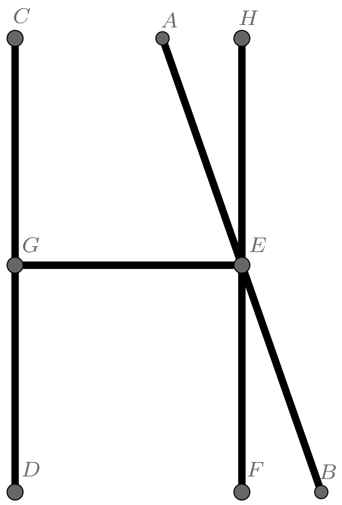
3.2.3 Beviset av postulatet

Proposition 8: Låt EG vara en rät linje. Dra linjerna EA och CG så att vinklarna AEG och CGE tillsammans är mindre än två räta.

Då gäller att linjerna EA och CG skär varandra i punkten A.

Bevis: Vi förlänger linjerna EA och CG i deras riktning mot sidan punkten A befinner sig i. Låt även vinkeln $AEG < EGD$. Vi konstruerar sedan vinkeln $HEG = EGD$.

Enligt Euklides proposition 27 [4. s.30-31][2] är då linjerna HEF och DGC parallella och linjen AE, vilken skär HF, kommer då skära linjen CD på den sidan av linjen GE som punkten A befinner sig på.



Kommentarer: Som redan nämnts är problemet med beviset att Aristoteles fjärde princip är ekvivalent med parallellpostulatet. Dock är det värt att nämna att bortsett från användningen av principerna så är det annars ett korrekt bevis. Det är även värt att notera att hur lik bevisföringen är Proklos bevisförsök, något som även Rosenfeld [13, s.71] påpekar.

3.3 Al-Tusis bevisförsök

Vårt sista bevisförsök från mellanöstern är från den persiska matematikern Nasir al-Din al-Tusis. Hans bevisförsök färdigställdes tidigast år 1251 enligt

[2] Om en linje skär två andra så att alternatvinklarna är lika så är linjerna parallella.

Rosenfeld [13, s.74] och är likt al-Khayyams på flera olika sätt. Bland annat presenteras ett antal propositioner vilka till slut leder fram till postulatets bevis. Denna gång är det dock endast sju propositioner istället för åtta. Dessutom använder även al-Tusi den saccheriska fyrhörningen i sitt resonemang.

Beviset kommer därför presenteras på liknande sätt. Propositionerna presenteras kortfattat med undantag för det tredje och det sjunde vilka utvecklas vidare. Det tredje för att det hanterar den saccheriska fyrhörningen, det sjunde då det är beviset av postulatet. En uppmärksam läsare kanske även noterar att al-Tusis proposition två och fyra motsvarar al-Khayyams proposition ett respektive fyra.

Rosenfeld [13, s.74-85] nämner flera bevis vilka är kopplade till al-Tusi. Ett antal bevis läggs fram med användning av olika propositioner, dock liknande resonemang. Därför kommer endast det av dessa bevis presenteras. Vidare finns även ett sentida bevis vilket sägs vara kopplat till al-Tusi, dock är det osäkert huruvida så är fallet. Det spekuleras bland annat av Rosenfeld [13, s.81] att beviset kan tillhöra al-Tusis son. I och med osäkerheten kring bevisets tillhörighet så kommer det inte heller redovisas. Istället kan intresserade läsare söka upp beviset själva och avgöra vem de vill attributera det till.

3.3.1 Al-Tusis propositioner

Proposition 1: Det kortaste avståndet mellan en punkt och en linje är en rät linje.

Proposition 2: Dras två lika vinkelräta linjer till en rät linje, som sedan binds av en linje ovantill, så bildar de lika vinklar (se annars al-Khayyams proposition 1).

Proposition 3: Låt BD vara en rät linje. Dra $AB = CD$ vinkelräta mot BD. Dra sedan linjen AC. Då är vinklarna BAC och DCA två räta vinklar.

Bevis: Om vinklarna inte är räta så är de antingen större eller mindre. Vi antar nu att de är större. Då kan vi dra en linje AE vinkelrät med AC till en punkt E på BD.

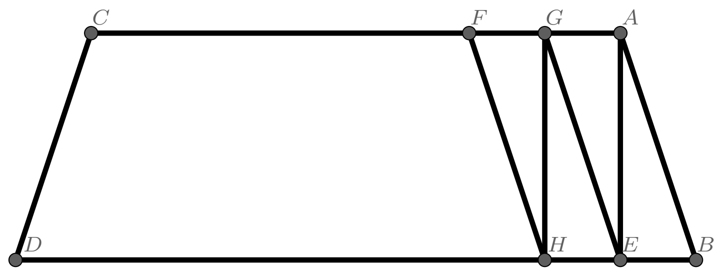
Vinkeln AED är en yttre vinkel till triangeln ABE och är således större än den inte räta vinkeln. Med andra ord är vinkeln AED större än en rät vinkel, enligt Euklides proposition 16 [4. s.20-21].[3]

Då kan vi dra linjen EG vinkelrät mot linjen BD på liknande sätt. Dock får vi även här en vinkel större än en rät med samma resonemang. Vi ser att vi då kan fortsätta dra GH och HF på samma sätt och att processen kan upprepas vidare. Från Euklides proposition 19 [4. s.22-23] fås följande samband mellan längderna av de vinkelräta linjerna dragna från AC till BD genom att undersöka de trianglar som linjerna bildat.[4]

$$AB < GE < FH$$

Detta innebär att avståndet mellan linjerna AC och BD blir större i riktning mot punkten C från sidan AB. Vidare innebär detta att linjerna kommer närmare varandra i riktning mot A.

Men vinkeln DCA är också trubbig. Alltså kan samma resonemang användas för att skapa vinkelräta linjer och trianglar från sidan CD mot punkten A. Detta leder till en motsägelse då detta ger att linjerna går närmare och längre ifrån varandra i riktning mot punkten C. Vinkeln kan således inte vara trubbig.



Vi undersöker nu fallet där vinklarna är mindre än en rät vinkel. I så fall kan vi dra linjen BE vinkelrät mot AC. Eftersom vinkeln ABD är rät så är vinklarna ABE och EBD spetsiga ty $ABD = ABE + EBD$. Vi kan alltså dra ytterligare en vinkelrät linje EG från punkten E till linjen BD. Vi ser då med samma resonemang som innan att vinkeln GEC är spetsig. Som i fallet med den trubbiga vinkeln kan vi fortsätta dra vinkelräta linjer utmed figuren.

Som innan får vi ett samband mellan linjernas längder, denna gång som

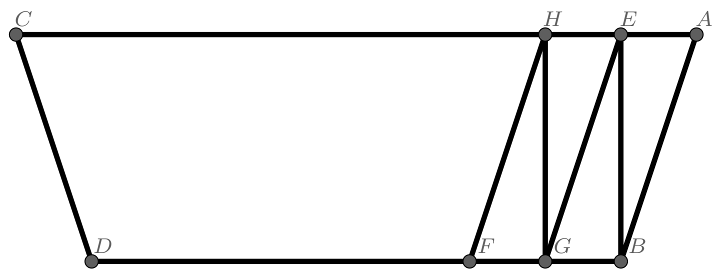
[3]Om sidan av en triangel förlängs så kommer yttervinkeln vara större än den inre och den motstående vinkeln.

[4]Den största sidan i en triangel är den vars motstående vinkel är störst.

följande:

$$AB > EG > HF.$$

Vi ser således att linjerna närmar sig varandra mot punkten C men skiljs från varandra i riktning mot punkten A. Dock fås igen det omvända förhållandet om vi använder samma resonemang men utgår från sidan CD. Således kan vinklarna inte heller vara spetsiga. Då gäller endast att de är räta.



Kommentarer: Argumentationen är sund i euklidisk geometri där linjerna är raka. Om vi dock utgår från möjligheten att linjer kan vara krökta så ser vi att fallen med trubbig och spetsig vinkel fortfarande gäller ifall vi utgår från en vändpunkt i de vinkelräta linjernas längder.

Vidare presenteras de resterande propositionerna, då inkluderat beviset för postulatet.

Proposition 4: Två motstående sidor i en rätvinklig fyrhörning är lika.

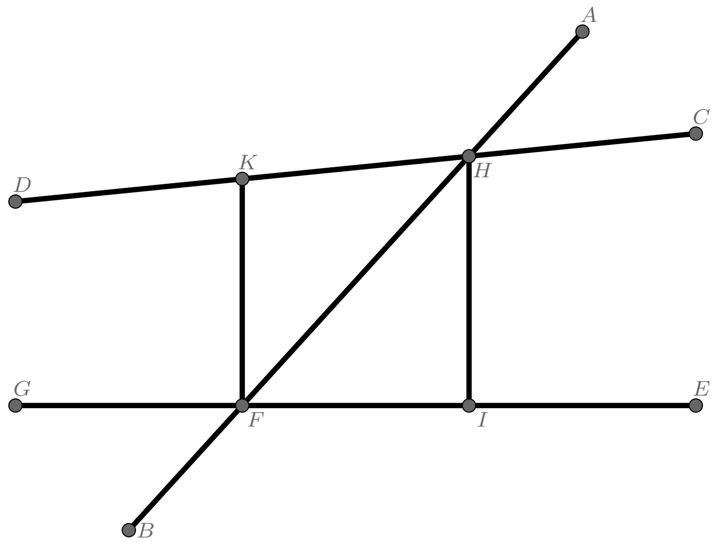
Proposition 5: Om en rät linje korsar två vinkelräta linjer dragna godtyckligt från en annan, då är alternatvinklarna lika, de yttre vinklarna lika med de motsvarande inre vinklarna och de inre vinklarna på samma sida är lika med två räta vinklar.

Proposition 6: Redan i den sjätte propositionen lämnar al-Tusi ett bevis för postulatet vilket liknar al-Haythams, dock utan att använda rörelse. Det utgår dock från det specifika fallet då en linje är vinkelrät och en annan är sned enligt Rosenfeld [13, 77]. Därför har jag valt, likt Rosenfeld, att inte behandla det vidare i texten. Istället läggs fokus på al-Tusis andra generella bevis vilket framförs som den sjunde propositionen.

Proposition 7: Låt linjen AB skära linjerna CD och EG i punkterna H respektive F så att de inre vinklarna CHF och EFH tillsammans är mindre än två räta vinklar.

Då gäller att linjerna CD och EG, om de förlängs oändligt, kommer korsa varandra.

Bevis: Låt en av vinklarna CHF och EFH vara en rät vinkel. Då måste den andra nödvändigtvis vara spetsig för att uppfylla premissen. Då kommer linjen som bildar den spetsiga vinkeln korsa den räta på samma sida av linjen AB som den spetsiga vinkeln befinner sig på, enligt proposition sex.



Låt istället en vinkel vara trubbig. Vi antar att vinkel CHF är den trubbiga. Vi drar då linje HI vinkelrät till linjen CD. Från punkten F drar vi sedan den vinkelräta linjen FK.

Eftersom CHF och EHF tillsammans är mindre än två räta vinklar och vinkeln CHI är en rät vinkel så måste vinklarna IHF och HFI tillsammans vara mindre än en rät vinkel. Men enligt den femte propositionen är vinklarna IHF och HFK lika eftersom de är alternatvinklar bildade av AB som går igenom IH och FK. Vidare innebär det att vinkeln KFI är mindre än en rät vinkel.

Därför kommer linjerna KF och EF skära varandra i en vinkel som inte är rät. Dessutom är linjen HK vinkelrät med KF. Således får vi ett fall av proposition sex och linjerna kommer då mötas om de förlängs i riktning mot C och E.

Om båda vinklarna istället är spetsiga kan vi dra linjen FK vinkelrät mot linjen GE. Från punkten H dras linjen HI vinkelrät mot CD. Då är EFK en rät vinkel och vinklarna KFH och FHI är lika då de är alternatvinklar.

Vidare är vinklarna FHI och HFI tillsammans en rät vinkel. I och med premissen att EFH och CFH tillsammans är mindre än två räta vinklar så är vinkeln IHC mindre än en rät vinkel.

Alltså kommer linjerna IH och CH skära varandra i en vinkel vilken inte är rät. Dessutom är linjen EI vinkelrät till IH. Därför kommer linjerna CD och EG skära varandra ifall de förlängs i riktning mot C och E. Således har alla möjliga fall givet premissen visats.

Kommentarer: Ett uppenbart problem är referenserna till proposition sex, vilket vi såg tidigare var ett ohållbart bevis. Däremot är det mer intressant att gå tillbaka till proposition tre. Om al-Tusis tredje proposition utgått från möjligheten av krökta linjer hade jag kanske istället skrivit om al-Tusis fyrhörning. Al-Tusi är den matematiker under tidsepoken vilken jag anser kommer närmast till att upptäcka de andra typerna av geometri. Dock snubblar han på mållinjen genom att begränsa sig till raka linjer. Istället är det först under renässansens Europa som vi kommer se matematiker utforska de möjligheterna.

4 Europas olika bidrag

Den islamska guldåldern når senare sitt slut och med korstågen förs Elementa, tillsammas med den arabiska matematiken, till Europa. Matematikerna i de olika furstedömena och kungarikena översätter de arabiska texterna och än en gång tar arbetet med parallellpostulatet fart på annan ort. Flertalet bevisförsök finns även från medeltida och tidigmoderna Europa, dock har de flesta samma problem som tidigare försök. Antingen använder de en omskrivning av postulatet i sitt bevisförsök eller nya, ekvivalenta axiom.

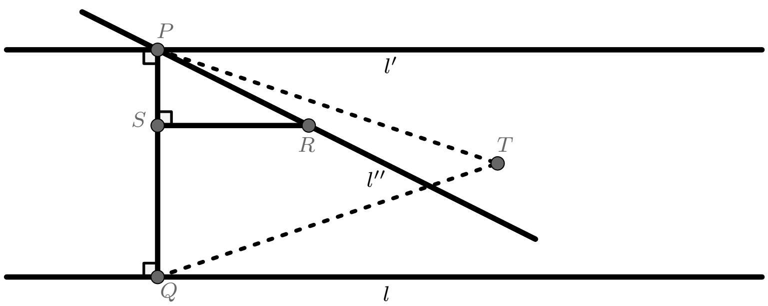
I detta avsnitt läggs fokus på några av de mer kända arbetena kring postulatet från Europa, John Wallis och Girolamo Saccheris bevisförsök samt John Playfairs omskrivning av postulatet. Dels för att de lett till intressanta, ekvivalenta påståenden till postulatet men också för att de bidragit till senare arbeten. De första två exemplifierar olika angreppssätt för att försöka bevisa postulatet. Playfairs omskrivning har däremot blivit den vanligaste omformuleringen av parallellpostulatet och behandlas därför vidare. De arbeten som exkluderats benämns i appendixet. Upptäckten av icke-euklidisk geometri och postulatets slutskede presenteras i nästkommande del.

4.1 John Wallis axiom

Ett bra exempel på hur svårt det kan vara att undvika grundantaganden ekvivalenta till postulatet är den brittiska matematikern John Wallis (1616-1703) bevisförsök. Burton [2. s.566] berättar hur Wallis under en föreläsning på Oxfords universitet år 1663 presenterar sitt bevis för postulatet. För att bevisa postulatet lät Wallis följande axiom gälla istället för postulatet:

"Till varje triangel existerar en likformig men icke kongruent triangel".

Bevis: Låt l vara en linje och P en punkt utanför linjen. Dra linjen PQ vinkelrät mot l, där Q är en punkt på linjen l. Konstruera därefter linjen l' vinkelrät mot PQ och således parallell med linjen l. Dra sedan linjen l'', skild från l och l', genom punkten P. Målet är nu att visa att l'' skär l och att det således endast finns en parallell linje till l.



Välj nu en godtycklig punkt R på linjen l'' vilken ligger mellan linjerna l och l'. Konstruera sedan linjen RS vinkelrät mot PQ. I och med det tillägda axiomet existerar då en triangel PQT likformig med triangeln PSR så att punkten T är på samma sida av PQ som punkten R. Utifrån de likformiga trianglarna får vi då att vinkeln $TPQ = RPS$. Vidare då linjen PS sammanfaller med linjen PQ måste linjerna PR och PT sammanfalla. Men eftersom PR sammafaller med l'' så måste PT också sammanfalla med l'', vilket innebär att punkten T ligger på linjen l''.

Utifrån likformigheten hos trianglarna får vi även att vinklarna $PQT = PSR =$ en rät vinkel, vilket innebär att linjen TQ är vinkelrät mot linjen PQ. Men l är redan den vinkelräta linjen till PQ, alltså ligger punkten T även på linjen l. Eftersom punkten T ligger på både linjen l och l'' är det således skärningspunkten mellan l och l'', alltså skär linjerna varandra vilket skulle visas.

Kommentarer: Som det inledande stycket redan avslöjat så ligger problemet i det axiom Wallis införde, vilket är ekvivalent med postulatet. Dock ger det en oväntad omskrivning av postulatet vilken inte är särskilt uppenbar.

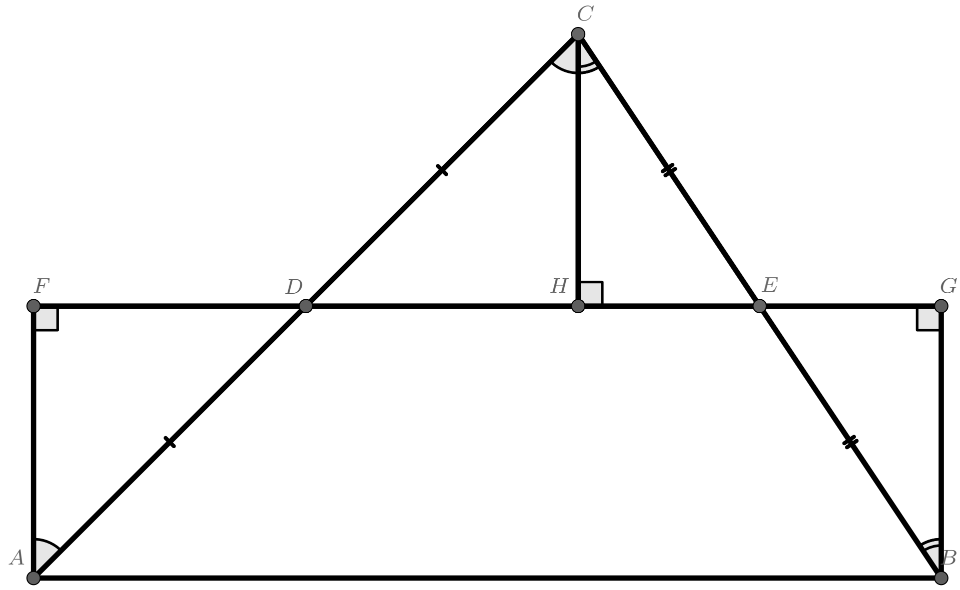
Det visar också på hur kreativa matematikerna tvingats bli efter så många år av bevisförsök. Dels att de fortfarande hittade nya omskrivningar flera århundraden efter Elementas första utgåva. Men också att de hittar så kreativa och annorlunda omskrivningar så som Wallis.

4.2 Girolamo Saccheris bevisförsök

De första riktiga framgångarna kring bevisen av parallellpostulatet kommer med den italienska matematikern Giovanni Girolamo Saccheris (1667-1733) bevisförsök. I verket med den självsäkra titeln *Euclides ab omni naevo vindicatus*, vilket enligt Burton [2. s.567] kan översättas till *Euklides fri från varje fläck* presenteras Saccheris arbete kring postulatet. Även om dess grund inte är ny, med den saccheriska fyrhörningen, så är de nya resonemangen och satserna intressanta. Med dessa bevisar Saccheri grunderna för den *hyperboliska geometrin*, även om han själv inte var fullt medveten om det. Han bevisar sats efter sats för en geometri vilken skiljer sig från den euklidiska, trots att han söker efter en motsägelse i den nya geometrin. I slutändan säger han sig hitta en motsägelse, även om det är på svaga grunder. Hans arbete är således de första stegen mot att visa att postulatet är ett axiom och inte en sats. Han upptäcker nästan en av de hållbara geometrierna där postulatet inte gäller.

Som sagt så är grunderna för hans bevis desamma som tidigare. Precis som al-Khayyam och al-Tusi utgår de ifrån en fyrhörning och de tre fallen där de övre vinklarna är spetsiga, trubbiga eller räta. När Saccheri undersöker fallen utnyttjar han att vinkelsumman i en triangel är sammankopplat till de olika fallen. I fallet då vinklarna är räta blir triangelns vinkelsumma detsamma som två räta vinklar. Är de spetsiga blir vinkelsumman mindre, är de trubbiga blir vinkelsumman större. Vidare ser vi att detta även ger omskrivningen av postulatet att vinkelsumman i en triangel är lika med två räta vinklar. Relationen mellan fyrhörningens toppvinklar och triangelns vinkelsumma bevisas av Saccheri själv och beviset presenteras nedan.

Bevis: Given en triangel ABC, låt punkterna D och E vara mittpunkterna på AC respektive BC. Dra de vinkelräta linjerna AF, BG och CH från hörnen A, B och C till linjen som går genom punkterna D och E. Trianglarna AFD och CHD är då kongruenta i och med kongruensfallet *sida-vinkel-sida*.



Det innebär att sidan $AF = CH = BG$ vilket ger den saccheriska fyrhörningen $ABGF$ med räta vinklar vid hörnen F och G. Utifrån detta fås följande resonemang (där $\angle$ betecknar vinkel):

$$\angle FAB = \angle FAD + \angle DAB = \angle HCD + \angle DAB$$

$$\angle GBA = \angle GBE + \angle EBA = \angle HCE + \angle EBA.$$

Vidare fås:

$$\angle FAB + \angle GBA = \angle DAB + \angle HCD + \angle HCE + \angle EBA$$

$$= \angle BAC + \angle ACB + \angle ABC.$$

Saccheri ger långa och utförliga bevis för fallen med trubbig och spetsig vinkel, samt varför de i slutändan inte håller (enligt honom). Därför kommer de inte presenteras utförligt här. Istället sammanfattas endast hans slutsatser och problemen i resonemangen, i den mån det går.

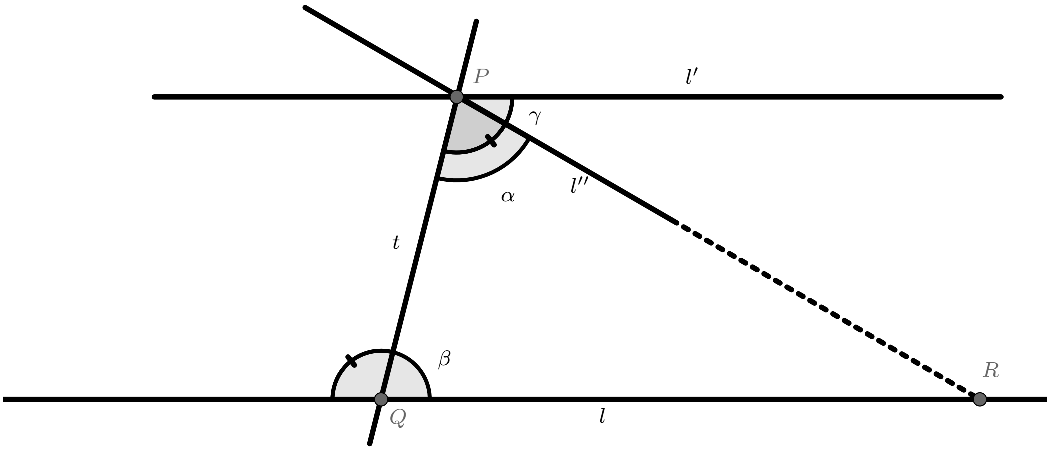
I fallet med trubbiga toppvinklar så motbevisas det med 13 propostioner från Saccheri. Grundiden enligt Burton [2. s.568-569] är att Saccheri visar att fallet med trubbiga toppvinklar implicerar parallellpostulatet, vilket vidare implicerar att vinklarna är räta. På så sett får han fram en motsägelse. Idag kallas denna typ av geometri för *sfärisk geometri* vilken bryter mot fler av Euklides postulat än parallelpostulatet.

Med de spetsiga toppvinklarna blev det dock svårare för Saccheri att komma fram till en konkret slutsats. Fallet med spetsiga vinklar kallas idag för *hyperbolisk geometri* och skiljs endast av parallellpostulatet från Euklides postulat. Burton [2. s.568-569] berättar hur Saccheri letade efter en motsägelse för att motbevisa fallet, men istället bevisade Saccheri sats efter sats för denna nya geometri. Dock accepterade inte Saccheri att en annan geometri kunde existera, utan var låst i sitt synsätt till den euklidiska geometrin. I slutändan lämnar Saccheri ett motbevis för fallet med de spetsiga toppvinklarna där, enligt Burton [2. s.568-569] Saccheri antar att en punkt på randen i ett plan kan ses som en punkt i planet. Ur detta får Saccheri fram en motsägelse till Euklides propositioner och vidare motbevisar fallet. Saccheris antagande är detsamma som att anta att en sträcka inte kan förlängas oändligt, då det krävs för att nå en punkt vid randen på ett plan. Således bryter antagandet mot Euklides andra postulat. Beviset är därför ohållbart och Saccheri antyder en del osäkerhet kring beviset själv.

4.3 Playfairs axiom

Idag när euklidisk geometri presenteras så används sällan parallellpostulatet i dess grundform. Istället används ofta *Playfairs axiom* vilket presenterades i tidigare stycke. Omskrivningen har kopplats till den brittiska matematikern John Playfair (1748-1819) och har således döpts efter honom. Här presenteras bevisen för axiomets ekvivalens med parallellpostulatet. Först visas att axiomet implicerar postulatet (utifrån Butrons [2, s. 564] framställning). Därefter presenteras omvändningen.

Bevis: Låt linjerna l och l' skäras av en transversal t i punkterna P och Q så att de formar de inre vinklarna α och β på en sida av transversalen. Anta att vinkelsumman $\alpha + \beta < 180°$.



Låt γ vara supplementvikeln till β på motsatt sida av linjen t. Då gäller att $\gamma + \beta = 180° > \alpha + \beta$. Detta implicerar då att vinkeln $\gamma > \alpha$. Genom punkten P, konstruera linjen l'' så att den med linjen t bildar en alternatvinkel till linjen l som är lika med vinkeln γ (vilket tillåts av Euklides proposition 23 [4. s.26][5]). Enligt Euklides proposition 27 [4. s.30-31][6] är då linjerna l och l'' parallella. Eftersom vinkeln $\gamma > \alpha$ får vi då att linjerna l' och l'' är distinkt olika linjer.

Ur Playfairs axiom får vi då att en linje kan dras genom punkten P parallell till linjen l, alltså måste linjerna l och l' mötas i en punkt R. Om punkten R är på sidan av linjen t motsatt vinklarna α och β så blir α en yttre vinkel till triangeln PQR. Enligt Euklides proposition 16 [4. s.20-21][7] skulle då vinkeln $\alpha > \gamma$, vilket ger en motsägelse. Alltså skär linjerna l och l' varandra på sidan av linjen t med vinklarna α och β, vilket skulle visas.

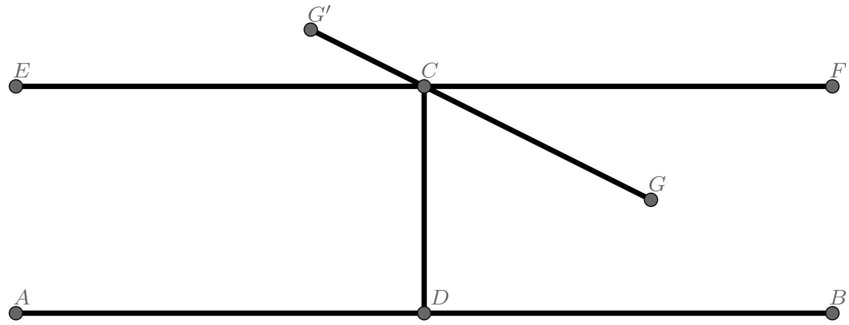
Bevis: Låt l vara en linje och P en punkt utanför linjen. Välj då en punkt Q på linjen l så att linjen PQ kan dras vinkelrät mot linjen l. Dra sedan linjen l' genom punkten P så att linjen l' är vinkelrät mot linjen PQ. Då är linjerna l och l' parallella enligt Euklides proposition 27 [4. s.30-31][8].

[5] Att konstruera en vinkel lika med en given vinkel vid en given punkt på en given rät linje.

[6] Om en linje skär två andra så att alternatvinklarna är lika så är linjerna parallella.

[7] Om sidan av en triangel förlängs så kommer yttervinkeln vara större än den inre och den motstående vinkeln.

[8] Om en linje skär två andra så att alternatvinklarna är lika så är linjerna parallella.



Välj en punkt R mellan linjerna l och l'. Konstruera sedan linjen PR. Eftersom punkten R ligger mellan linjerna l och l' så kommer vinkeln QPR alltid vara mindre än en rät. Enligt parallellpostulatet kommer då linjerna PR och l att mötas, alltså är de inte parallella.

Väljer vi en punkt R' så att vinkeln QPR' blir trubbig får vi då en spetsig vinkel på andra sidan av linjen PQ ifall linjen PR' förlängs i samma riktning från punkten P och således kan samma resonemang användas igen. Alltså finns endast en parallell linje till l genom punkten P, vilket skulle visas.

Kommentarer: Anledningen till att Playfairs omskrivning senare blev så populär menar Burton [2. s.564] berodde på spridningen av hans verk *Elements of Geometry* vilken utgavs i flera utgåvor. Verket kom, likt Elementa, att bli en central lärobok i geometri. Dessutom är omformuleringen av postulatet lättare att både förstå och förklara än Euklides originalformulering.

Dock presenteras inte Playfairs axiom i dess nuvarande form i någon av utgåvorna av Elements of Geometry. Istället presenterar Playfair [12, s.11] postulatet på följande sätt:

"Två räta linjer vilka skär varandra kan inte båda vara parallella med samma linje."

Även om formuleringen skiftar något mellan utgåvorna så liknar de ovanstående citat mer än dagens version av Playfairs axiom, berättar Ackerberg-Hastings [1. s.134]. Hon berättar även att det var först årtionden efter Playfair gav ut Elements of Geometry som dagens version av axiomet framkom.

Trots det har Playfair kopplats an till omskrivningen av postulatet. Även detta har framför allt att göra med spridningen av hans bok och de olika versioner, både officiella och inofficiella, som spreds världen över enligt Ackerberg-Hastings [1. s.142-143].

5 Framkomsten av icke-euklidisk geometri

Den fråga vilken huvudsakligen motiverat arbeten med postulatet genom historien är huruvida det är en sats eller ett axiom. Svaret på frågan kom under 1800-talets början med upptäckten av så kallade *icke-euklidisk geometri*, hållbara geometrier vilka inte använder parallellpostulatet.

Icke-euklidisk geometri upptäcktes ungefär samtidigt och oberoende av varandra av Nikolai Lobachevski och Janos Bolyai. Även den kände Carl Friedrich Gauss säger sig ha upptäckt, eller i alla fall anat existensen av, icke-euklidisk geometri innan de båda. Dock publicerade han aldrig sina fynd, till skillnad från Lobachevski och Bolyai.

I detta avsnitt kommer jag presentera en del av Lobachevskis resonemang kring av hyperbolisk geometri (av honom kallad *imaginär geometri*) samt hur denna antyder att parallellpostulatet är ett axiom för en av flera möjliga geometrier. Jag har valt att utgå från Lobachevskis resonemang över Bolyais då hans är enklare att följa, vilket jag hoppas underlättar läsandet. I grunden bevisar dock de båda samma sak även om det benämns olika.

5.1 Lobachevskis resonemang

Lobachevski lämnar inget klart bevis för att parallellpostulatet är ett axiom. Istället anas detta i bevisen för de olika satserna för hyperbolisk geometri. Därför tänker jag likt Burton [2. s.595-598] endast redogöra för hans nya axiom för hyperbolisk geometri samt för en av hans geometris första satser, vilken jag tycker påvisar hur geometrierna skiljer sig och hur synen på parallellpostulatet förskjuts från sats till axiom.

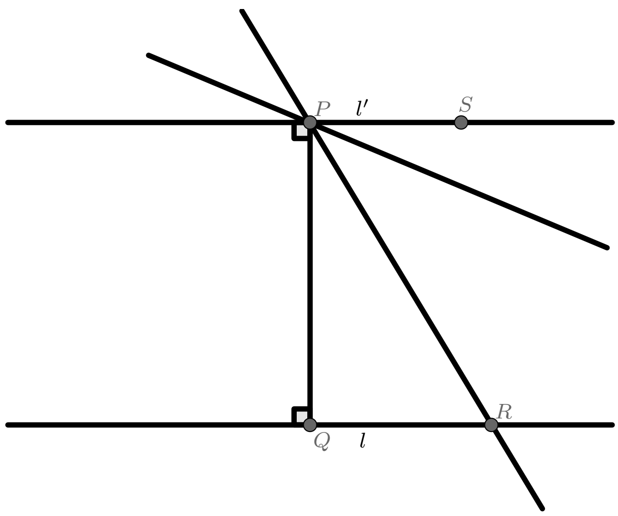
Burton [2. s.595-596] nämner hur Lobachevski utgår ifrån möjliga motsatser till parallellpostulatet, att det finns inga parallella linjer eller flera parallella linjer. Det första motbevisas snabbt, då det bryter mot att linjer kan förlängas i oändlighet[9]. För arbetet med det andra fallet antogs dock följande axiom:

Det finns två parallella linjer till en given linje genom en given punkt utanför linjen.

Eftersom Lobachevski endast bytte parallellpostulatet och behöll de andra postulaten och axiomen intakta så innebar det att alla satser som gäller i absolut geometri kan appliceras på hans hyperboliska. Utifrån detta kunde han härleda följande sats.

Sats: Låt P vara en punkt utanför linjen l. Då finns två distinkta linjer l_a och l_b vilka inte skär linjen l och som bildar lika spetsiga vinklar med linjen PQ som är vinkelrät mot linjen l.

Bevis: Dra en vinkelrät linje PQ till l. Dra sedan linjen l' vinkelrät mot PQ genom punkten P. Då är linjen l' parallell med l enligt Euklides proposition 27 [4. s.30-31].[10]



Låt S vara en punkt på linjen l'. Av de linjer som går genom punkten P på samma sida som S kommer vissa att skära l, andra inte. Detta låter oss dela upp linjerna i två olika grupper, S_1 och S_2. S_1 är de linjer vilka skär linjen l. S_2 är de linjer vilka inte skär l. Varje linje i S_1 *föregår* då varje

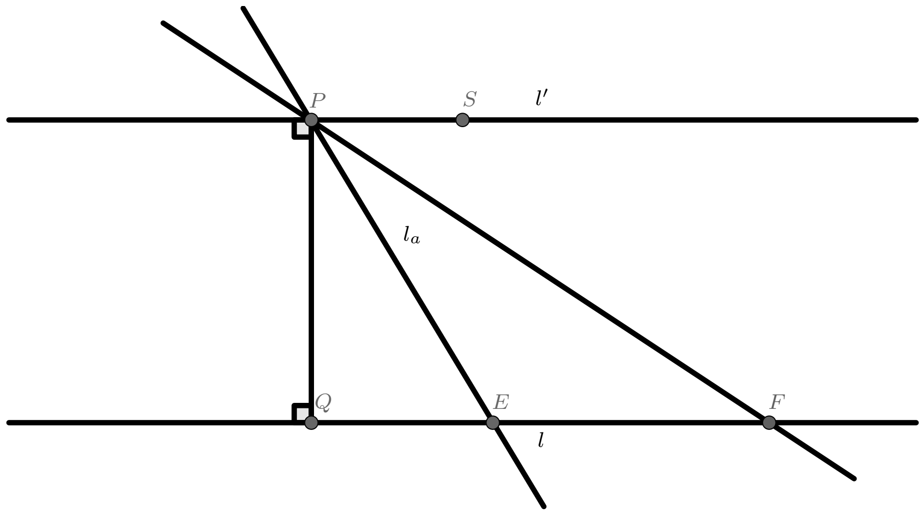
[9] I bl.a. sfärisk geometri gäller att det inte finns några parallella räta linjer och där ser vi även att linjers längd är begränsad av att de ligger på sfärens yta.

[10] Om en linje skär två andra så att alternatvinklarna blir lika så är linjerna parallella.

linje i S_2 i den mening att de bildar en mindre vinkel med linjen PQ i hörnet P.

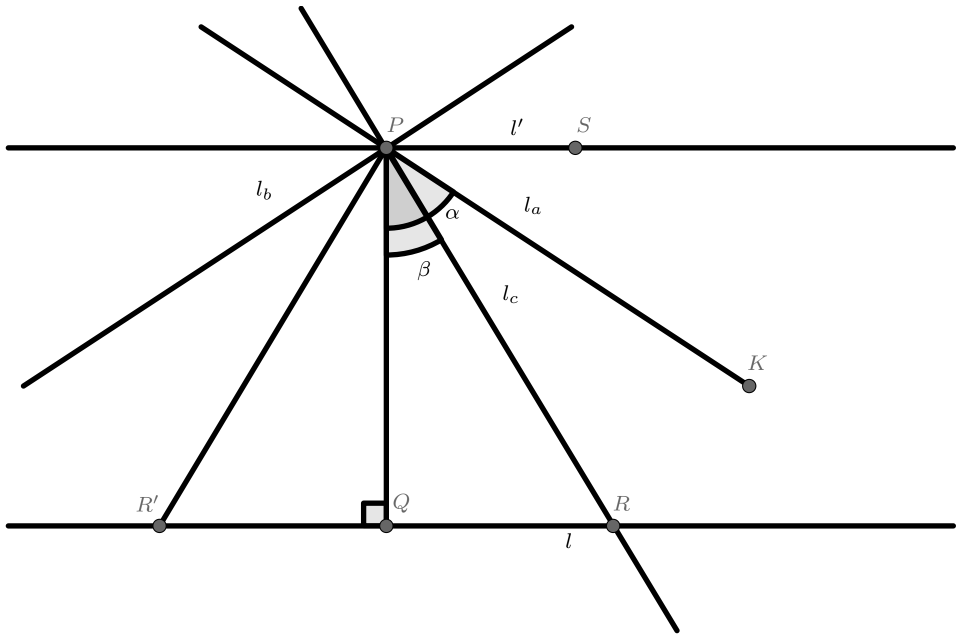
Det existerar då en skiljelinje l_a genom punkten P vilken delar linjerna mellan de två grupperna. Eftersom l_a antingen möter l eller ej så är den antingen den *sista* linjen i S_1 eller den *första* linjen i S_2.

Låt oss anta att l_a ligger i S_1. Då skär l_a linjen l i en punkt E. Välj då en punkt F på linjen l så att punkten E ligger mellan punktena Q och F. Då är linjen PF med i S_1. Eftersom l_a föregår linjen PF är det då inte den sista linjen i S_1, vilket ger en motsägelse. Alltså är l_a den första linjen i S_2 och kallas vidare för den *högra avgränsande parallellen* till linjen l genom punkten P.



Med samma resonemang på andra sidan av linjen PQ får vi även en linje l_b vilken blir den *vänstra avgränsande parallellen*. Alltså finns det två linjer genom P vilka inte skär l. Dessutom kommer alla linjer genom P vilka går genom vinkeln som bildas av linjerna l_a eller l_b i hörnet P att skära linjen l.

De avgränsande parallella linjerna ligger symmetriskt på vardera sida av linjen PQ så att vinklarna α och β de bildar med linjen PQ är lika. Detta visas genom att anta det motsatta, säg att $\alpha > \beta$. Då existerar en linje l_c mellan linjerna PQ och l_a vilken skär linjen l i en punkt R så att vinkeln $RPQ = \beta$. Låt R' vara en punkt på linjen l på motsatt sida av linjen PQ så att $R'Q = RQ$. Då är trianglarna $R'PQ$ och RPQ kongruenta vilket ger att vinkeln $QPR' = QPR$. Vidare ger detta att vinkeln $QPR' = \beta$. Från det fås att linjen PR' sammanfaller med linjen l_b. Dock ger detta en motsägelse då l_b inte skär l. Alltså är fallet $\alpha > \beta$ falskt. Med samma resonemang fås att omvändningen är falsk. Alltså gäller endast fallet att $\alpha = \beta$.



Vi vet att $\alpha = \beta \leq 90°$ då de avgränsas av linjen l'. Om $\alpha = \beta = 90°$ så skulle linjerna l_a och l_b vara samma räta linje då de båda skulle sammanfalla med linjen l' vinkelrät mot linjen PQ i punkten P. Alla andra linjer genom P skulle då få en vinkel vid punkten P mindre än α och β och skulle således korsa linjen l. Då skulle l' vara den enda parallella linjen till l, vilket bryter mot tidigare antagna axiom. Således måste α och β vara spetiga vinklar, vilket avslutar beviset.

Kommentarer: Beviset av satsen är intressant och något humoristiskt sett till de tidigare arbeten som presenterats. Istället för se parallellpostulatet vara målet för beviset ser vi nu hur det används för att bilda en motsägelse i beviset för en sats. Slutdelen i beviset tycker jag visar tydligt hur bilden av postulatet skiftar till att ses som ett axiom i och med att de visas motsäga det nya antagna axiomet, något som Burton [2. s.597-598] troligtvis även insåg när han skrev sin bok.

Det är värt att notera att från beviset ser vi även att det i hyperbolisk geometri finns ett oändligt antal parallella linjer vilka går genom en punkt utanför linjen. Alltså bör Lobachevskis axiom tolkas som *minst* två linjer. Vi ser då att det inte finns olika geometrier för tre, fyra eller fem parallella linjer utan att den hyperboliska alltid kommer ha oändligt antal parallella linjer.

5.2 Bevisförsökens slut

Med upptäckten av hyperbolisk geometri synliggjordes omöjligheten att bevisa parallellpostulatet utifrån de andra fyra postulaten. Som Burton [2. s.602] uttrycker det, ifall parallellpostulatet gick att bevisa med de andra fyra postulaten så skulle det även gå att bevisa för hyperbolisk geometri, då det inkluderar samma postulat. Det skulle då leda till motsägelser hos den hyperboliska geometrin, vilken annars är hållbar och konsekvent. Eftersom den hyperboliska geometrin är hållbar så måste således parallellpostulatet antas vara ett femte postulat och inte en sats ur de andra fyra postulaten.

Dock är det värt att notera att än idag så har, berättar Burton [2. 602], inte euklidisk geometri bevisats vara hållbar och konsekvent. Det är fortfarande möjligt att det är en ohållbar geometri, även om den än så länge tycks gälla. Dock påpekar han också att om vi antar att euklidisk geometri är korrekt och hållbar så följer att den hyperboliska geometrin är korrekt och hållbar också. Detta kommer jag dock inte hantera vidare här utan hänvisar intresserade läsare till Burtons bok.

6 Parallellpostulatet fram till idag

Trots att frågan om parallellpostulatet i princip var löst så fortsatte geometri vara ett stort forskningsområde där flera viktiga insikter kom under de kommande åren efter upptäckten av hyperbolisk geometri. Vissa av dessa relaterar till parallellpostulatet. Katz [10. s.703-705] och Burton [2. s.598-601] nämner bland annat hur Bernhard Riemann relaterar de olika geometrierna (sfärisk, euklidisk och hyperbolisk) till varandra genom att prata om hur linjerna inom de olika geometriena är kurvor med en viss krökning. I euklidisk geometri är en rät linje en linje utan krökning vilken går över ett plan. I t.ex. sfärisk geometri kröks istället linjer så att de bildar en cirkel vilken täcker ytan på en sfär. Riemann relaterar detta sedan till det tredimensionella rummet (vilken antas vara rummet vi existerar i) och belyser då svårigheterna att bestämma geometrin för vårt eget rum. Eftersom vi inte kan mäta krökningen på allt för stora eller små linjer i vårt universum så kan vi aldrig säkerställa den exakt. Det innebär att vårt universum då, enligt Riemman, skulle kunna vara sfäriskt eller hyperboliskt med en svag krökning. Vidare om krönkingen på linjer i universum visar sig vara sådan att det är sfäriskt så innebär det vidare att universum måste vara av ändlig storlek, eftersom rummet i tredimensionell sfärisk geometri är ändligt. Katz [10. s.705] poängterar dock att Riemann inte går allt för långt in i resonemanget utan säger att detta är en fråga för fysiker mer än för matematiker.

Svaret på frågan om vårt universums krökning kom senare under början på 1900-talet med Albert Einsteins teori om generell relativitet. Det han visade var, enligt Planck [11], att objekt med stor massa kröker rummet och på så sätt ändrar vad som är det kortaste avståndet mellan två punkter. I fall utan gravitationell påverkan (utan objekt med stor massa) är en rät linje mellan två punkter just en rät linje, likt i euklidisk geometri. När rummet istället kröks av ett objekt med stor massa så kröks det kortaste avståndet mellan två punkter så att det istället liknar antingen den hyperboliska eller den sfäriska geometrin. Euklidisk geometri som en modell för verkligheten är således inte komplett utan måste kompletteras med andra geometrier. Vidare innebär det att parallellpostulatet inte gäller generellt i vår verklighet utan bara i vissa delar av den.

7 Referenslista

[1] Ackerberg-Hastings, A. *The misnamings of Playfair's Axiom* i: Zack, M. och Schlimm, D. (red.) (2017). Research in History and Philosophy of Mathematics. The CSHPM 2016 Annual Meeting in Calgary, Alberta. Cham: Springer International Publishing

[2] Burton, D.M. (2011). *The history of mathematics: an introduction.* (7. ed) New York: McGraw-Hill

[3] Coxeter, H.S.M. (1998). *Non-Euclidean geometry* [Elektronisk resurs]. (6. ed.) Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

[4] Euclid., Euclides,, Fitzpatrick, R. samt Heiberg, J.L. (2008). *Euclid's elements of geometry: the Greek text of J.L. Heiberg* (1883-1885) : från Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883-1885. (Reviderad 2008).

[5] Frankland, W. B. (1910). *Theories of parallelism: an historical critique* [Elektronisk resurs]. Cambridge.

[6] Greenberg, M.J. (1993). *Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history.* (3. ed.) New York: Freeman.

[7] Greenberg, M.J. (2010). *Old and New Results in the Foundations of Elementary Plane Euclidean and Non-Euclidean Geometries* i: The American Mathematical Monthly, vol. 117, no. 3, March 2010, s. 198-219. Menasha, Wisc.: Mathematical Association of America.

[8] Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and beyond.* New York: Springer. [Elektronisk resurs]

[9] Johansson, B.G. (2004). *Matematikens historia.* Lund: Studentlitteratur.

[10] Katz, V.J. (1993). *A history of mathematics: an introduction.* New York: HarperCollins.

[11] Planck, M. Institute for Gravitational Physics. Golm/Potsdam. http://www.einstein-online.info/elementary/generalRT/GeomGravity.html Hämtad: 11-01-2019.

[12] Playfair, J. (1846). *Elements of Geometry*. W.E. Dean.
https://archive.org/details/elementsgeometr05playgoog/page/n34
Hämtad 11-01-2019.

[13] Rosenfeld, B.A. (1988). *A history of non-Euclidean geometry: evolution of the concept of a geometric space* [Elektronisk resurs]. New York: Springer-Vlg.

[14] Tambour, T. (2002). *Euklidisk geometri*. Stockholm: Stockholms universitet, Matematiska institutionen.

8 Appendix

8.1 Matematiker vars arbeten utelämnats

Antika Grekland
Archimedes
Posidonius

Medeltida Mellanöstern
al-Jawhari
Ibn Qurra
al-Nayrizi
Ibn Sina
al-Salar
al-Abahri
al-Maghribi

Det tidiga Europa
Vitello
Levi ben Gerson
Alfonso

Europa, 1600-talet och vidare
Frederik Bartolacic Grisogono
Christopher Clavius
Pietro Antonio Cataldi
Giovanni Alfonso Borelli
Vitale Giordano
Adrien Marie Legrende
Johann Heinrich Lambert
Carl Friedrich Gauss
Farkas Bolyai

8.2 Hilberts axiom för euklidisk geometri

Axiomen presenteras här utfrån Greenbergs [6. s.469-471] framställning av axiomen.

Incidensaxiomen
Axiom I-1: Till varje punkt P och till varje punkt Q skild från P finns en unik linje l infallande mellan P och Q.

Axiom I-2: Till varje linje l existerar minst två punkter vilka infaller med l.

Axiom I-3: Det existerar tre distinkta punkter med egenskapen att ingen linje infaller med alla tre punkter.

Emellan-axiomen
(Översätt från engelskans "*betweenness*").

Axiom B-1: Om punkten B ligger mellan punkterna A och C (härifrån betecknat $A{*}B{*}C$), då ligger punkterna A, B och C på en linje samt $C{*}B{*}A$.

Axiom B-2: Given två distinkta punkter B och D, existerar det punkter A, C och E på linjen BD så att $A * B * D$, $B * C * D$ samt $B * D * E$.

Axiom B-3: Om A, B och C är tre distinkta punkter på samma linje, då är en och endast en belägen mellan dem.

Axiom B-4: För varje linje l och får några tre punkter A, B och C vilka inte ligger på l gäller:
(i) Om A och B är på samma sida av l och B och C är på samma sida av l så är A och C på samma sida av l.
(ii) Om A och B är på motsatt sida av l och B och C är på motsatt sida av l så är A och C på samma sida av l.

Kongruensaxiomen
Axiom C-1: Om A och B är distinkta punkter och om A' är en godtyckligt punkt, då för varje stråle r från A' finns en unik punkt B' på r så att $B'A'$ och AB är kongruent med $A'B'$ (härmed betecknad $AB \cong A'B'$).

Axiom C-2: Om $AB \cong CD$ och $AB \cong EF$ så gäller att $CD \cong EF$. Dessutom är alla sträckor kongruenta med sig själva.

Axiom C-3: Om $A * B * C, A' * B' * C', AB \cong A'B'$ samt $BC \cong B'C'$ så gälller att $AC \cong A'C'$.

Axiom C-4: Given en vinkel BAC och en stråle $A'B'$ från punkten A' så finne en unik stråle från $A'C'$ på en given sida av linjen $A'B'$ så att vinkeln $B'A'C' \cong BAC$.

Axiom C-5: Om vinkeln $A \cong B$ och vinkeln $A \cong C$ så gäller att vinkeln $B \cong C$. Dessutom är alla vinklar kongruenta med sig själva.

Axiom C-6 (SVS): Om två sidor och den mellanliggande vinkeln i en triangel är kongruenta med respektive två sidor och mellanliggande vinkel i en annan triangel så är trianglarna kongruenta.

Parallellaxiomet
Axiom P-1: För varje linje l och varje punkt P vilken inte ligger på l finns det som mest en linje m genom P som är parallell med l.

Kontinuitetsaxiom
Dedekinds axiom: Anta att mängden l av alla punkter på en linje l är en disjunkt union $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ av två icketomma delmängder så att ingen punkt i någon delmängd är mellan två punkter i den andra. Då existerar det en unik punkt O på l så att en av delmängderna är en stråle av l från punkten O och där den andra delmängden är komplementet till l.

Archimedes axiom: Om CD är en sträcka, A en punkt och r en stråle från A så gäller för varje punkt $B \neq A$ på r att det finns ett tal n så att om CD läggs till n antal gånger på r med start från punkten A, fram till en punkt E så är $n \times CD \cong AB$ och antingen $B = E$ eller så är B belägen mellan A och E.

Aristoteles axiom: Given en sida av en spetsig vinkel och en sträcka AB, existerar det en punkt Y på den givna sidan av vinkeln så att om X är foten av den vinkelräta linjen från Y till den andra sidan så av vinkeln så är $XY > AB$.

Greenberg [6. s.99] påpekar att Dedekinds axiom implicerar de andra två axiomen. Alltså räcker Dedekinds axiom.

8.3 Rosenfelds översättning av Aristoteles principer

(I) Magnitudes are infinitely divisible, that is, they do not consist of indivisibles;
(II) A straight line can be produced to infinity;
(III) Any two intersecting straight lines open and diverge to the extent to which they move away from the vertex of the angle of intersection;
(IV) Two converging lines intersect and it is impossible for the converging straight lines to diverge in the direction of convergence;
(V) Of two unequal bounded magnitudes the smaller can be taken with such multiplicity that it exceeds the larger.

(Hämtade från Rosenfeld [13. s.38]).