Stockholms universitet

Value at Risk: en studie av historisk simulering, varians-kovariansmetoden och GARCH(1,1)

Emma Uddholm

Kandidatuppsats i matematisk statistik
Bachelor Thesis in Mathematical Statistics

Stockholms universitet

Matematisk statistik
Stockholms universitet
Kandidatuppsats **2015:18**
http://www.math.su.se/matstat

Value at Risk: en studie av historisk simulering, varians-kovariansmetoden och GARCH(1,1)

Emma Uddholm*

Juni 2015

Sammanfattning

Value at risk (VaR) är ett riskmått som mäter den potentiella förlusten av en investering under en bestämd tid och med en given sannolikhet. VaR har under de senaste årtiondena blivit ett populärt mått för riskvärdering av olika finansiella instrument på marknaden. Den här studien ämnar till att jämföra skattningar av 5% och 1% VaR med metoderna: historisk simulering, varians-kovariansmetoden och GARCH(1,1). Jämförelsen görs genom analys av data från aktieindexet S&P 500. Skattningarna utvärderas därefter med ett backtest baserat på ett tvådelat binomialtest. Studien visar att GARCH(1,1) ger överlägset bäst skattningar för 5% VaR oavsett normal- eller t-fördelade ϵ_t. De andra två metoderna misslyckas av olika anledningar att nå upp till önskad konfidensnivå i våra tester. Detta är delvis en effekt av att alla historiska avkastningar tilldelas lika vikt i skattningarna av VaR. En observation från våra resultat är att VaR skattad med den historiska simuleringsmetoden och varians-kovariansmetoden i större utsträckning beror på skattningsunderlaget. Om den historiska avkastningen inte överensstämmer någorlunda med framtida avkastningar, har dessa två modeller svårt att åstadkomma skattningar med en täckningsgrad på 95% nivå som innefattar vårt teoretiska värde på VaR. Detta är inte fallet med GARCH(1,1) som tillåter mer fluktuation i observationsunderlaget.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.
E-post: emmauddholm@hotmail.com. Handledare: Mathias Lindholm, Karl Rökaeus, Joanna Tyrcha.

Abstract

Value at risk (VaR) is a risk measure that measures the potential loss of an investment during a specific time and with a given probability. VaR has during the last few decades become a popular measure for risk management of different kind of financial instruments on the market. The purpose of this study is to compare estimations of 5% and 1% VaR from historical simulation, the variance-covariance method and GARCH(1,1). The comparison is done by analysing the share index S&P 500. Afterwards, the estimations are evaluated with a backtest based on a standard two-sided binomial test. The study finds GARCH(1,1) to be the superior estimation method for 5% VaR, no matter normal- or t-distributed ϵ_t. The other two methods fail to achieve significant estimations at the confidence level of our tests. This is partly a due to the fact that all historical returns are given the same weights in our estimations of VaR. An observation from our results is that VaR estimated by the historical simulation method and the variance-covariance method depend a greater deal on the underlying sample data. If the historical returns show little agreement with the future returns, these two models have difficulties achieving estimations with a 95% degree of coverage for our theoretical value of VaR. However, this is not the case with GARCH(1,1) which allows more fluctuations in the observation data.

Innehåll

1 Inledning **2**
1.1 Bakgrund och syfte . . . 2
1.2 Avgränsningar . . . 2

2 Teori **3**
2.1 Normalfördelning, lognormalfördelning och t-fördelning . . . 3
2.1.1 Applicering av teorin . . . 3
2.2 Value at Risk . . . 5
2.2.1 Historisk simulering . . . 5
2.2.2 Varians-Kovariansmetoden . . . 6
2.2.3 GARCH . . . 6
2.2.4 Expected shortfall . . . 7
2.2.5 Applicering av teorin . . . 8
2.3 Statistiska test . . . 9
2.3.1 Ljung-Box test . . . 9
2.3.2 ACF . . . 10
2.3.3 AIC och BIC . . . 10
2.3.4 Backtest . . . 10

3 Metod **12**
3.1 Data . . . 12
3.2 Stickprovsstorlek . . . 12
3.3 VaR-modeller . . . 15

4 Analys och resultat **16**
4.1 Stickprovsstorlek . . . 16
4.2 Historisk simulering . . . 20
4.2.1 Fix observationsperiod . . . 20
4.2.2 Rullande observationsperiod . . . 21
4.3 Varians-Kovariansmetoden . . . 22
4.3.1 Fix observationsperiod . . . 22
4.3.2 Rullande observationsperiod . . . 24
4.4 GARCH(1,1) . . . 25
4.4.1 Normalfördelning . . . 26
4.4.1.1 Fix observationsperiod . . . 26
4.4.1.2 Rullande observationsperiod . . . 27
4.4.2 t-fördelning . . . 28
4.4.2.1 Fix observationsperiod . . . 29
4.4.2.2 Rullande observationsperiod . . . 30
4.5 En kort efteranalys . . . 31

5 Diskussion **32**

A Appendix **35**
A.1 Tvådelat binomialtest . . . 35
A.2 Maximum likelihood-skattningar för GARCH(1,1) . . . 35
A.3 Tvådelat konfidensintervall för t-fördelningen . . . 36

1 Inledning

Under tidigt 1990-tal började value at risk (VaR) spridas och användas flitigt av den finansiella marknadens aktörer för att mäta den risk de stod inför vid en finansiell investering. Detta var en konsekvens av ett antal globala finanskriser som hade skakat om världen och bidrog till att medvetenheten om de finansiella riskerna ökade, se [10]. Nu var det inte bara stora vinster som stod i centrum för investerare, utan även uppskattningar av riskerna av en viss investering kom att få stor betydelse. Det finns idag många olika metoder för att försöka mäta och skatta denna risk. Vi skulle kunna beskriva begreppet "risk" som en negativ avvikelse från det, av någon, förväntade utfallet. Ekonomisk risk är ofta associerat med en förlust av en finansiell tillgång, exempelvis pengar. Än idag är VaR en av de mest kända och beprövade metoderna för att mäta dessa risker på.

Skattningar av VaR ämnar att svara på frågan "Hur mycket bör jag som mest kunna förlora på den här investeringen?". VaR är ett riskmått som beskriver den maximala förlusten av en investering under en given tidsperiod och med en på förhand bestämd sannolikhet.

1.1 Bakgrund och syfte

Ju mer komplex finansmarknaden blir, desto svårare blir det att hitta riskmått som på ett tillfredställande sätt kan prediktera riskerna förknippade med olika finansiella investeringar. Value at risk har nu under en längre tid varit ett populärt riskmått för dessa risker. Men hur väl fungerar VaR egentligen som skattning av finansiella marknadsrisker? Finns det några marknadsförhållanden som är mer önskvärda än andra för att kunna göra en bra uppskattning av denna risk? Finns det någon modell som fungerar bättre än någon annan och vilka för- och nackdelar kan dessa modeller tänkas ha?

Syftet med denna studie är att undersöka hur väl VaR skattar risken av en investering en dag framöver (1-dags VaR) samt om skattningarna skiljer sig mellan våra tre olika beräkningsmetoder. Metoderna vi kommer att använda oss av för att skatta VaR är historisk simulering, varians-kovariamsmetoden och GARCH(1,1). Dessa kommer i studien att tillämpas på ett aktieindex.

1.2 Avgränsningar

Som vid alla studier har vi varit tvungna att göra en del avgränsningar i våra analyser. Nedan diskuterar vi dessa avgränsningar och vilka konsekvenser de kan tänkas få på våra resultat.

Vid analyserandet av skattningarna av VaR med de olika metoderna har vi endast modellerat på ett enda aktieindex. Detta betyder att resultaten som denna studie presenterar inte kan ses som generella för dessa modeller då underlaget är för tunt.

I den historiska simuleringsmodellen och varians-kovariansmetoden har vi räknat med samma sannolikhetsvikter för alla observationer. Vi har inte tagit hänsyn till att senare observationer har en större påverkan på morgondagens avkastning och således på skattningen av VaR.

I alla modeller skattar vi även expected shortfall (ES) men vi gör endast ett så kallat backtest på vår skattning av VaR för att se hur väl denna skattning stämmer överens med verkligheten. Detta är dels för att de motsvarande beräkningarna för ES är mer komplicerade, dels för att det är VaR vi är intresserade av i denna studie och således får backtesting av skattad ES anses vara utanför ramen för arbetet.

2 Teori

Här presenteras den grundläggande matematiska teorin som vi använder oss av i denna studie. I avsnitten "Applicering av teorin" beskrivs utförligare hur vi tillämpar denna teori i vår analys.

2.1 Normalfördelning, lognormalfördelning och t-fördelning

Normalfördelning

En kontinuerlig stokastisk variabel X med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{1}$$

sägs vara normalfördelad med väntevärde μ och varians $\sigma^2 > 0$. Vi skriver $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, se [1, s. 100].

Lognormalfördelning

En positiv kontinuerlig stokastisk variabel $Y = e^X$ sägs vara lognormalfördelad om $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Vi skriver $Y \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$, se [1, s. 111].

t-fördelning

En kontinuerlig stokastisk variabel X med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\sqrt{\pi m}\Gamma(\frac{m}{2})} \cdot \frac{1}{(1+\frac{x^2}{m})^{(m+1)/2}}, \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{2}$$

sägs vara t-fördelad med m frihetsgrader. Vi skriver $X \sim t(m)$, se [3, s. 284].

2.1.1 Applicering av teorin

Vi kommer att använda den naturliga logaritmen av vår avkastning. Fortsättningsvis i texten kommer vi endast att benämna denna som "avkastningen" (alternativt den logaritmerade avkastningen), men det är då underförstått att vi menar den naturliga logaritmen av avkastningen. Vi antar att avkastningarna är oberoende (dock ej i kapitel 4.4) och likafördelade. I kapitel 4.3 gör vi även antagandet att avkastningarna är normalfördelade. Detta betyder att vår "vanliga" avkastning då kommer från en (oberoende och likafördelad) lognormalfördelning. För att sammanfatta detta, låt R_t (lognormalfördelad) vara vår vanliga avkastning från dag $t-1$ till dag t och P_t priset på vårt index dag t. Vi har då

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \tag{3}$$

och gör således transformationen

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \tag{4}$$

för att erhålla avkastningen r_t (normalfördelad) från dag $t-1$ till t. Logaritmerade avkastningar har flera fördelar framför vanliga avkastningar. Vi punktar upp de tre viktigaste anledningarna till varför man brukar föredra att räkna med logaritmerade avkastningar istället för aritmetiska.

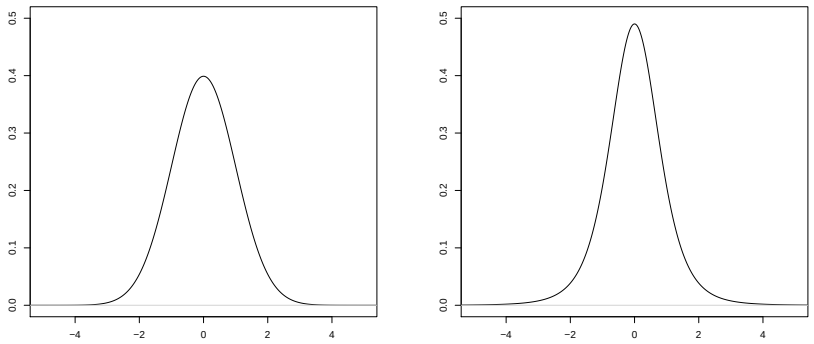
(i) Logaritmerade avkastningar är adderbara över tid vilket gör dem enkla att räkna med. För att se detta, låt $R_t^{(k)}$ och $r_t^{(k)}$ vara den vanliga respektive logaritmerade ackumulerade avkastningen efter k perioder (exempelvis dagar, månader eller år). Vi får således att

$$\begin{aligned} r_t^{(k)} &= \ln[1 + R_t^{(k)}] = \ln[(1 + R_t)(1 + R_{t-1})(1 + R_{t-2}) \cdots (1 + R_{t-k+1})] \\ &= \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + \ln(1 + R_{t-2}) + \cdots + \ln(1 + R_{t-k+1}) \\ &= r_t + r_{t-1} + r_{t-2} + \cdots + r_{t-k+1}. \end{aligned} \tag{5}$$

(ii) Ett vanligt antagande är att alla r_t är normalfördelade. Från (i) får vi då att även $r_t^{(k)}$ är normalfördelad eftersom denna är en summa av normalfördelade variabler[1].

(iii) Eftersom $P_t > 0$ och $P_{t-1} > 0$ i ekvation (3) och (4), så får vi en nedre gräns på $R_t >$ -1. Vi har följaktligen att $1 + R_t > 0 \Leftrightarrow \ln(1 + R_t) = r_t \in (-\infty, \infty)$, vilket fungerar när r_t är normalfördelad. Om vi däremot skulle anta en normalfördelning för R_t, skulle den nedre gränsen på -1 inte hållas då normalfördelningen är definierad för alla reella tal. Detta är således en anledning till att anta en lognormalfördelning för avkastningen istället för en normalfördelning, se [6].

Flera empiriska undersökningar från finansvärlden visar på att dagliga logaritmerade avkastningar ofta karaktiseras av fördelningar med tjocka vänstra svansar. Med detta menas att fördelningen, i någon mån, avtar långsamt då vi rör oss längsmed x-axeln mot $-\infty$. Detta är en anledning till varför man brukar föredra att modellera finansdata med t-fördelningen, då denna klassas som en tjock-svansad (*engelska: heavy tail*) fördelning, medan normalfördelningen är en typisk fördelning med tunna svansar, se [4]. I figur 1 ser vi en grafisk presentation av en normalfördelning och en t-fördelning. Vi ser att svansarna hos t-fördelningen är tjockare, det vill säga mer utdragna, än normalfördelningens. Till följd av t-fördelningens önskvärda egenskaper kommer vi att modellera med denna för att sedan jämföra resultatet med normalfördelningen i den sista modellen (GARCH(1,1), se kapitel 4.4).



(a) *Normalfördelning.* **(b)** *t-fördelning.*

Figur 1. *Jämförelse mellan en normal- och t-fördelning. x-axeln: avkastning, y-axeln: densitet.*

[1]sats från grundläggande sannolikhetsteori

2.2 Value at Risk

"...the maximal loss of a financial position during a given time period for a given probability.", se [6, s. 326].

Value at risk (VaR) är ett mått på den maximala förlust som en (finansiell) investering kan lida, för en given sannolikhet och under en bestämd tidsfrist. Enkelt beskrivet är VaR skillnaden mellan en portföljs värde idag (P_0) och den maximala förlust som kan inträffa under ett visst tidsintervall framöver med en sannolikhet p (vi skriver VaR_p), se figur 2. Matematiskt definieras VaR_p som

$$\mathrm{VaR}_p = \min\{m : \mathrm{P}(L \leq m) \geq 1 - p\}. \tag{6}$$

där L är den så kallade förlustfunktionen[2] (*engelska: loss function*) för vår investering. Om förlustfunktionens fördelningsfunktion F_L är känd så fås VaR_p som den (1-p):te percentilen av denna fördelning. Definitionen av den c:te percentilen av en stokastisk variabel Y är

$$F_Y^{-1}(c) = \min\{m : \mathrm{P}(F_Y(m) \geq c) \tag{7}$$

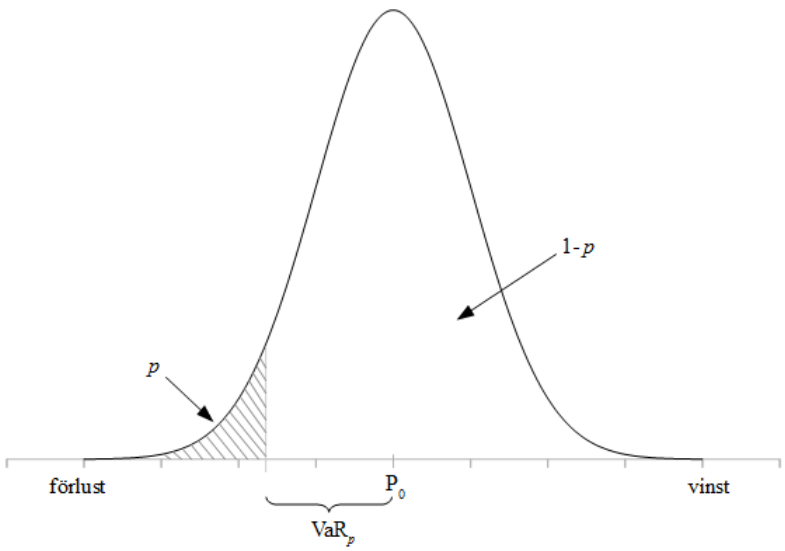
där F_Y är fördelningsfunktionen till Y och F_Y^{-1} är dess invers[3] och vi får då att

$$\mathrm{VaR}_p = F_L^{-1}(1 - p) \tag{8}$$

där F_L^{-1} är inversen av F_L, se [4, s. 166]. En ekvivalent definition som den i (6) ges av

$$p = \mathrm{P}(L \geq \mathrm{VaR}_p) = 1 - \mathrm{P}(L < \mathrm{VaR}_p) \tag{9}$$

där L är värdet på förlustfunktionen. se [6]



Figur 2. *Grafisk tolkning av* VaR. *Beroende på hur man definierar förlustfunktionen L, kan man räkna på vänstra eller högra svansfördelningen, resultaten blir alltid samma.*

2.2.1 Historisk simulering

Antag att vi har en vektor $\boldsymbol{r}_n = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ av (för oss kända) dagliga historiska avkastningar. Vi står vid tiden t och gör ett antagande om att $\boldsymbol{r}_n$ kan beskriva de n kommande dagarnas (vid tiden t okända) avkastning. Det vill säga vi antar att $\boldsymbol{r}_n$ är en realisering av de framtida

[2] mer om förlustfunktionen i avsnitt 2.2.5

[3] F_Y måste vara monotont växande för att inversen F_Y^{-1} ska existera

avkastningarna $\boldsymbol{R}_{t+n} = (R_{t+1}, R_{t+2}, \ldots, R_{t+n})$, där R_{t+i} är en stokastisk variabel som blir känd vid tiden $t+i$, $i = 1, \ldots, n$. Vi gör inget antagande om fördelningen för R_{t+i}, utan använder oss här av den empiriska fördelningsfunktionen för de historiska avkastningarna $\boldsymbol{r}_n$, se [5]. Sortera nu avkastningarna i $\boldsymbol{r}_n$ så att $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \cdots \leq r_{(n)}$, där $r_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$, är den k:te lägsta avkastningen i $\boldsymbol{r}_n$. Beteckna den sorterade vektorn av avkastningar med $\boldsymbol{r}_{(n)}$ och skapa förlustfunktionen L_n som en funktion av $\boldsymbol{r}_{(n)}$.[4] VaR_p fås nu som

$$\mathrm{VaR}_p = L_{[n \cdot p]+1} \tag{10}$$

där $L_{[n \cdot p]+1}$ betecknar elementet på plats nummer $[n \cdot p] + 1$ i L [5], se [4].

2.2.2 Varians-Kovariansmetoden

Antag att vi har en vektor $\boldsymbol{r}_n = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ av (för oss kända) dagliga historiska avkastningar. Vi står vid tiden t och gör ett antagande om att $\boldsymbol{r}_n$ kan beskriva de n kommande dagarnas avkastning. Det vill säga vi antar att $\boldsymbol{r}_n$ är en realisering av de framtida avkastningarna $\boldsymbol{R}_{t+n} = (R_{t+1}, R_{t+2}, \ldots, R_{t+n})$, där R_{t+i} är en stokastisk variabel som blir känd vid tiden $t+i$, $i = 1, \ldots, n$. Skatta väntevärde, μ, och standardavvikelse, σ, för avkastningarna i $\boldsymbol{r}_n$. I och med att observationsmängden består av ett ändligt antal, n, kan dessa parametrar lämpligen skattas med stickprovsmedelvärdet i ekvation (11) och stickprovsstandardavvikelse som fås som roten ur ekvation (12).

$$\hat{\mu} = \bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_i. \tag{11}$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (r_i - \bar{r})^2. \tag{12}$$

Vi gör nu ett fördelningsantagande där vi antar att dessa observationer kommer från en normalfördelning vars parametrar vi skattat i ekvation (11) och (12). Det vill säga vi antar att $R_{t+i} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. VaR_p fås nu som

$$\mathrm{VaR}_p = \hat{\mu} + \lambda_p \cdot s \tag{13}$$

där λ_p är p-percentilen för en standardnormalfördelning, se [7].

2.2.3 GARCH

GARCH står för generalized autoregressive conditional heteroskedasticity och är som namnet antyder en utveckling av ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity)[6]. ARCH-effekter betyder att dagens finansmarknads volatilitet beror av tidigare periods volatilitet, se [2]. GARCH-modeller används flitigt i finansvärlden för att fånga upp dessa ARCH-effekter och modellera tidsserier med varierande varians över tiden, så kallade icke-stationära tidsserier.[7] Låt $r_t, t = 1, 2, \ldots,$ utgöra en tidsserie av logaritmerade avkastningar och skapa residualerna $a_t = r_t - \mu_t$, där μ_t är väntevärdet av r_t och a_t är den så kallade innovationen vid tiden t.[8] Antag att innovationerna a_t är oberoende och likafördelade stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians 1. a_t sägs då följa en GARCH(p, q)-modell om

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \qquad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{14}$$

[4] vårt fall definierar vi $\mathrm{L}_n = \boldsymbol{r}_n$ då vi skattar 1-dags VaR, mer om detta i kapitel 2.2.5

[5] $[\cdot]$ betecknar heltalsdelen av talet, det vill säga $[n \cdot p] \leq n \cdot p$ med likhet då $n \cdot p$ är ett heltal

[6] se exempelvis [6] för en djupare diskussion om ARCH-modeller

[7] En tidsserie sägs vara svagt stationär om $\mathrm{E}[r_t] = \mu$ och $\mathrm{Cov}(r_t, r_{t-l}) = \gamma_l$, $l = 0, 1, 2, \ldots,$ det vill säga både väntevärde och kovarians (och varians då $l = 0$) av alla r_t är oberoende av tiden.

[8] OBS: inget antagande om oberoende r_t

där

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \beta_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1.$$

Ett vanligt antagande är att ϵ_t är standardnormalfördelad eller t-fördelad, se [6, s. 132].

Prognos av framtida standardavvikelse i GARCH(1,1)

En GARCH(1,1)-modell definieras enligt ekvation (14) som

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \qquad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{15}$$

där $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, 1 \geq \beta_1 \geq 0, (\alpha_1 + \beta_1) < 1$. Modellen antar således att dagens varians beror på något variansmedelvärde, α_0, gårdagens residual i kvadrat, a_{t-1}^2, och gårdagens varians, σ_{t-1}^2. Antag nu att vi befinner oss vid tiden t och vill förutsäga (göra vår bästa gissning) av σ_{t+1}, det vill säga morgondagens standardavvikelse för vår avkastning. Vi får då enligt ekvation (15) utseendet på morgondagens varians som

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 \tag{16}$$

där α_0 är känd sedan tidigare och α_t samt β_t blir kända vid tiden t (idag). Således fås en skattning av morgondagens varians som

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{\alpha_0} + \hat{\alpha}_1 a_t^2 + \hat{\beta}_1 \sigma_t^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\hat{\sigma}_{t+1}^2} = \hat{\sigma}_{t+1} \tag{17}$$

där $\hat{\alpha_0}, \hat{\alpha_1}, \hat{\beta}_1$ skattas med till exempel maximum likelihood-metoden[9] i någon lämplig programvara, förslagsvis **R**.

Beräkning av VaR

Som tidigare nämnts fås VaR som den p:te percentilen av avkastningens (förlustfunktionens) fördelning. Med beteckningarna ovan får vi

$$\text{VaR}_p = \hat{\mu}_t + c_p \cdot \hat{\sigma}_{t+1} \tag{18}$$

där c_p betecknar den p:te percentilen för den underliggande fördelningen, det vill säga den fördelningen som vi antar för ϵ_t. Observera att om vi antar att $\mu_t \neq 0$ i ekvation (18) så skattas även denna lämpligen med maximum likelihood-metoden.[10]

2.2.4 Expected shortfall

Expected shortfall (ES) definieras som

$$\text{ES}_p = \frac{1}{p} \int_0^p \text{VaR}_u \, du. \tag{19}$$

ES används främst då VaR inte räcker till i analyserandet av risken vid exempelvis en finansiell investering. VaR som riskmått tillhandahåller inte någon information om hur avkastningens (vänstra) svans-fördelning (*engelska: tail distribution*) ser ut utan ger enbart ett värde, nämligen p-percentilen av förlustfunktionens fördelning (se kapitel 2.2). Vi får således ingen uppfattning om hur stor den maximala förlusten eller väntevärdet av förlusten av vår investering kan bli om vi skulle utsättas för en förlust större än VaR_p. En sådan förlust befinner sig i det gråstreckade

[9] se appendix

[10] det vill säga medelvärdesfunktionen, μ_t, följer någon ARMA(m, s)-modell, se exempelvis [6]

området i figur 2 och inträffar, enligt våra antaganden, med en sannolikhet av p. ES ger ett medelvärde av denna möjliga förlust. En ekvivalent representation av definitionen i ekvation (19) är

$$\mathrm{ES}_p = \frac{1}{p}\int_0^p F_L^{-1}(1-u)\,du = \frac{1}{p}\int_1^{1-p} F_L^{-1}(u)\,du \tag{20}$$

där L är förlustfunktionen och F_L är dess fördelningsfunktion, se [4].

Ett exempel med historisk simulering

Antag att vi har två vektorer med 5 dagliga avkastningar i varje vektor

$$X_5 = (-0.020, -0.009, 0.012, 0.013, -0.015)$$
$$Y_5 = (-0.010, 0.016, -0.009, -0.200, 0.011)$$

som vi sorterar och erhåller

$$X_{(5)} = (-0.020, -0.015, -0.009, 0.012, 0.013)$$
$$Y_{(5)} = (-0.200, -0.010, -0.009, 0.011, 0.016).$$

Antag nu att vi är intresserade av 40% percentilen, det vill säga $\mathrm{VaR}_{0.40}$.[11] Vi får $\widehat{\mathrm{VaR}}^X_{0.40} = -0.015$ och $\widehat{\mathrm{VaR}}^Y_{0.40} = -0.010$, där de upphöjda indexet talar om vilken vektor vi menar. Detta betyder att vi med 40% sannolikhet kommer att förlora 1.5% respektive 1.0% eller mer av vår investering nästkommande dag, men vi vet inte hur mycket mer vi kan förlora genom att enbart ta hänsyn till vår framräknade $\widehat{\mathrm{VaR}}$. Vi skattar således ES för att få en uppfattning om vad förlusten kan uppgå till. $\widehat{\mathrm{ES}}$ räknas ut som medelvärdet av alla $x_i \leq \widehat{\mathrm{VaR}}^X_{0.40}$ respektive $y_i \leq \widehat{\mathrm{VaR}}^Y_{0.40}$, $i = 1, \ldots, 5$.

$$\widehat{\mathrm{ES}}^X_{0.40} = \frac{-0.020 - 0.015}{2} = -0.0175$$
$$\widehat{\mathrm{ES}}^Y_{0.40} = \frac{-0.200 - 0.010}{2} = -0.1050,$$

det vill säga index X_5 kan ge en daglig medelförlust på 1.75% och index Y_5 kan ge en daglig medelförlust på 10.50%. Detta exempel framhäver framförallt två saker som är viktiga att poängtera. För det första, genom att endast ta hänsynt till VaR som riskmått, hade en okunnig investerare troligtvis ansett att det smartaste investeringsdraget är att investera i index Y_5 i och med att $\widehat{\mathrm{VaR}}^Y_{0.40} < \widehat{\mathrm{VaR}}^X_{0.40}$. Den mer erfarna investeraren hade också vägt in värdet av ES och sett att $\widehat{\mathrm{VaR}}^Y_{0.40} >> \widehat{\mathrm{VaR}}^X_{0.40}$ och då det är lika stor risk att förlora, valt index X_5.[12] Så trots att värdet på VaR är mindre för ett index eller en investering behöver detta inte betyda att vi förlorar mindre när vi väl går med förlust. Det andra som är värt att notera är att ES är just ett medelvärde av förlusterna som är större än VaR. Så enligt detta mycket förenklade exempel, finns inte det skattade ES att finna som en möjlig förlust bland de historiska observationerna.

2.2.5 Applicering av teorin

Förlustfunktionen i kapitel 2.2 och 2.2.4 beskriver förlusten eller risken av en investering under en viss tidsperiod mätt i någon valuta. I denna analys undersöker vi endast daglig VaR, vilket betyder att vårt L i ekvation (9) är förlusten under en dags tid. I och med detta korta tidsintervall bortser vi från diskonteringar och räntor som man bör ta hänsyn till vid studerande av

[11] OBS: Detta är endast fiktiva värden. Man är sällan intresserade av VaR på denna nivå.

[12] dessa investerares gillar inte att ta alltför stora risker och vill därför inte förlora mycket pengar men tänker mindre på att vinna stort, så kallad riskaversion (*engelska: risk averse*)

längre tisperioder.

I följande analyser kommer vi att använda VaR och ES lite annorlunda än de är definierade i kapitel 2. VaR och ES är definierade som den maximala potentiella förlust respektive väntevärdet av denna, under en viss period och med en viss sannolikhet, mätt i någon valuta. I våra analyser kommer vi istället att referera till VaR och ES som en procentuell förlust på grund av att vi räknar på (logaritmerad) avkastning och inte absoluta penningbelopp. Vår förlustfunktion, L, kan alltså definieras som förlusten av en investering mätt i procentuella (relativa) termer gentemot det investerade kapitalet; det vill säga vår avkastning. En orsak till detta är att vi inte räknar med något bestämt investerat belopp, utan alla kalkyler redovisas i procentuella andelar. Vi har alltså $L = r_t$, men vanligt är att man låter $L = -r_t$ för att få ett positivt värde på $\widehat{\text{VaR}}$ och $\widehat{\text{ES}}$. Vi har i denna studie istället valt att räkna med negativa värden, resultaten bli ändå samma. Låt oss anta att vi får en skattning av 5% VaR till -0.1. Med vårt tillvägagångssätt i denna studie betyder detta att vi med 95% säkerhet kan säga att vi som mest kommer förlora 10% av vårt investerade kapital.[13] Så om vi exempelvis har investerat 10 000 kronor, så kommer vi i 95% av fallen att få tillbaka 90% eller mer av vårt investerade kapital. Alltså, enligt "standard"-metoden så skulle $\widehat{\text{VaR}}_{0.05} = 9\,000$ kronor, medan vi i denna analys istället skriver $\widehat{\text{VaR}}_{0.05} = -0.1$.[14] Viktigt att påpeka är att vi använder det vedertagna språket kring VaR och ES i texten, så om vi säger att skattningen är "högre" så är den lägre (mer negativ) i vår skala mätt och vice versa. Vi benämner således alltid skattningarnas storlek mätt i den positiva förlusten (i absoluta tal).

Som tidigare nämnts så kommer vi att begränsa oss till att räkna på 1-dags VaR i denna studie. I ekvation (15) kommer vi att anta att ϵ_t kommer från en standardnormalfördelning eller en standardiserad t-fördelning[15]

2.3 Statistiska test

Här presenteras övergripligt den matematiska bakgrunden för de statistiska test vi använder oss av i vår analys.

2.3.1 Ljung-Box test

Ljung-Box testet från 1978 är en utveckling av Box-Pierce test[16] från 1970. Ljung-Box test kan användas för att undersöka om det existerar någon signifikant autokorrelation i en dataserie. Teststatistikan ges av

$$Q(m) = T(T+2)\sum_{l=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_l}{T-l} \quad \sim \chi^2(m) \tag{21}$$

där T är antalet observationer i dataserien, m är antalet frihetsgrader och $\hat{\rho}_l$ är den skattade korrelationen mellan r_t och r_{t-l}. Under nollhypotesen antar vi att alla r_t är oberoende och likafördelade, så $Q(m)$ blir således asymptotiskt $\chi^2(m)$-fördelad med m frihetsgrader.[17] Testet prövar följaktligen hypoteserna

$$H_0 : \text{alla } \rho_k = 0, \;\; k = 1, \ldots, m, \qquad H_1 : \rho_k \neq 0, \;\; \textit{för något } k = 1, \ldots, m. \tag{22}$$

[13] OBS: Vi använder oss av logaritmerade avkastningar i denna rapport, men eftersom $e^{-0.1} \approx 0.90 = 90\%$, så blir resultaten snarlika.

[14] OBS: Detta är endast fiktiva värden. 1-dags $\text{VaR}_{0.05} = -10\%$ är väldigt extremt.

[15] om x_p är den p:te percentilen för en t-fördelning, så är $x_p/\sqrt{n/(n-2)}$ den p:te percentilen för en standardiserad t-fördelning, där n är antalet frihetsgrader, se [6]

[16] se exempelvis Tsay

[17] för definition av $\chi^2(m)$-fördelningen, se exempelvis [1]

H_0 förkastas med konfidensgraden $1-p$ om $Q(m) > \chi^2_p(m)$, där p är den önskade signifikansnivån för en $\chi^2(m)$-fördelning. Då H_0 förkastas säger vi att vi har fått ett signifikant resultat i testet, se [2].

2.3.2 ACF

Autokorrelationsfunktionen (*engelska: autocorrelation function (ACF)*) i en tidsserie beskriver (auto)korrelationen mellan två ingående datapunkter och definieras som

$$\rho_l = \frac{\mathrm{Cov}(r_t, r_{t-l})}{\sqrt{\mathrm{Var}(r_t)\mathrm{Var}(r_{t-l})}}. \tag{23}$$

Värdet av denna funktion ligger alltid mellan -1 och 1. Då $l = 0$ antar funktionen sin övre gräns, vi får nämligen täljaren $\mathrm{Cov}(r_t, r_t) = \mathrm{Var}(r_t)$ och hela uttrycket i ekvation (23) förenklas till 1, se [6, s. 30].

2.3.3 AIC och BIC

AIC (Akaike information criterion) och BIC (Schwarz-Bayesian information criterion) är två test som brukar användas för att ta fram den bäst anpassade modellen för en samling datapunkter, se [6, s. 48]. Dessa två kriterium brukar definieras som

$$\begin{aligned} \mathrm{AIC} &= -2 \cdot \ln(L) + 2 \cdot k \\ \mathrm{BIC} &= -2 \cdot \ln(L) + 2 \cdot \ln(n) \end{aligned} \tag{24}$$

där $\ln(L)$ är loglikelihoodfunktionen, n är antalet observationer i dataunderlaget och k är antalet skattade parametrar i den anpassade modellen, se [8]. AIC och BIC ska vara så låga som möjligt för bästa uppnådda modellanpassning, se [6, s. 49].

2.3.4 Backtest

Backtesting är en metod som används för att kontrollera en modells skattningar och resultat mot verkliga utfall. Man tillämpar sina skattningar från modellen på ett referensunderlag av verkliga observationer och undersöker om resultatet stämmer överens med det förväntade utfallet. Detta görs med en viss bestämd signifikansnivå och man drar därefter slutsatsen att modellen kan anses beskriva verkligheten med denna önskade noggranhet, alternativt att modellen inte kan det och bör justeras eller förkastas.

Antag att vi har en datamängd med dagliga (logaritmerade) avkastningar $\{r_t\}$ och till var och en av dessa har vi ett korresponderande värde på skattad daglig VaR. Skapa förlustfunktionen L_t som en funktion av $\{r_t\}$ och definiera

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{om } L_i \geq \mathrm{VaR}_i \\ 0 & \text{om } L_i < \mathrm{VaR}_i \end{cases} \tag{25}$$

där Y_i är en indikatorvariabel som räknar antalet gånger som förlusten är större än den skattade VaR_i och i är antalet dagar.[18] Vi antar nu att alla Y_i är oberoende. Då blir Y_i oberoende och likafördelade Bernoullivariabler som antar värdet 1 med sannoliket p och 0 med sannolikhet $1-p$. Vi får att

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i \sim \mathrm{Bin}(n, p) \tag{26}$$

[18] OBS: eftersom vi har definierat $L_t = r_t$ så får vi omvända tecken i ekvation (25), men resultatet blir återigen samma

där n är antalet observerade avkastningar. Vi kan således utföra ett tvåsidigt binomialtest[19] för att se om denna summa kan antas komma från en binomialfördelning med de angivna parametrarna, se [5]. Detta test sätts upp av hypoteserna $H_0 : p = p_0$ samt den alternativa hypotesen $H_1 : p \neq p_0$, där $p_0 = 0.05$ eller 0.01. Om testet visar på att summan kan antas komma från en binomialfördelning med parametrarna n och p, kan vi inte förkasta nollhypotesen på signifikansnivån p. Detta ska tolkas som att det inte finns tillräckligt med information för att kunna förkasta H_0. Vi accepterar således nollhypotesen på denna nivå och drar slutsatsen att $\widehat{\mathrm{VaR}}_{\mathrm{p}}$ ligger tillräckligt nära det sanna värdet av VaR_p på den givna signifikansnivån i testet. Vi säger att resultatet av testet är ej signifikant alternativt icke-signifikant, se [1].

[19] se appendix

3 Metod

I detta kapitel beskriver vi övergripande hur vi har gått till väga för att lösa vår frågeställning. Vi redogör kort för vilken data vi använt oss av i analysen, antalet observationer samt vilka modeller vi valt att analysera vår data med och en motivering till varför.

Vi har genom litteraturstudier inhämtat information och kunskap om de tre analysmodellerna som kommer att användas i denna studie (se kapitel 2.2 för beskrivning av modellerna). Därefter har vi applicerat den inhämtade teorin på vår serie med avkastningar från indexet S&P 500 (se kapitel 3.1). När vi fått fram våra skattningar av VaR har dessa sedan testats med backtesting (se kapitel 2.3.4) för att se hur väl de överensstämmer med verkliga utfall. Alla statistiska beräkningarna har utförts i programmeringsspråket **R**. Därefter har resultaten jämförts och diskuterats i kapitel 5.

3.1 Data

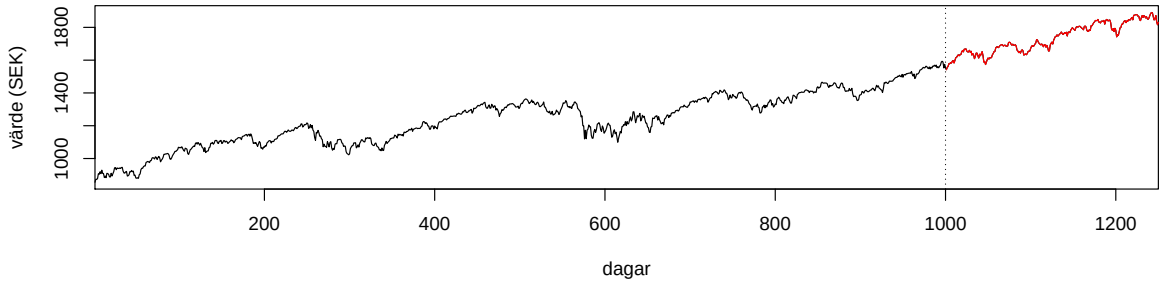
I denna studie kommer vi att analysera historisk data från det amerikanska aktieindexet S&P 500. Data är hämtad från NASDAQ's hemsida, www.nasdaq.com. Indexpriserna är från perioden 2009-04-27 till 2014-04-14, totalt 1 250 värden. Priserna transformeras om till dagliga logaritmerade avkastningar innan de implementeras i modellerna.

3.2 Stickprovsstorlek

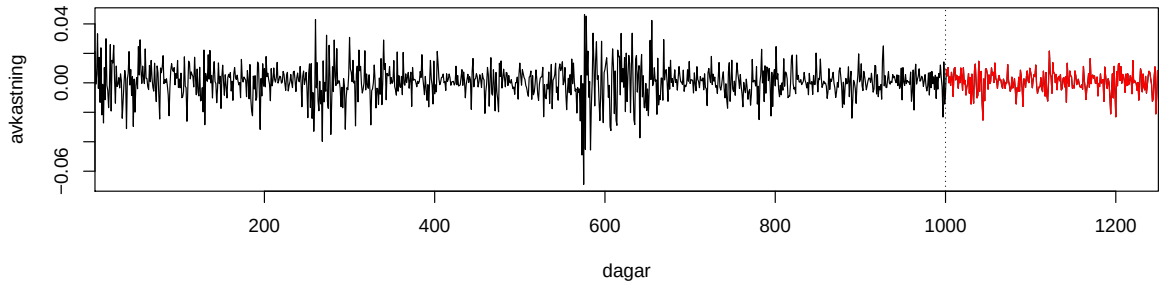
Antalet observationer som tas med som underlag för våra skattningar har stor betydelse för hur våra resultat blir. Låt oss ta ett enkelt exempel. Anta att vi har 10 observerade historiska avkastningar av vår finansiella tillgång som ett skattningsunderlag. Dessa 10 observationer antas då kunna beskriva alla möjliga utfall för framtida händelser. Man inser utan större ansträngning att detta underlag är otillräckligt för att få relevanta skattningar för framtida avkastningar. Om vi istället har 1 000 observationer, har vi med allra största sannolikhet en större variation i vår observationsdata och våra skattningar bör bli mer användbara.

En annan faktor som påverkar våra skattningar och därför är viktig att ta hänsyn till är vilken tidsperiod vår data är inhämtad ifrån. Om vi vill skatta avkastningen för imorgon och på så sätt få fram vår VaR, bör vi använda oss av ett underlag som i allra högsta grad (i så stor utsträckning som möjligt) kan anses beskriva framtidens händelser väl. Ett tydligt exempel är om vi i vår skattning av morgondagens VaR endast använder oss av historisk data från den globala finanskrisen 2007-2008, då värdeförändringen från dag till dag var konstant negativ och aktiemarknaden över lag gick med förlust. En VaR skattad från detta underlag, med exempelvis historisk simulering, skulle visa på stora möjliga finansiella förluster och troligtvis inte ge en rättvis bild av en dagsmarknad som inte befinner sig i en ekonomisk kris. Vi kommer inte att underöka detta vidare i denna analys, utan nöjer oss med att försäkra oss om att inga extrema observationer utgör större delen av vårt använda historiska dataset.

Vi kommer i denna analys att använda oss av 500 respektive 1 000 observerade historiska avkastningar av indexet S&P 500. De 500 datapunkterna är ifrån perioden 2011-04-19 till 2014-04-13 (dag 501 till 1000 i figur 3) och de 1 000 datapunkterna är ifrån 2009-04-27 till 2014-04-13 (dag 1 till 1000 i figur 3). Vi tillämpar sedan våra skattningar på de 250 nästkommande dagarna, det vill säga perioden 2013-04-17 till 2014-04-14, för att se hur bra våra skattningar stämmer överens med det verkliga utfallet. Denna period utgörs av den röda linjen i figur 3 och är den period på 250 dagar som vi alltid kommer att jämföra våra skattningar mot i kapitel 4, vårt så kallade referensunderlag.



(a) *Pris av S&P 500 under perioden 2009-04-27 till 2014-04-14, 1 250 dagar.*



(b) *Logarimerad avkastning av S&P 500 under perioden 2009-04-27 till 2014-04-14, 1 250 dagar.*

Figur 3. *Svart kurva: skattningsunderlaget. Röd kurva: referensunderlag. Fix period 500 observationer: dag 501 till dag 1 000 på x-axeln. Fix period 1 000 observationer: dag 1 till dag 1 000 på x-axeln.*

Fix och rullande observationsperiod

Varje modell kommer att analyseras med en *fix observationsperiod* av historiska avkastningar. Därefter görs analysen om och för varje dag som går läggs den nya observerade dagsavkastningen till samtidigt som den äldsta tas bort. Den senare kallar vi för *rullande observationsperiod*. Detta gör vi för att undersöka om vi kan förvänta oss bättre skattningar om vi kontinuerligt uppdaterar observationsunderlaget med den senaste observationen. Dessa två analyser kommer att göras för båda observationsstorlekarna, 500 och 1 000, utom då vi skattar VaR med GARCH. Då kommer vi endast att använda oss av 500 observerade datapunkter (se figur 3 över våra använda data).

Modellerna baserade på den rullande observationsperioden kommer således att använda observationerna från den röda kurvan i figur 3 för att skatta VaR och ES. Observationsperioden ”rullar” ett steg framåt för varje dag som går och vi får ett intervall av data som kan beskrivas med algoritmen $[a_{1001-n+t}, a_{1000+t}]_{t=0}^{250}$, där $n = 500$ eller $n = 1\,000$ beroende på hur många observationer vi har i skattningsunderlaget. Här talar t om hur många dagar in på den röda kurvan vi stegat oss, det vill säga $t = k$ motsvarar dag $1\,000 + k$ på x-axeln i figur 3.

Metod 1 (M1) och Metod 2 (M2)

I Metod 1 och Metod 2, hädanefter kallade M1 respektive M2, syftar ordet ”metod” till metoden som observationsunderlaget är genererad på. Vi kommer i denna studie att använda oss av en icke-simulerad avkastning (M1) och en simulerad avkastning (M2).

M1

Låt $\boldsymbol{r}_n = (r_{t-n+1}, r_{t-n+2}, \ldots, r_t)$ vara en vektor med n på varandra följande dagliga historiska avkastningar med den sista observationen idag, vid tiden t. Detta är utseendet på vårt observationsunderlag med M1 där n är lika med 500 eller 1 000 beroende på vilken stickprovsstorlek vi modellerar med. Nu skattar vi som vanligt $\widehat{\mathrm{VaR}}_p$ och $\widehat{\mathrm{ES}}_p$ med historisk simulering, varians-kovariansmetoden och GARCH(1,1), baserat på avkastningarna i $\boldsymbol{r}_n$ och med vald signifikansnivå p. Detta betyder att vi i M1 kommer att använda alla 500 respektive 1 000 observationer för att skatta VaR och ES. Vi gör således ett antagande om att verkligheten kommer att upprepa sig (nästintill) identiskt med våra historiska data.

M2

Metod 2 är aningen mer komplicerad och vi punktar upp proceduren för att göra denna tydligare. Låt först $\boldsymbol{r}_n = (r_{t-n+1}, r_{t-n+2}, \ldots, r_t)$ vara en vektor med n på varandra följande dagliga historiska avkastningar med den sista observationen idag, vid tiden t. $\boldsymbol{r}_n$ är alltså den avkastning vi använder i M1.

(1) Dra m stycken element med återläggning från $\boldsymbol{r}_n$.

(2) Bilda en ny vektor $\boldsymbol{r}_m^* = (r_1^*, r_2^*, \ldots, r_m^*)$, där r_k^*, $k = 1, \ldots, m$, är den k:te dragna avkastningen från $\boldsymbol{r}_n$.

(3) Skatta $\widehat{\mathrm{VaR}}_p$ och $\widehat{\mathrm{ES}}_p$ med historisk simulering, varians-kovariansmetoden eller GARCH, baserat på avkastningarna i $\boldsymbol{r}_m^*$.

(4) Upprepa punkt (1), (2) och (3) 1 000 gånger.

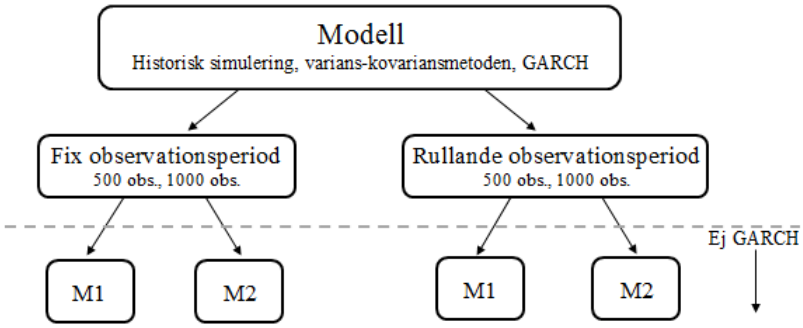
I M2 kommer vi således att simulera en "ny" avkastning från vårt aktieindex genom slumpmässig dragning och återläggning av våra avkastningar i $\boldsymbol{r}_n$. I vår studie kommer vi låta $m = n$ som återigen är lika med 500 eller 1 000 observationer beroende på vilken stickprovsstorlek vi analyserar. Den slutgiltiga skattningen på VaR och ES för M2 tas som medelvärdet av alla 1 000 simuleringar, nämligen

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_p = \frac{1}{1\,000} \sum_{j=1}^{1\,000} \widehat{\mathrm{VaR}}_{p,j} \tag{27}$$

$$\widehat{\mathrm{ES}}_p = \frac{1}{1\,000} \sum_{j=1}^{1\,000} \widehat{\mathrm{ES}}_{p,j} \tag{28}$$

där $\widehat{\mathrm{VaR}}_{p,j}$ respektive $\widehat{\mathrm{ES}}_{p,j}$ är skattningen av VaR_p respektive ES_p från den j:te simuleringen, med signifikansnivå p.

För den historiska simuleringsmodellen och varians-kovariansmetoden kommer vi att använda både M1 och M2 för att generera våra observationsdata och skatta VaR och ES, medan vi för GARCH(1,1) endast kommer att använda oss av M1. I figur 4 ser vi en sammanfattning av de olika modellerna vi kommer att testa i vår analys.



Figur 4. *Modellindelning. OBS: som ovan nämnts modelleras* GARCH$(1,1)$ *endast med M1 underlaget av de 500 observationerna.*

3.3 VaR-modeller

De tre modellerna vi valt att använda för att skatta VaR är historisk simulering, varians-kovarionsmetoden och GARCH(1,1). Det två förstnämnda modellerna är relativt enkla i sin utformning och teori medan den tredje är mer komplicerad.

Historisk simulering har fördelen att den inte kräver något fördelningsantagande för det historiska dataunderlaget. Modellen tar även hänsyn till eventuella extremvärden i data till skillnad från exempelvis varians-kovariansmetoden. Dock är en nackdel med den historiska simuleringsmodellen att den endast kan anta historiska värden som redan inträffat. Både den historiska simuleringsmodellen och varians-kovariansmetoden är frekvent använda i praktiken på grund av att de är lätthanterliga och enkla att förstå. Något som brukar ses som en nackdel med varians-kovariansmetoden är att denna ofta antar en normalfördelning för avkastningen, vilket många kritiker menar inte stämmer överens med verkligheten, se [5]. Däremot bidrar detta till att varians-kovariansmetoden blir mycket lätt att räkna på. Genom att skatta medelavkastningen (väntevärdet) och standardavvikelsen kan man snabbt beräkna den sökta percentilen ($\widehat{\mathrm{VaR}}_p$) med hjälp av standardnormalfördelnings-percentilen för önskad percentil p.

GARCH(1,1) är den enklaste och mest använd GARCH-modellen i finansvärden, se [6]. Denna modell är mer invecklad än de två tidigare beskrivna, då den innehåller en predikterande effekt. De två förstnämnda modellerna använder sig av historiska data för att antingen simulera nya avkastningsmönster av de historiska värdena eller skatta väntevärde och standardavvikelse för att därefter ta fram den antagna (normal)fördelning. GARCH-modellen går steget längre och gör en kvalificerad gissning (skattning) av morgondagens standardavvikelse för att beräkna VaR, se kapitel 2.2.3.

4 Analys och resultat

I detta kapitel presenteras och redovisas den huvudsakliga analysen och resultaten kopplade till vår frågeställning. Vi kommer att inleda med en enklare analys av stickprovsstorlekens betydelse för att sedan gå in på de enskilda VaR-modellerna och deras resultat.

4.1 Stickprovsstorlek

Som tidigare nämnts så har antalet observationer som tas med som underlag för våra skattningar betydelse för vårt resultat. Det är därför av lika stor vikt att fundera över hur stort skattningsunderlag som behövs för att utföra en viss analys och ur denna få ett rättvisande och tillförlitligt resultat. Har vi en bra modell men inte ett tillräckligt omfattande observationsunderlag, kan resultaten ändå bli skeva och opålitliga. Detta kan även ske om man har alldeles för för stort dataunderlag, då observationerna från längre tid tillbaka eventuellt inte längre ger en korrekt bild av verkligheten. Vi föreslår därför att vi gör en analys av hur många observationer som kan utgöra ett lämpligt skattningsunderlag i våra modeller. Vi kommer i denna analys att begränsa oss till normalfördelad data med oberoende observationerna samt en noggrannhet på 95%, det vill säga $p = 0.05$. Observera att detta inte alltid är fallet i vår huvudanalys där vi skattar VaR, men det kan ändå ge en fingervisning om hur många observationer som bör tas med.

Vi börjar med att generera 5 000 normalfördelade variabler med väntevärde 0 och standardavvikelse 0.02, $X_i \sim N(0, 0.02)$, $i = 1, \ldots, 5\,000$. Väntevärde och varians är godtyckligt valda och ska representera ungefärliga värden från en verklig dagsavkastning av ett finansiellt index. Stickprovsstorlekarna vi kommer att undersöka är $k = 10, 100, 500, 1\,000, 5\,000$. För varje k gör vi följande:

(1) dra k stycken element med återläggning från mängden av alla simulerade X_i, $i = 1, \ldots, 5\,000$,

(2) skatta 5% VaR utifrån dessa k dragna värden och benämn denna $\widehat{\mathrm{VaR}}_{0.05,j}$, $j = 1, \ldots 1\,000$,

(3) upprepa punkt (1) och (2) 1 000 gånger,

(4) skatta medelvärdet av VaR utifrån de 1 000 simuleringarna enligt ekvation (27). Vi får således k stycken skattningar av $\mathrm{VaR}_{0.05}$. Låt oss beteckna dessa $\widehat{\mathrm{VaR}}^k_{0.05}$, där k är stickprovsstorleken som skattningen är baserad på.

Vi vill nu jämföra $\widehat{\mathrm{VaR}}^k_{0.05}$ med det verkliga värdet på $\mathrm{VaR}_{0.05}$ och börjar för enkelhetens skull med att sätta ett på förhand fixt intervall som skattningen tillåts att variera emellan. För att få ett tillräckligt snävt intervall tillåter vi endast en variation av 1/4 av standardavvikelsen, det vill säga $0.02/4 = 0.005$ och således en variation av 0.0025 åt varje håll från det sanna $\mathrm{VaR}_{0.05}$. Det sanna värdet av $\mathrm{VaR}_{0.05} = -0.03227$ och intervallet sätts således till $I_{fix} = (-0.03477, -0.02977)$. I figur 5 plottas skattningen $\widehat{\mathrm{VaR}}_{0.05,j}$, för varje simulering. De gråstreckade linjerna visar konfidensbandet, I_{fix}, och det röda är medelvärdet av alla skattade VaR, $\widehat{\mathrm{VaR}}^k_{0.05}$. Observera att det är olika skala på axlarna, men det grå bandet har alltid samma bredd. Notera även att medelvärdet täcks av konfidensbandet för alla k utom $k = 10$. Vi ser att precisionen blir bättre allteftersom k blir större. Detta ses extra tydligt om vi jämför figur 5a och 5f, där simuleringarna för $k = 1\,000$ (5f) har plottats i samma skala som simuleringarna för $k = 10$ (5a). I figurtexten kan även ses hur många procent av utfallen som hamnar inom den tillåtna variationen för varje k.

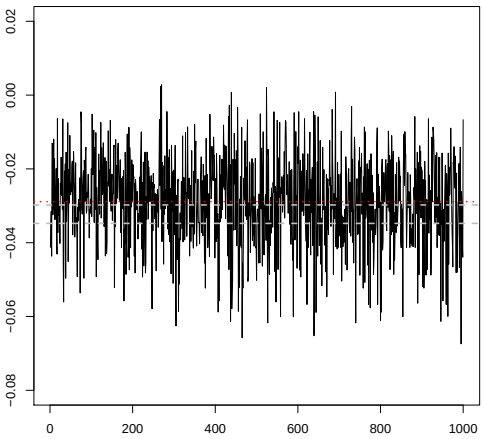
I tabell 1 finns alla skattade medelvärden av VaR samt ett 95% konfidensintervall[20] (I_{VaR})

[20] t-fördelat konfidensintervall, se appendix för definition

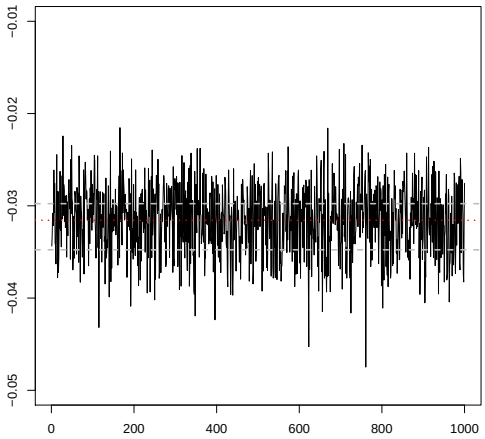
för dessa skattningar. Observera att detta inte är samma konfidensintervall som ovan. Den sista kolumnen i tabellen anger om det sanna värdet på $\mathrm{VaR}_{0.05}$ ligger inom konfidensintervallet och om vi således kan anta att $\widehat{\mathrm{VaR}}^k_{0.05} = \mathrm{VaR}_{0.05} = -0.03227$ eller förkasta detta på 5% signifikansnivå. Vi ser att för $k \leq 100$ får vi ett signifikant resultat och vi kan således förkasta denna hypotes. Det vill säga en observationsstorlek på 100 eller färre ger inte tillförlitliga värden på $\widehat{\mathrm{VaR}}_{0.05}$ i detta test. För $k \geq 500$ däremot kan vi inte förkast hypotesen att $\widehat{\mathrm{VaR}}^k_{0.05} = \mathrm{VaR}_{0.05}$ på 5% signifikansnivå. Vi ser att för $k \geq 500$ får vi en skattad VaR som ligger väldigt nära det verkliga värdet. Detta kan självklart variera en del från simulering till simulering, men vi bör med stor sannolikhet kunna säga att för $k = 500, 1\,000, 5\,000$, kommer vi att få en tillräckligt bra skattning av $\mathrm{VaR}_{0.05}$. Andelen utfall som täcks in av vårt konfidensintervall I_{fix} är även de höga för dessa värden på k. I figur 6 ser vi medelvärdet av $\mathrm{VaR}_{0.05}$ för alla k, det vill säga $\widehat{\mathrm{VaR}}^k_{0.05,j}, j = 1, \ldots, 1\,000$ enligt tidigare beteckningar där j återfinns på x-axeln. De grå och röda linjerna är samma som i figur 5. Vi kan se att för $k = 10$ hinner inte VaR stabilisera sig kring ett värde efter 1 000 simuleringar, utan ger ett spretigt och osäkert intryck. För $k = 100$ kan vi ana en konvergens mot något medelvärde. Vid $k = 500$ och $k = 1\,000$ stabiliseras den skattade VaR snabbare samtidigt som den ligger väldigt nära det sanna värdet, medan för $k = 5\,000$ konvergerar denna ytterligare lite snabbare.

Stickprovsstorlek, k	$\widehat{\mathrm{VaR}}^k_{0.05}$	I_{VaR}	$\mathrm{VaR}_{0.05} \in I_{\mathrm{VaR}}$
10	-0.02887	(-0.02962, -0.02812)	Nej
100	-0.03157	(-0.03180, -0.03133)	Nej
500	-0.03231	(-0.03241, -0.03220)	Ja
1 000	-0.03226	(-0.03234, -0.03219)	Ja
5 000	-0.03230	(-0.03234, -0.03227)	Ja

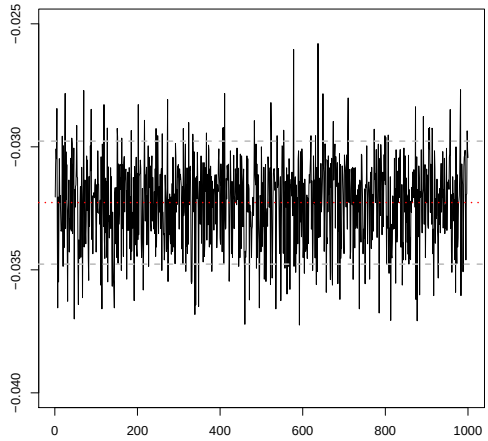
Tabell 1. *Skattat medelvärde av* VaR *på 5% nivå samt 95% konfidensintervall (I_{VaR}) för dessa. Verkligt värde på* $\mathrm{VaR}_{0.05} = -0.03227$.



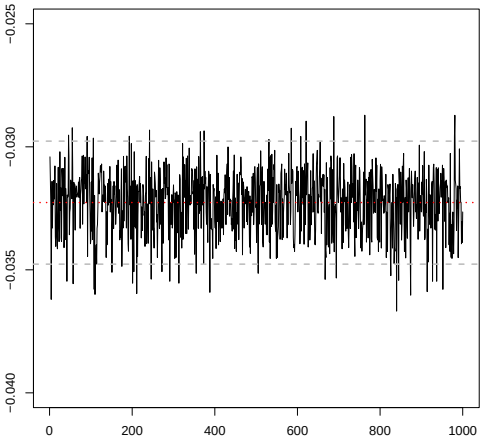
(a) *k=10. Intäckta utfall: 16.1%.*



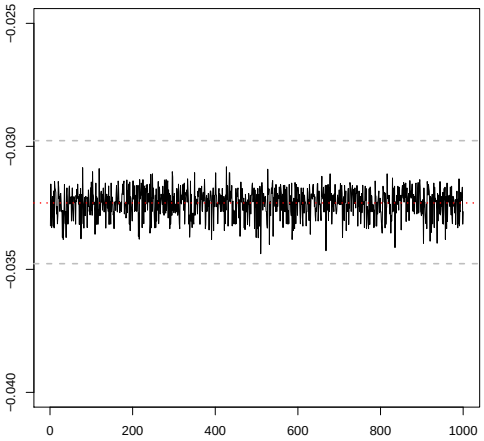
(b) *k=100. Intäckta utfall: 47.2%.*



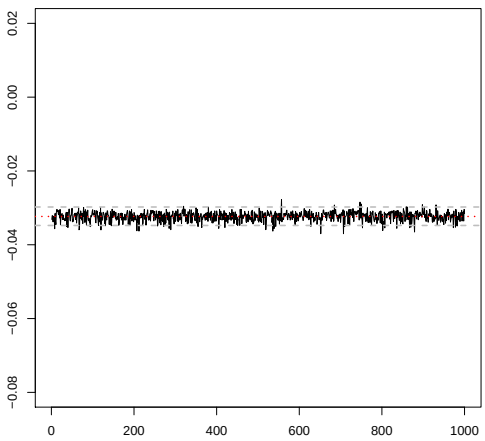
(c) *k=500. Intäckta utfall: 85.1%.*



(d) *k=1000. Intäckta utfall: 96.1%.*

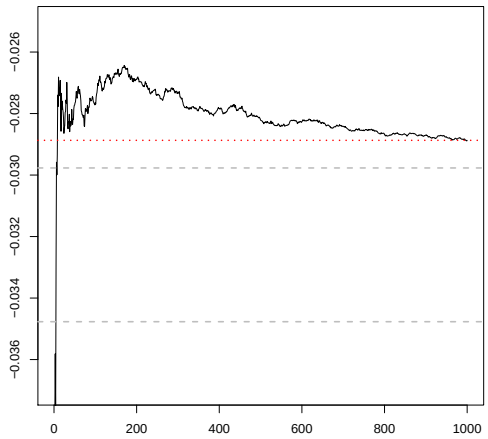


(e) *k=5000. Intäckta utfall: 100%.*

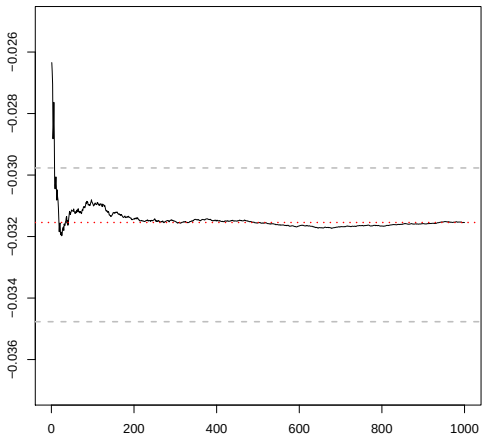


(f) *k=1000, samma skala som i (a).*

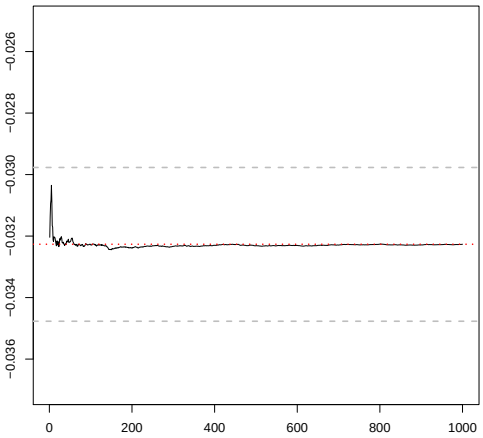
Figur 5. *Skattad* VaR. *Fixt konfidensband,* I_{fix}, *(gråstreckad linje).* $\widehat{\mathrm{VaR}}^{k}_{0.05}$ *(rödstreckad linje). x-axeln: antal simuleringar, y-axeln: avkastning. OBS: olika skalor på axlarna.*



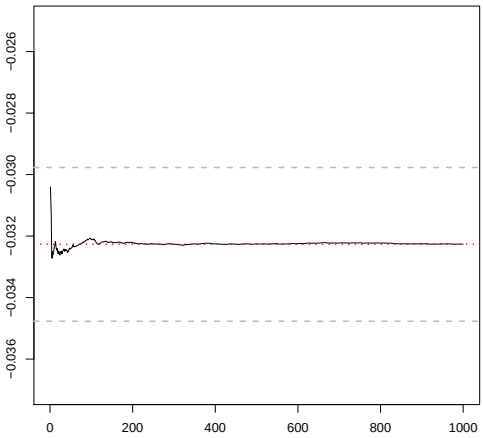
(a) *k=10.*



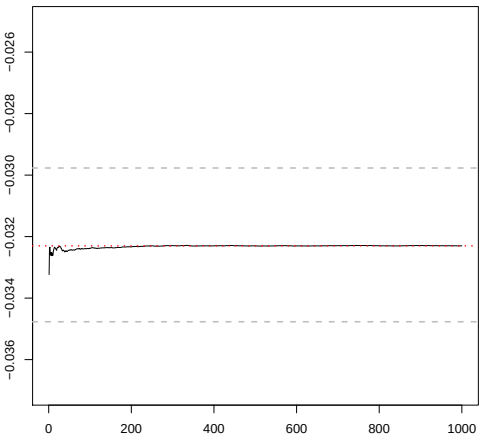
(b) *k=100.*



(c) *k=500.*



(d) *k=1000.*



(e) *k=5000.*

Figur 6. *Medelvärde av skattad* VaR, $\widehat{\mathrm{VaR}}^k_{0.05,j}, j = 1, \ldots 1\,000$. *Fixt konfidensband,* I_{fix}, *(gråstreckad linje).* $\widehat{\mathrm{VaR}}^k_{0.05}$ *(rödstreckad linje). x-axeln: antal simuleringar, y-axeln: avkastning. Samma skala på alla axlar.*

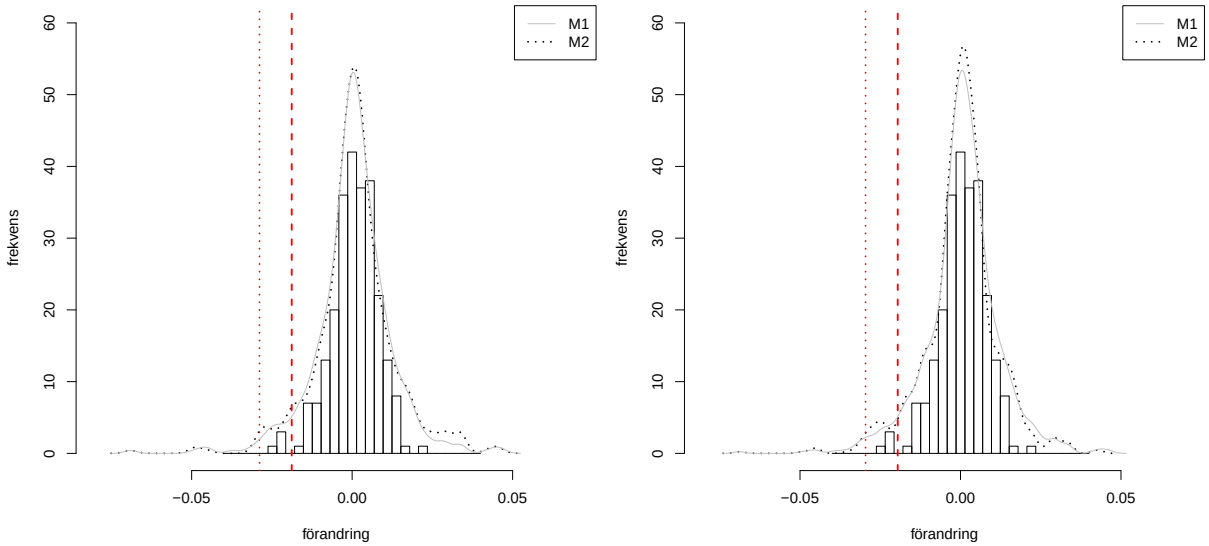
Slutsatsen vi drar av denna analys är att stickprovsstorleken bör bestå av minst 500 observationer. Vi kommer i våra modeller att använda oss av stickprovsstorlekarna 500 och 1 000, då dessa har visat sig ge tillräckligt bra resultat för vårt ändamål. Anledningen till att vi inte använder oss av 5 000 observationer är av det enkla skälet att simuleringarna tar längre tid, samt att vi gör bedömningen att den extra tid det tar att använda alla 5 000 observationer i vår analys inte ger några märkvärdigt bättre eller annorlunda resultat. Ytterligare ett skäl till att bara använda oss av 1 000 historiska observationer som mest är att dessa observationer representerar ungefär 4 år av börsdagar medan 5 000 observationer skulle representera ungefär 19,5 år av börsdagar. Detta kan för finansvärlden, och således för vår analys, vara ett för brett åldersspann med data. Risken finns att de äldsta observationerna inte längre beskriver nutidens marknad på ett korrekt sätt eller att dataserien är icke-stationär.

4.2 Historisk simulering

Vi börjar vår analys med den historiska simuleringsmodellen beskriven i kapitel 2.2.1.

4.2.1 Fix observationsperiod

Vi skattar VaR med 500 respektive 1000 historiska observationer av avkastningen för S&P 500. Denna simulering upprepar vi 1 000 gånger. Figur 7 nedan visar tätheten (från en simulering) av den skattade fördelningen som vi får genom historisk simulering samt fördelningen för det verkliga utfallet de 250 nästkommande dagarna. Den skattade 5% percentilen och 1% percentilen utgörs av de två vertikala linjerna. Den grå linjen i figuren är tätheten för de 500 respektive 1 000 historiska observationerna. I tabell 2 sammanfattas skattningarna från de olika modellerna.



Figur 7. *Resultat från en simulering. Observerad avkastning (svarta staplar), skattad täthet (svartprickad kurva, grå kurva), 5%* VaR *(rödstreckad linje), 1%* VaR *(rödprickad linje). Vänster: 500 observationer. Höger: 1 000 observationer.*

Siffrorna inom parantes är den procentuella andelen av de verkliga utfallen, de förluster, som är mindre än $\widehat{\text{VaR}}$. Vi ser att den historiska simuleringen verkar underskatta $\widehat{\text{VaR}}$ för båda observationsstorlekarna och precisionsnivåerna. Från vårt backtest får vi signifikanta resultat för alla skattningar av 5% VaR, där de icke-signifikanta resultaten från modellerna i backtestet markerats med en asterisk. Vi ser dock att för skattningarna på 1% VaR så är alla verkliga förluster lägre än $\text{VaR}_{0.01}$. Trots detta kan vi inte förkasta hypotesen att $p = 0.01$ i vårt backtest,

och således att $\widehat{\text{VaR}}_{0.01} = \text{VaR}_{0.01}$ på 95% konfidensnivå. Skattningarna skiljer sig väldigt lite mellan M1 och M2.

		VaR		ES	
	Antal observationer	5%	1%	5%	1%
M1	500	-0.0188 *(98.4%)*	-0.0324 *(100%)**	-0.0291	-0.0464
	1000	-0.0191 *(98.4%)*	-0.0315 *(100%)**	-0.0276	-0.0409
M2	500	-0.0191 *(98.5%)*	-0.0341 *(100%)**	-0.0287	-0.0443
	1000	-0.0189 *(98.4%)*	-0.0313 *(100%)**	-0.0274	-0.0400

Tabell 2. *Sammanställning av skattade storheter med historisk simulering. De värden som markerats med en asterisk är de modeller där ingen signifikans föreligger i vårt backtest på 5% signifikansnivå, det vill säga där vi inte kan förkasta att* $\widehat{\text{VaR}}_p = \text{VaR}_p$, *p = 0.05 eller 0.01, på 95% konfidensnivå.*

4.2.2 Rullande observationsperiod

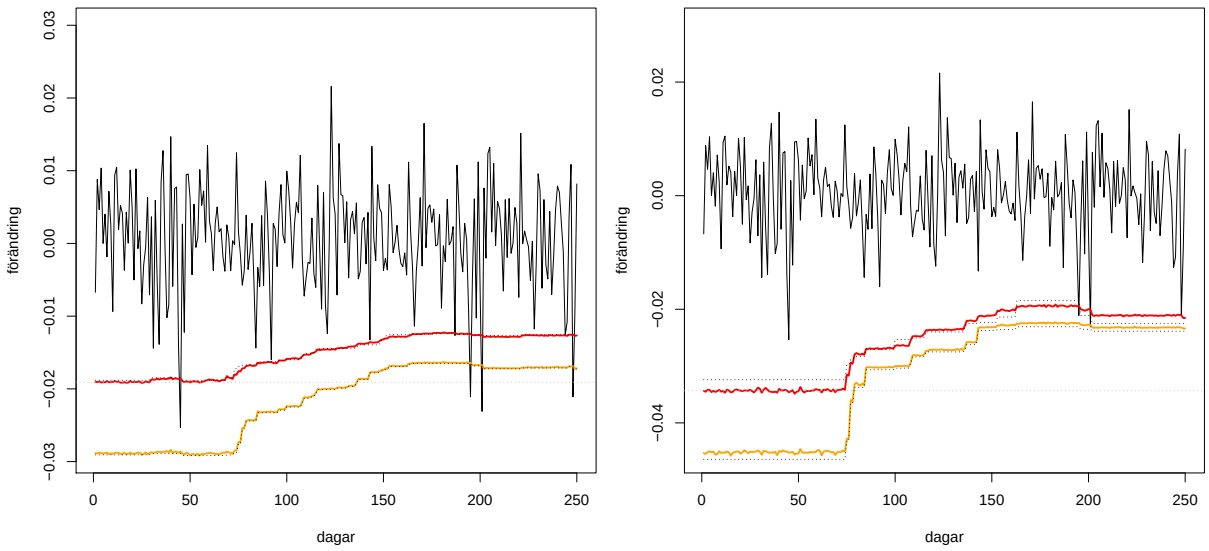
Vi gör samma analys som ovan, men denna gång uppdaterar vi observationsperioden med den nya dagsavkastningen när denna blivit känd. Samtidigt tar vi bort den äldsta datapunkten från datasetet så att vi hela tiden behåller samma antal observationer i underlaget.[21] Resultatet ses i figur 8 och figur 9. De svarta staplarna utgör det verkliga utfallet av indexet S&P 500 under perioden 2013-04-17 till 2014-04-14 (röda linjen i figur 3). De röda och orangea linjerna är de skattade VaR och ES baserat på 500 historiska observationer (figur 8) respektive 1000 historiska observationer (figur 9) med M2. De tunna svartstreckade linjerna är samma skattning men med M1, det vill säga hela dataunderlaget utan simulering.[22] Den ljusgråstreckade linjen representerar den skattade VaR för endast en fix observationsperid, det vill säga samma värde som i analysen ovan. Vi kan se att $\widehat{\text{VaR}}$ och $\widehat{\text{ES}}$ skiljer sig väldigt lite mellan M1 och M2 (se tabell 3). Som väntat påverkas $\widehat{\text{VaR}}$ och $\widehat{\text{ES}}$ mer av ny datainformation vid färre observationer, vilket ses tydligt i figur 8. Jämför vi detta med figur 9, där den nya information bara utgör en tusendel av informationen i skattningsunderlaget, ser vi att skattningarna förändras långsammare. Från resultaten av vårt backtest ser vi i tabell 3 att alla modeller ger icke-signifikanta skattningar av 1% VaR. Endast en modell ger icke-signifikant resultat för 5% VaR, nämligen M2 med 500 observationer.

		VaR	
	Antal observationer	5%	1%
M1	500	*97.6%*	*99.2%**
	1000	*98.4%*	*100%**
M2	500	*97.2%**	*99.2%**
	1000	*98.4%*	*100%**

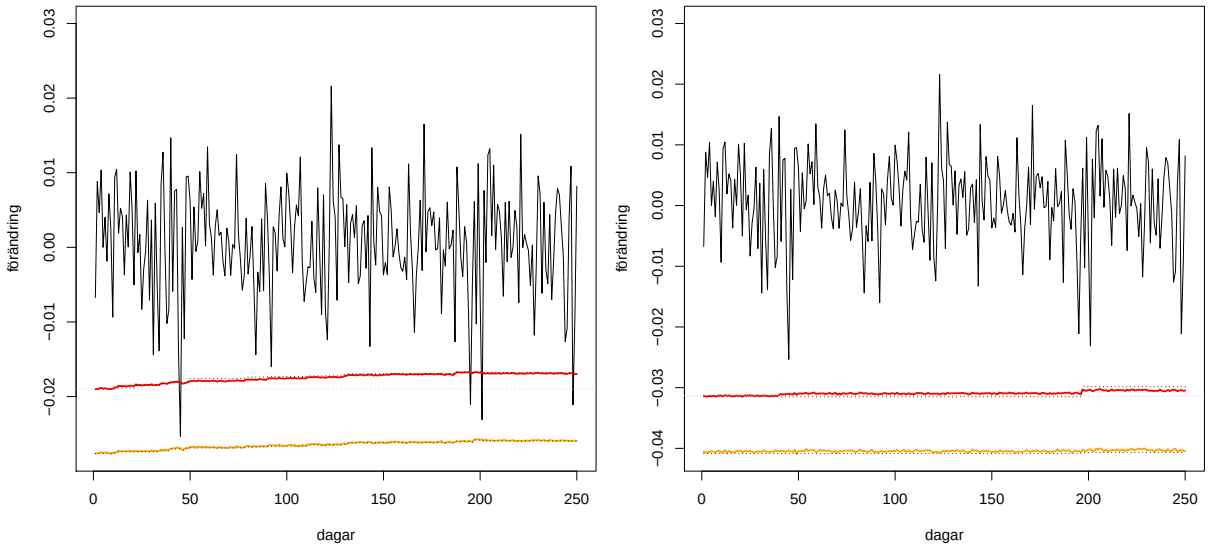
Tabell 3. *Procentuella andelen verkliga förluster som är mindre än skattad* VaR. *De värden som markerats med en asterisk är de modeller där ingen signifikans föreligger i vårt backtest på 5% signifikansnivå, det vill säga där vi inte kan förkasta att* $\widehat{\text{VaR}}_p = \text{VaR}_p$, *p = 0.05 eller 0.01, på 95% konfidensnivå.*

[21] se kapitel 3.2 för beskrivning av den rullande observationsperioden

[22] här är det underförstått vilken svartstreckad linje som hör till VaR respektive ES



Figur 8. *500 observationer. Observerad daglig avkastning för S&P 500. Skattad* VaR *(röd linje - M2, svartstreckad linje - M1), skattad* ES *(orange linje - M2, svartstreckad linje - M1). Vänster: 5%. Höger: 1%.*



Figur 9. *1 000 observationer. Observerad daglig avkastning för S&P 500. Skattad* VaR *(röd linje - M2, svartstreckad linje - M1, skattad* ES *(orange linje - M2, svartstreckad linje - M1). Vänster: 5%. Höger: 1%.*

4.3 Varians-Kovariansmetoden

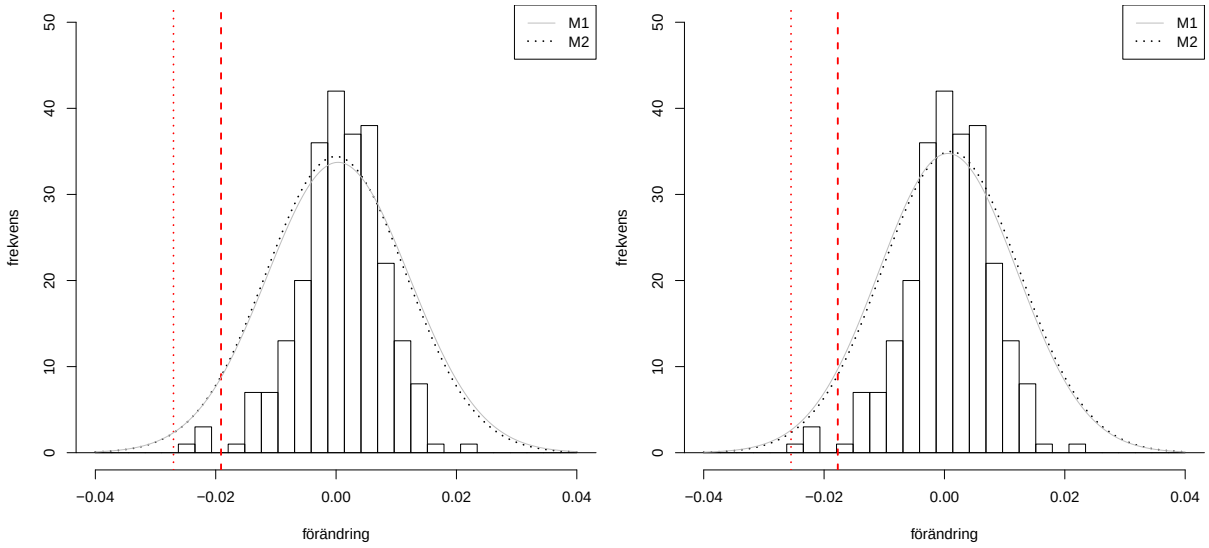
4.3.1 Fix observationsperiod

Vi går nu över till varians-kovariansmetoden för att skatta VaR och ES. Vi begränsar oss här till att anta att avkastningen följer en normalfördelning. Vi skattar väntevärde och standardavvikelse för den dagliga avkastningen med hjälp av inbyggda kommandon i R. Resultatet visas i tabell 4, där vi även kan notera att väntevärdet och standardavvikelsen skiljer sig en del åt mellan M1 och M2. Från de skattade väntevärdena och standardavvikelserna kan vi räkna ut 5% och 1%

	Antal observationer	*Väntevärde*	*Standardavvikelse*
M1	500	0.0003	0.0118
	1000	0.0006	0.0115
M2	500	0.0096	0.0039
	1000	-0.0064	0.0037

Tabell 4. *Skattade väntevärde och standardavvikelse för S&P 500.*

percentilen för vår normalfördelningskurva och på så sätt få vår sökta $\widehat{\text{VaR}}$. Resultaten presenteras i figur 10 samt tabell 5 nedan. I figur 10 ser vi att normalfördelningen skiljer sig avsevärt från fördelningen för vår referensdata och vi bör överväga om normalfördelningsantagandet är tillräckligt tillfredställande i denna situation. I denna modell kan inte heller några större skillnader urskiljas mellan resultatet för modellen med 500 respektive 1 000 historiska observationer. Dock skattas större förluster med $\widehat{\text{VaR}}$ och $\widehat{\text{ES}}$ (lägre värden i tabellen) för modellerna med 500 datapunkter som skattningsunderlag. Skattningarna av VaR för både 1% och 5% är nästan samma för M1 och M2. Skattningarna för ES ligger också nära varandra. Samma observation som i den fixa historiska simuleringsmodellen kan göras här, nämligen att alla modeller med 1% $\widehat{\text{VaR}}$ visar sig vara icke-signifikanta i vårt backtest, trots att nästan alla verkliga förluster är lägre än $\widehat{\text{VaR}}_{0.01}$.



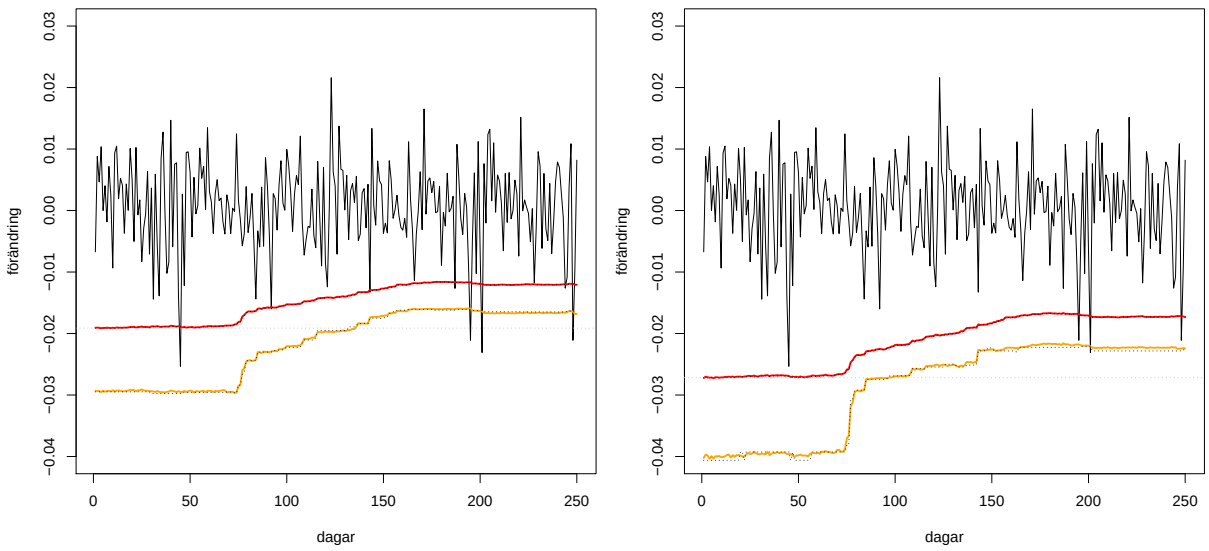
Figur 10. *Resultat från en simulering. Observerad avkastning (svarta staplar), skattad normaltäthet (svartprickad kurva, grå kurva), 5%* VaR *(rödstreckad linje), 1%* VaR *(rödprickad linje). Vänster: 500 observationer. Höger: 1 000 observationer.*

		VaR				ES	
	Antal observationer	5%		1%		5%	1%
M1	500	-0.0191	*(98.4%)*	-0.0272	*(100%)**	-0.0295	-0.0406
	1000	-0.0183	*(98.4%)*	-0.0261	*(100%)**	-0.0271	-0.0351
M2	500	-0.0190	*(98.4%)*	-0.0271	*(99.9%)**	-0.0293	-0.0400
	1000	-0.0183	*(98.4%)*	-0.0261	*(99.9%)**	-0.0272	-0.0345

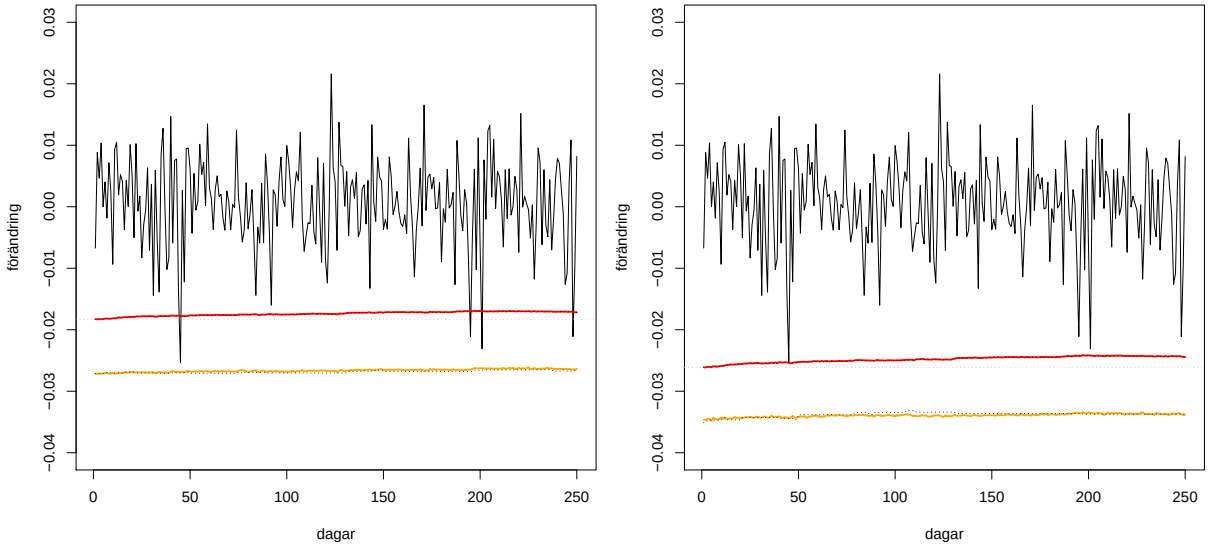
Tabell 5. *Sammanställning av skattade storheter med varians-kovariansmetoden. De värden som markerats med en asterisk är de modeller där ingen signifikans föreligger i vårt backtest på 5% signifikansnivå, det vill säga där vi inte kan förkasta att* $\widehat{\mathrm{VaR}}_p = \mathrm{VaR}_p$, *p = 0.05 eller 0.01, på 95% konfidensnivå.*

4.3.2 Rullande observationsperiod

På samma sätt som med den historiska simuleringsmetoden rullar vi nu vårt observationsfönster och uppdaterar vårt skattningsunderlag för varje ny dagsdata som blir känd. Figur 11 och figur 12 visar resultaten av denna analys, samt en sammanställning av de skattade värdena i tabell 6. Återigen ser vi att M1 och M2 ger liknande utfall och liknande skattningar på VaR. En jämförelse mellan figur 11 och 12 visar på samma naturliga resultat som ovan; $\widehat{\mathrm{VaR}}$ och $\widehat{\mathrm{ES}}$ reagerar snabbare på förändring för modellen med 500 observationer. I tabell 6 ses för första gången en antydan till överskattning av VaR, nämligen i modellen med 500 observationer med 1% VaR (för både M1 och M2). Detta betyder att fler än 1% av de 250 framtida dagsavkastningarna utgjordes av större förluster än $\widehat{\mathrm{VaR}}_{0.01}$. De andra VaR-skattningarna underskattar återigen. Från vårt backtest ser vi att ingen signifikans föreligger på 5% signifikansnivå för skattningarna av 5% VaR med 500 observationer för M1 och M2. Återigen är även alla 1% $\widehat{\mathrm{VaR}}$ icke-signifikanta på denna nivå.



Figur 11. *500 observationer. Observerad daglig avkastning för S&P 500. Skattad* VaR *(röd linje - M2, svartstreckad linje - M1), skattad* ES *(orange linje - M2, svartstreckad linje - M1). Vänster: 5%. Höger: 1%.*



Figur 12. *1 000 observationer. Observerad daglig avkastning för S&P 500. Skattad* VaR *(röd linje - M2, svartstreckad linje - M1), skattad* ES *(orange linje - M2, svartstreckad linje - M1). Vänster: 5%. Höger: 1%.*

		VaR	
	Antal observationer	5%	1%
M1	500	*96.8%**	*98.8%**
	1000	*98.4%*	*100%**
M2	500	*96.4%**	*98.8%**
	1000	*98.4%*	*99.6%**

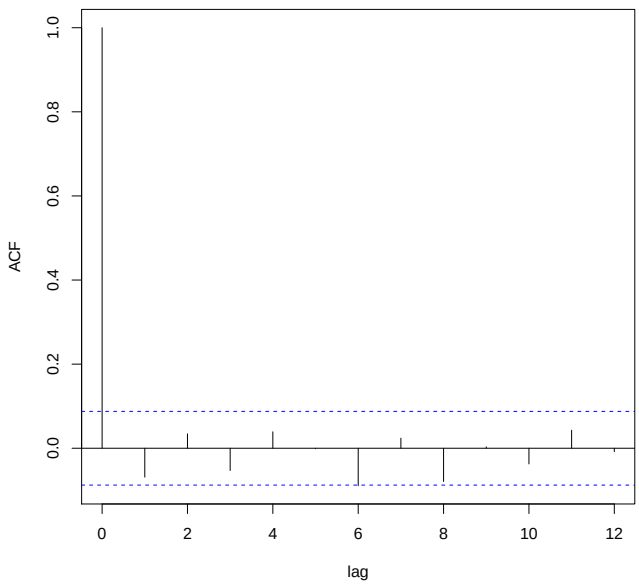
Tabell 6. *Procentuella andelen verkliga förluster som är mindre än skattad* VaR*. De värden som markerats med en asterisk är de modeller där ingen signifikans föreligger i vårt backtest på 5% signifikansnivå, det vill säga där vi inte kan förkasta att* $\widehat{\mathrm{VaR}}_p = \mathrm{VaR}_p$*, p = 0.05 eller 0.01, på 95% konfidensnivå.*

4.4 GARCH(1,1)

Vi har tidigare analyserat data och skattat VaR och ES med hjälp av de enklare modellerna historisk simulering och varians-kovariansmetoden. Nu ska vi analysera våra data med en mer avancerad modell och skatta VaR med den så kallade generalized autoregressive conditional heteroscedastic model (GARCH-modellen, se kapitel 2.2.3). Denna modell förutsätter inte att avkastningarna är sinsemellan oberoende. En annan fördel mot de tidigare använda modellerna är att GARCH-modellen tillåter variansen att variera över tiden.

Vi kommer i detta avsnitt att begränsa oss till att använda den enklaste och mest frekvent använda GARCH-modellen i ekonometrin, nämligen GARCH(1,1). Vi börjar således med en liten analys för att försäkra oss om att GARCH(1,1) är en tillfredställande modell för vår data, men går inte in på några djupare detaljer angående modellanpassningen eller om det finns modeller som kan beskriva våra avkastningsmönster ännu bättre. Som tidigare nämnts kommer vi endast att använda oss av datasetet med 500 historiska observationer. Vi kommer som tidigare att utföra analyserna med en fix observationsperiod och därefter med en rullande observationsperiod. Båda analysmodellerna kommer att anpassas med först normalfördelade ϵ_t och sedan t-fördelade ϵ_t.

För att försäkra oss om att GARCH(1,1) är en acceptabel modell för vår data gör vi ett Ljung-Box autokorrelationstest, se kapitel 2.3.1. Ljung-Box testet utförs på våra observerade avkastningar för att se om det finns någon signifikant autokorrelation i vår dataserie. Vi använder oss av det inbyggda Ljung-Box testet i **R** och får en teststatistika $Q(12) = 14.36$ med ett p-värde av 0.28. Detta vittnar om att ingen signifikant autokorrelation finns i datasetet, det vill säga vi kan inte förkasta nollypotesen, se kapitel 2.3.1. Samma slutsats kan dras genom att titta på grafen över autokorrelation, se figur 13.



Figur 13. *Autokorrelation för vår avkastningsserie. De blå linjerna utgör 95% konfidensnivå.*

Vi gör även ett Ljung-Box test på våra kvadrerade residualer[23] från våra avkastningar för att se om det verkar finnas några ARCH-effekter i datan. Vi får en teststatistika på $Q(12) = 100.21$ med ett p-värde på $5.55 \cdot 10^{-16}$. Detta betyder att det finns statistisk signifikanta ARCH-effekter, det vill säga vi kan förkasta nollypotesen att det inte existerar några ARCH-effekter i vår data på 5% signifikansnivå. Således bör en GARCH-modell passa vår data bra.

4.4.1 Normalfördelning

4.4.1.1 Fix observationsperiod

Vi har nu försäkrat oss om att en GARCH-modell verkar kunna beskriva våra data tillfredställande och börjar med att anpassa en GARCH(1,1) med antagandet att våra ϵ_t följer en standardnormalfördelning. Det vill säga, vi har att

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + a_t, \quad \text{där } a_t = \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \tag{29}$$

där $\epsilon_t \sim N(0,1)$ och alla ϵ_t är oberoende. Vi anpassar nu denna modell med inbyggda kommandon i **R** och får ut våra skattade värden på α och β. **R**'s inbyggda funktion *fGarch* använder maximum likelihood-metoden för att skatta dessa värden.[24] Ekvationen blir

$$\sigma_t^2 = 0.0451 \cdot 10^{-4} + 0.1549 a_{t-1}^2 + 0.8144 \sigma_{t-1}^2. \tag{30}$$

[23] dessa ges av $a_t^2 = (r_t - \mu_t)^2$

[24] se appendix för maximum likelihood-ekvationerna

Vår skattning för μ_t blir icke-signifikant skilt från 0 och vi kan således ta bort denna och kvar får vi $r_t = a_t$.[25] Det låga värdet på α_0 gör att även denna kan sättas till 0. Alla skattningarna är signifikanta på åtminstone 1% nivå. Alla Ljung-Box-statistikor (utskrift ifrån *summary* i **R**) har ett p-värde på mer än 0.05 och modellen ger lägre värden på AIC (-6.3660) och BIC (-6.3407) än för en modell med $\mu_t \neq 0$. Allt detta tyder på att den anpassade GARCH(1,1)-modellen är adekvat. I tabell 7 visas $\widehat{\text{VaR}}$ (se även gråstreckade linjen i figur 14) och $\widehat{\text{ES}}$ för respektive signifikansnivå.

Signifikansnivå	VaR	ES
5%	-0.0205 *(98.4%)*	-0.0257
1%	-0.0289 *(100%)**	-0.0331

Tabell 7. *Skattad* VaR *och* ES *för* GARCH$(1,1)$ *med normalfördelade* ϵ_t. *Siffrorna inom parantes utgör procentuella andelen verkliga förluster som är mindre än skattad* VaR. *De värden som markerats med en asterisk är de modeller där ingen signifikans föreligger i vårt backtest på 5% signifikansnivå, det vill säga där vi inte kan förkasta att* $\widehat{\text{VaR}}_p = \text{VaR}_p$, $p = 0.05$ *eller* 0.01, *på 95% konfidensnivå.*

De skattade värdena på VaR och ES skiljer sig en del från den historiska simuleringsmetoden och varians-kovariansmetoden. En likhet är dock att 100% av de verkliga avkastningarna är större än $\widehat{\text{VaR}}_{0.01}$ och där $\widehat{\text{VaR}}_{0.05}$ återigen överskattas av modellen.

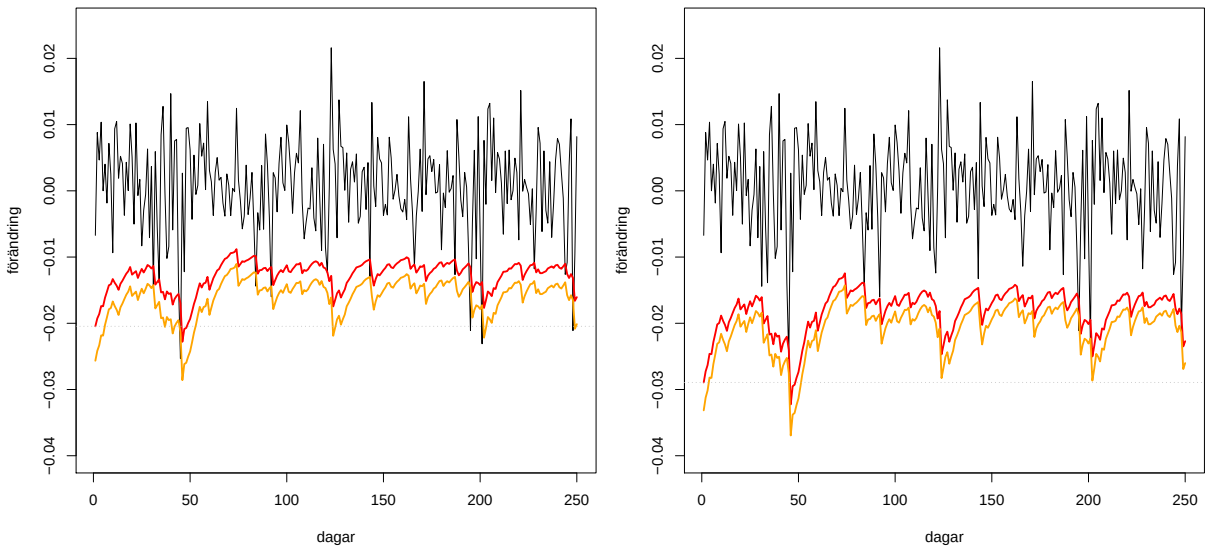
4.4.1.2 Rullande observationsperiod

Vi gör samma analys som ovan, men med rullande observationsperiod. Resultatet ses i figur 14. Det mest slående med figurerna är hur snabbt skattningarna av VaR och ES ändras vid tillförandet av ny information, jämfört med de två tidigare modellerna. Genom att studera dessa grafer kan vi dessutom ana att både VaR och ES skattas (i medeltal) med mindre förlust än för de tidigare studerade modellerna. I tabell 8 ser vi att GARCH(1,1) med standardnormalfördelade ϵ_t överskattar $\widehat{\text{VaR}}$ för båda signifikansnivåerna en aning; 0.6% respektive 1% fler av de verkliga utfallen utgörs av högre förluster än de skattade 5% respektive 1% percentilen. Backtestet ger icke-signifikanta resultat för både $\widehat{\text{VaR}}_{0.05}$ och $\widehat{\text{VaR}}_{0.01}$ på 5% signifikansnivå, det vill säga vi kan inte förkasta nollhypotesen och således inte heller att $\widehat{\text{VaR}}_p$ har korrekt täckningsgrad på 95% konfidensnivå, se kapitel 2.3.4.

Signifikansnivå	VaR
5%	*94.8%**
1%	*98.0%**

Tabell 8. *Procentuella andelen verkliga förluster som är mindre än skattad* VaR. *De värden som markerats med en asterisk är de modeller där ingen signifikans föreligger i vårt backtest på 5% signifikansnivå, det vill säga där vi inte kan förkasta att* $\widehat{\text{VaR}}_p = \text{VaR}_p$, $p = 0.05$ *eller* 0.01, *på 95% konfidensnivå.*

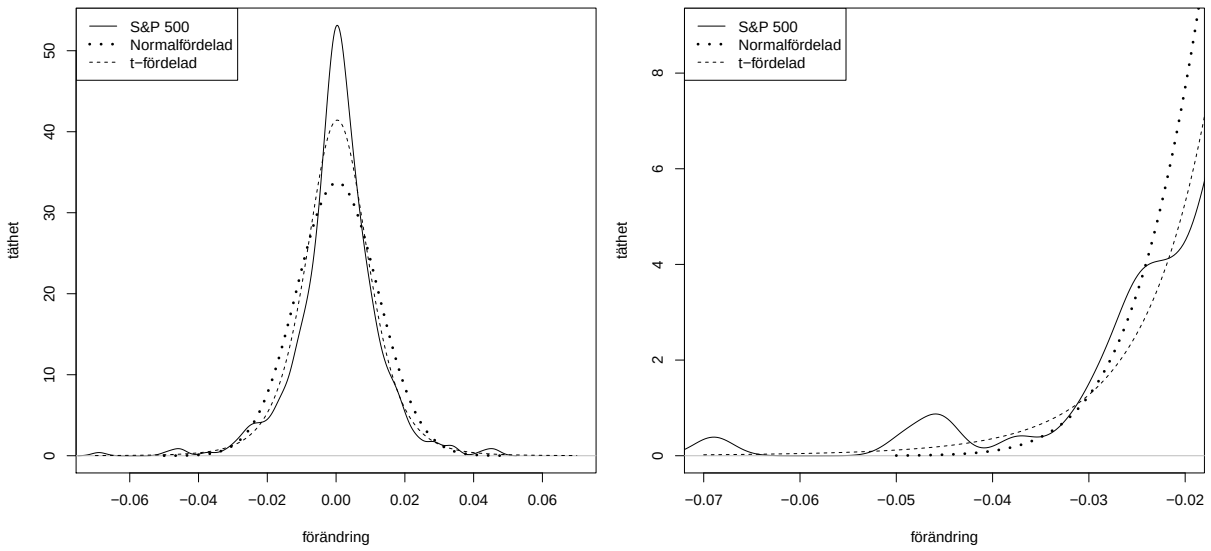
[25] det är inget ovanligt antagande att $\mu_t = 0$ när man modellerar med (logaritmerade) avkastningar



Figur 14. *Observerad daglig avkastning för S&P 500 ($\epsilon_t \sim N$). Skattad* VaR *(röd linje), skattad* ES *(orange linje). Den gråstreckade linjen är skattad VaR för den fixa perioden i kapitel 4.4.1.1. Vänster: 5%. Höger: 1%.*

4.4.2 t-fördelning

Som tidigare nämts, kan det finnas anledning att göra om dessa analyser med GARCH, men då istället anta att ϵ_t följer en t-fördelning. Detta är ett rimligt antagande då, som även detta nämnts tidigare i analysen, t-fördelningen har tjockare svansar än normalfördelningen. Detta brukar vara en önskvärd fördelningsegenskap då man modellerar finansdata eftersom detta generellt beskriver verkligheten på ett mer korrekt sätt. I figur 15 kan vi se ett exempel på detta. Här har vi anpassat en normalfördelning samt en t-fördelning med hjälp av skattat väntevärde och standardavvikelse från våra 500 historiska observationer av S&P 500 index. I den vänstra figuren ser vi att t-fördelningen ser ut att passa aningen bättre till avkastningen runt mitten då förändringen är runt 0. Vi ser att t-fördelningen är aningen smalare och betydligt spetsigare än normalfördelningskurvan. I den högra figuren är den vänstra svansen av fördelningarna inzoomade och vi ser att t-fördelningskurvan korsar normalfördelningskurvan och har således tjockare svans.



Figur 15. *Täthet för daglig avkastning för S&P 500, samt anpassad normalfördelning och t-fördelning. Vänster: alla utfall. Höger: inzoomning på vänstra svansen.*

4.4.2.1 Fix observationsperiod

Vi upprepar samma analys som ovan men antar nu att ϵ_t följer en t-fördelning. Vi har samma uppställning som i (29), men där $\epsilon_t \sim t$ och alla ϵ_t är oberoende. Vid anpassning i **R** får vi skattningarna

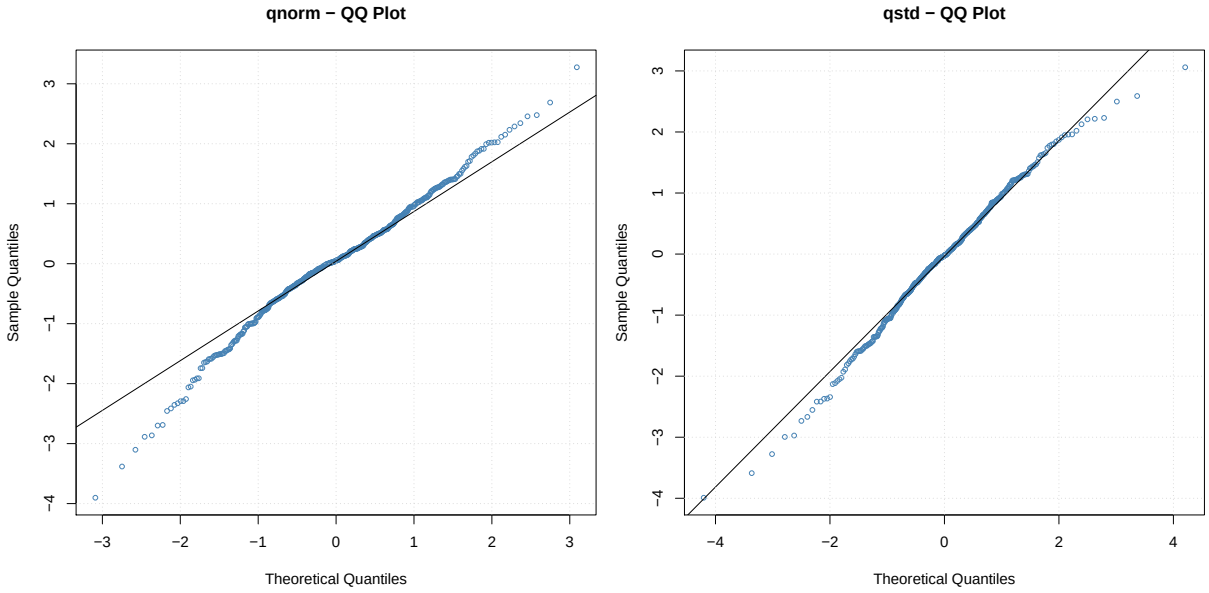
$$\begin{aligned} r_t &= 0.0752 \cdot 10^{-2} + a_t, \quad \text{där } a_t = \sigma_t \epsilon_t,\ \epsilon_t \sim t(6.19) \\ \sigma_t^2 &= 0.0327 \cdot 10^{-4} + 0.1206 a_{t-1}^2 + 0.8590 \sigma_{t-1}^2. \end{aligned} \tag{31}$$

Alla skattningar, förutom α_0, är signifikanta på åtminstone 5% nivå. Detta är inget större problem då α_0 är väldigt nära noll och därmed har en ytterst liten påverkan på resultatet. I denna modell får vi däremot ett signifikant utslag på μ_t, men även detta värde är väldigt nära 0 och skulle därför kunna bortses från i modellen. I tabell 9 återfinns de skattade VaR och ES för GARCH(1,1) med t-fördelade ϵ_t. Värden på $\widehat{\text{VaR}}$ och $\widehat{\text{ES}}$ är av ungefär samma storleksordning

Signifikansnivå	VaR	ES
5%	-0.0181 *(98.4%)*	-0.0252
1%	-0.0296 *(100%)**	-0.0323

Tabell 9. *Skattad* VaR *och* ES *för* GARCH$(1,1)$ *med t-fördelade* ϵ_t*. Siffrorna inom parantes utgör procentuella andelen verkliga förluster som är mindre än skattad* VaR*. De värden som markerats med en asterisk är de modeller där ingen signifikans föreligger i vårt backtest på 5% signifikansnivå, det vill säga där vi inte kan förkasta att* $\widehat{\text{VaR}}_p = \text{VaR}_p$*,* $p = 0.05$ *eller* 0.01*, på 95% konfidensnivå.*

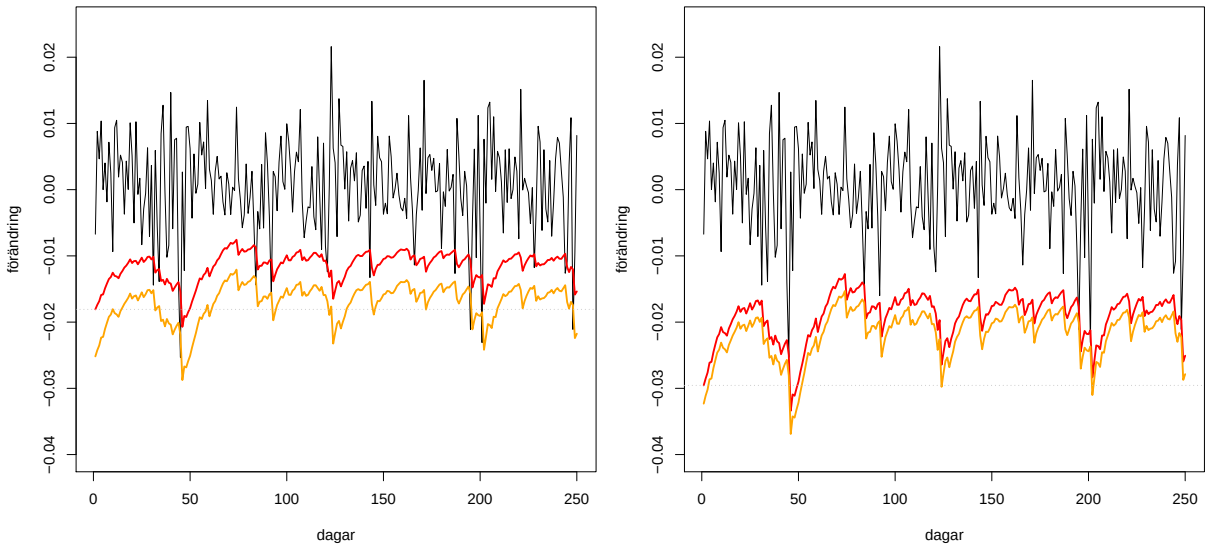
som för GARCH(1,1) med normalfördelningsantagandet i avsnitt 4.5.1.1, dock skattas alla värden förutom $\widehat{\text{VaR}}_{0.01}$ lägre (absoluta tal) i GARCH-modellen med t-fördelade ϵ_t. Skillnaderna är små men man förväntar sig att t-fördelningen borde skatta större förluster då svansarna vanligtvis är tjockare. I figur 16 jämförs dessa modellers QQ-plottar över de standardiserade residualerna. Vi kan se att t-fördelningen (höger) verkar passa data bättre. Detta påstående stärks ytterligare om vi jämför modellernas AIC och BIC (se kapitel 2.3.3), som är något lägre för t-fördelningen (-6.3951 pespektive -6.3529).



Figur 16. *QQ-plot över standardiserade residualer från* GARCH$(1,1)$. *Vänster: normalfördelning. Höger: t-fördlening.*

4.4.2.2 Rullande observationsperiod

Vi genomför samma analys som i avsnittet innan men med rullande observationsperiod och får resultatet i figur 17 och tabell 10. I figur 17 kan vi ana samma mönster som tidigare, nämligen att GARCH-modellerna verkar ge något lägre skattningar av VaR och ES, i synnerhet för de rullande observationsperioderna. I tabellen ser vi att $\widehat{\text{VaR}}$ återigen överskattas en aning för båda signifikansnivåerna samt att det inte föreligger någon statistisk signifikans för våra skattningar på 5% signifikansnivå.



Figur 17. *Observerad daglig avkastning för S&P 500 ($\epsilon_t \sim t$). Skattad* VaR *(röd linje), skattad* ES *(orange linje). Den gråstreckade linjen är skattad VaR för den fixa perioden i kapitel 4.4.2.1. Vänster: 5%. Höger: 1%.*

Signifikansnivå	VaR
5%	*94.4%**
1%	*98.4%**

Tabell 10. *Procentuella andelen verkliga förluster som är mindre än skattad* (VaR). *De värden som markerats med en asterisk är de modeller där ingen signifikans föreligger i vårt backtest på 5% signifikansnivå, det vill säga där vi inte kan förkasta att* $\widehat{\mathrm{VaR}}_p = \mathrm{VaR}_p$, *p = 0.05 eller 0.01, på 95% konfidensnivå.*

4.5 En kort efteranalys

En jämförelse av den skattade standardavvikelsen från våra observationsunderlag från analysen visar

$$\hat{\sigma}_{500} = 0.0118 \qquad \hat{\sigma}_{1000} = 0.0115 \qquad \hat{\sigma}_{ref} = 0.0071,$$

där 500 och 1 000 står för respektive storlek på underlagen och *ref* är vårt referensunderlag (röd linje i figur 3). Vi kan se att vårt referensunderlag har betydligt lägre standardavvikelse än de skattningsunderlag vi använt oss av i analysen. I detta kapitel gör vi av denna anledning en kort analys där vi, med samma tillvägagångssätt som tidigare, analyserar våra tre modeller och skattar VaR. Denna gång använder vi dock vårt tidigare referensmaterial som skattningsunderlag och tillämpar detta på de första 250 observationerna i vårt tidigare skattningsunderlag. För att få lite större skattningsunderlag tar vi även med de 250 observationerna innan vårt tidigare referensunderlag, det vill säga det nya skattningsunderlaget består av dag 751 till dag 1250 i figur 3 samt det nya referensunderlaget av dag 1 till dag 250 i samma figur. Detta gör vi för att se hur mycket modellerna påverkas av volatiliteten i underlaget. Vi kommer inte att redovisa stegen i denna analys, i och med att de är identiska med ovan genomförda analyser, utan sammanfattar istället allt nedan i tabell 11. Här begränsar vi oss till att redovisa endast den procentuella andelen observationer som är lägre än $\widehat{\mathrm{VaR}}$, det vill säga de värden vi redovisat som procent i tidigare kapitel. Observera här att vi nu använder ett referensunderlag vilket inte direkt föregås av vårt skattningsunderlag. Vi gör således ett antagande i att vårt nya referensunderlag i praktiken skulle kunna föregås av vårt nya skattningsunderlag, vilket kan vara ett diskuterbart antagande i och med volatilitetsskillnaderna.

		VaR (fix)		VaR (rullande)	
Metod	Typ	5%	1%	5%	1%
Historisk simulering	M1	90.8 (98.4)	95.6 (100*)	93.6* (97.6)	97.2 (99.2*)
	M2	89.9 (98.5)	95.4 (100*)	92.0 (97.2*)	96.4 (99.2*)
Varians-kovariansmetoden	M1	88.4 (98.4)	95.6 (100*)	91.2 (96.8*)	94.8 (98.8*)
	M2	88.2 (98.4)	93.1 (99.9*)	89.2 (96.4*)	96.4 (98.8*)
GARCH(1,1)	N	92.8* (98.4)	95.6 (100*)	94.8* (94.8*)	96.8 (98.0*)
	t	92.8* (98.4)	96.0 (100*)	94.8* (94.4*)	97.2 (98.4*)

Tabell 11. *Procentuella andelen verkliga förluster som är mindre än skattad* VaR. *Siffrorna inom parantes är tidigare skattade* VaR. *De värden som markerats med en asterisk är de modeller där ingen signifikans föreligger i vårt backtest på 5% signifikansnivå, det vill säga där vi inte kan förkasta att* $\widehat{\mathrm{VaR}}_p = \mathrm{VaR}_p$, *p = 0.05 eller 0.01, på 95% konfidensnivå.*

Vi ser en markant skillnad i resultaten. Alla $\widehat{\mathrm{VaR}}$ har betydligt lägre värden och underskattar följaktligen risken betydligt mer än tidigare.

5 Diskussion

Vi kommer att börja diskutera resultaten av huvudanalysen i kapitel 4.2-4.4 för att sedan jämföra dessa med resultaten från efteanalysen i kapitel 4.5.

Överlag kan vi från kapitel 4.2-4.4 se att $\widehat{\text{VaR}}_{0.05}$ och $\widehat{\text{VaR}}_{0.01}$ överskattas med historisk simulering och varians-kovariansmetoden, förutom för den rullande varians-kovariansmodellen baserad på 500 observationer. För den fixa GARCH(1,1)-modellen ser vi samma mönster av överskattningar av $\widehat{\text{VaR}}$ medan vi tvärtom ser en svag tendens av underskattning med den rullande GARCH(1,1)-modellen.

VaR skattad med historisk simulering tar hänsyn till extremvärdena i svansarna i den empiriska fördelningen för avkastningen (förlustfunktionen). Detta ses tydligt i denna analys då den historiska simuleringsmodellen överskattar VaR oftare än de andra modellerna. Endast en av 5% $\widehat{\text{VaR}}$ får ett icke-signifikant utslag på 95% konfidensnivå i vårt backtest. Alla $\widehat{\text{VaR}}$ på 1% är icke-signifikanta, men nästan alla förluster är lägre än vår skattade 1% VaR så det säger oss egentligen inte så mycket mer än att, återigen, VaR skattad med historisk simulering överskattar mer än våra andra modeller då den fångar upp extrempunkterna ute i svansarna. För den fixa observationsperioden är vår 1% $\widehat{\text{VaR}}$ för den historiska simuleringen betydligt större (återigen i absoluta tal) än motsvarande värden för de andra modellerna. Den rullande historiska simuleringsmodellen ger bättre skattningar för både M1 och M2. Trots att vårt backtest ger signifikant resultat för vissa av modellernas värden på $\widehat{\text{VaR}}$, så ligger ändå procentandelen närmre det sanna värdet. Den fixa historiska simuleringsmodellen har högre skattningar av 1% ES än varians-kovariansmetoden medan skattningarna för 5% ES är lika. Detta tyder på att det finns någon eller några stora negativa avkastningar i data som ökar värdet av 1% $\widehat{\text{ES}}$ i den historiska simuleringsmodellen men som inte får lika stort inflytande på skattningen av ES i varians-kovariansmetoden. Det är möjligt att den historiska simuleringsmodellen skulle ge bättre resultat om vi hade ett större skattningsunderlag. En annan möjlig utvidgning och förbättring av modellen kan vara att vikta avkastningarna så att nyare avkastningar ges större sannolikhet att dras, vid simulering av den nya avkastningsvektorn, än äldre.

Vi ser att M1 och M2 skiljer sig väldigt lite åt för den historiska simuleringsmetoden och varians-kovariansmetoden. Modellerna baserade på de rullande observationsperioderna ger även fler icke-signifikanta värden i vårt backtest av $\widehat{\text{VaR}}$ för varians-kovariansmetoden. Vi ser alltså en trend i att skattningarna ligger närmre de verkliga utfallen då vi kontinuerligt uppdaterar vår data med de senaste observationerna. Återigen skulle vi troligtvis få bätte värden om vi viktade våra observationer, så att sannolikheten för att dra en nyare observation från skattningsunderlaget var större.

För de två rullande modellerna av historiska simuleringsmetoden och varians-kovariansmetoden med 500 observationer ser vi ett oväntat "hopp" i $\widehat{\text{VaR}}$ och $\widehat{\text{ES}}$ runt dag 75 på x-axeln, se figur 8 respektive 11. Detta hopp finns inte med i skattningarna baserade på 1 000 observationer, se figur 9 respektive 12. Detta skulle kunna bero på två saker. En möjlig anledning är att det finns några stora negativa avkastningar som bidrar till att skattningarna på VaR och ES vittnar om höga förluster och då dessa efter 75 dagar plockas bort ur skattningsunderlaget så försvinner denna effekt. En annan möjlighet är att det i referensdata finns några stora positiva avkastningar som på samma sätt påverkar skattningarna av VaR och ES fast i motsatt riktning, det vill säga $\widehat{\text{VaR}}$ och $\widehat{\text{ES}}$ skattar mindre förluster när dessa observationer blir kända och således påverkar våra skattningar. Eftersom vi undersökt vår data, se figur 3 så vet vi dock att vår referensdata saknar dessa stora avkastningar som behövs för att bidra till denna effekt. Däremot har vi en eller några kraftigt negativa dagsavkastningar runt dag 575 och vi kan således konstatera att det

bör vara den första anledningen som bidrar till detta stora hopp i våra skattningar. Dessutom ser vi inte samma hopp i modellen med 1 000 observationer men skattningen av VaR och ES är (i absoluta medeltal) större, se figur 9 respektive 12, vilket vittnar om att dessa stora negativa avkastningar finns med i observationsunderlaget redan från början.

Som påpekats tidigare i både teoridelen i kapitel 2 och i analysdelen i kapitel 4 så är normalfördelningsantagandet för avkastningarna inte sällan ett orealistisk, men behagligt, antagande på grund av normalfördelningens tunna svansar. Däremot brukar t-fördelningen (alternativt GARCH) tas som exempel på på tjocksvansade fördelningar (modeller) som passar bättre då man modellerar med finansdata och avkastningar, men är desto krångligare att räkna på. Med detta sagt så kan vi förvänta oss att normalfördelningen kommer att underskatta $\widehat{\text{VaR}}$ i exempelvis varians-kovaransmetoden. Detta såg vi hos två av skattningarna, nämligen för skattningarna 1% VaR i den rullande varians-kovariansmetoden med 500 observationer. De andra varians-kovariansmodellerna överskattade dock $\widehat{\text{VaR}}$ med relativt mycket (men inte lika mycket som den historiska simuleringsmodellen). Detta kan tyda på något underliggande i data. En möjlig förklaring kan vara att perioden i skattningsunderlaget har varit mer volatil och osäker vilket har bidragit till en relativt hög skattning av standardavvikelsen. Följden av detta blir att denna skattade normalfördelningskurva med högre varians får ett plattare utseende. När denna sedan används som skattningsunderlag för $\widehat{\text{VaR}}$ så får vi ett percentil-värde på normalfördelningskurvan som ligger längre ut i svansen i och med att vi tar normalfördelnings-percentilen multiplicerat med den skattade standardavvikelsen. Vid jämförelse av vår skattning och vår referensperiod, en period bestående av mindre prisfluktuationer och lägre volatilitet, blir således följden att fler avkastningar i referensunderlaget hamnar under skattad VaR. Denna teori kan styrkas genom att titta på figur 3 i kapitel 3.2 där vi kan ana en relativt volatil dagsavkastning för S&P 500 från dag 1 till runt dag 700, jämfört med volatiliteten under hela vår referensperiod (den röda kurvan) som är betydligt lägre.

GARCH(1,1)-modellen med rullande observationsperiod ger som förväntat bäst resultat. Detta beror troligtvis på att modellen lägger större vikt vid de senaste observationerna medan de äldre avkastningarna får mindre inflytande. Detta framgår av ekvation (17) och (18) där vi ser att morgondagens skattade varians beror av dagens residual i kvadrat och dagens varians, som i sin tur beror på residualerna och variansen från dagen innan och så vidare. Detta ses tydligt i figur 14 och 17, där $\widehat{\text{VaR}}$ och $\widehat{\text{ES}}$ tydligt följer avkastningens fluktuationer (jämför detta med 8 och 11 där alla observationer ges samma sannolikhet). Vi kan således konstatera att antagandet om att morgondagens varians beror av tidigare dagars varians och residualer i den anpassade modellen verkar vara ett vettigt antagande. En annan följd av att GARCH-modellen tar större hänsyn till senare observationer är att vi får lägre skattningar på VaR och ES i den rullande modellen. I och med att vår referensperiod är mindre volatil jämfört med skattningsperioden, ger GARCH(1,1) lägre värden på $\widehat{\text{VaR}}$ och $\widehat{\text{ES}}$ än historiska simuleringsmetoden och varians-kovariansmetoden. Vi får dock ingen större skillnad mellan GARCH-modellerna med normalfördelade respektive t-fördelade ϵ_t. Fördelningarna ger samma icke-signifikanta modeller i backtestet. Däremot ser vi att $\widehat{\text{VaR}}^{t}_{0.05} > \widehat{\text{VaR}}^{\text{N}}_{0.05}$ medan $\widehat{\text{VaR}}^{t}_{0.01} < \widehat{\text{VaR}}^{\text{N}}_{0.01}$, där t och N står för t-fördelnigen respektive normalfördelningen. Det vill säga vi skattar större förluster på 5% VaR med normalfördelningen än med t-fördelningen men tvärtom i skattningen av 1% VaR. Vi anar alltså återigen tjockare svansar med t-fördelningen och därför får vi större skattade förluster.

Vid jämförelse med analysen i kapitel 4.5 ser vi markanta skillnader i resultatet för i stort sett alla modeller, se tabell 11. En slående observation är att det endast är en modell av alla de historiska simuleringsmodellerna och varians-kovariansmodellerna som ger ett statistiskt icke-signifikant resultat i vårt backtest av $\widehat{\text{VaR}}$. Alla skattningar på VaR underskattas avsevärt, oberoende av värdet på konfidensnivån p, jämfört med tidigare analys. Vi ser att GARCH(1,1)

ger överlägset bäst skattningar av 5% VaR medan skattningen av 1% VaR blir signifikant i vårt backtest för alla modeller. Vi kan således dra slutsatsen att den historiska simuleringsmetoden och varians-kovariansmetoden i högre grad kräver att det historiska skattningsunderlaget verkligen kan beskriva framtiden på ett korrekt sätt. Skulle vi, som i kapitel 4.5, ha tillgång till ett skattningsunderlag med låg volatilitet och (vid denna tidpunkt ovetande) stå inför en framtida marknad med hög grad av osäkerhet och hög volatilitet, så kommer vi med allra största sannolikhet att underskatta VaR för den kommande framtiden med någon av dessa två metoder. Notera även att den historiska simuleringsmetoden kan aldrig ge ett värde på VaR som inte kan återfinnas i den historiska datan.

Sammanfattningsvis kan vi konstatera att de rullande observationsperioderna ger överlag bättre skattningar än den fixa observationsperioden, utan större skillnader mellan M1 och M2. Svårare är det att jämföra observationsstorlekarna mellan modellerna då modellerna baserade på 1 000 observationer ofta skattade ett värde av VaR som låg högre än alla verkliga utfall.

Både den historiska simuleringsmetoden och varians-kovariamsmetoden är väldigt tilltalande med sin lättförstådda tillämpning och enkla utförande. Dock kräver modellerna att vi har tillgång till historisk data som kan beskriva framtiden väl, men detta är omöjligt att vet på förhand. För historisk simulering behöver vi ha tillgång till ett stort antal datapunkter så att vi får med så många möjliga utfall som möjligt. Däremot kan vi inte använda oss av observationer alltför långt tillbaka i tiden då dessa riskerar att vara oanvändbara. För varians-kovariansmetoden ger normalfördelningsantagandet i modellen en begränsad användbarhet i och med att förlusternas storlek sällan kan beskrivas av en normalfördelning i prakriken. På grund av detta kan, trots bra marknadsförhållanden och ett skattningsunderlag som beskriver framtidens prisfluktuationer väl, varians-kovariansmetoden skatta missvisande värden på VaR som ett resultat av det normalfördelningsantagandet för förlustfunktionen. I och med dessa observationer drar vi slutsatsen, från denna studie och med våra givna förutsättningar, att skattningar av VaR med historisk simulering och varians-kovariansmetoden bör användas med försiktighet och att resultaten endast ska ses som en fingervisning och ett komplement till andra riskmått och inte som ett ensamt riskmått. För att dessa modeller ska kunna användas med större säkerhet i praktiken bör de förfinas, exempelvis genom att vika avkastningarna som ovan nämts.

GARCH(1,1)-modellen är den modell som producerade bäst skattningar av VaR för vårt aktieindex. Denna modell tar som tidigare nämts större hänsyn till de senaste observationerna. Detta görs genom att låta skattningarna av morgondagens varians bero av dagens varians och residualerna i kvadrat från den anpassade modellen, och på så vis påverka VaR genom ekvation (18). Således tillåter GARCH-modellerna mer variation i data över tiden än de andra två modellerna. GARCH(1,1) med t-fördelade ϵ_t skattar högre värden på VaR på 1% nivå än med normalfördelade. Annars skiljer sig dessa två modeller lite åt i vår studie. Vi kan slutligen konstatera att GARCH(1,1) är den överlägset bästa modellen av de tre analyserade i denna studie. Denna tar hänsyn till svängande marknadsförhållanden i större utsträckning än de två övriga. Däremot bör man komma ihåg att även denna modell är just en modell av verkligheten och inte ett faktum. Därför bör dess skattningar av VaR, framförallt vid högre konfidensnivåer, användas med försiktighet.

A Appendix

A.1 Tvådelat binomialtest

Låt $X \sim \text{Bin}(n, p)$, p okänd. Skatta sannolikheten $\hat{p} = x/n$, där x är en observation av den stokastiska variabeln X. För n "stort" kan X approximeras med en normalfördelning med väntevärde np och varians $np(1-p)$. Detta ger ett tvåsidigt approximativt konfidensintervall för $\hat{p}$

$$I_p = \left(\hat{p} - \lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + \lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

där $\lambda_{\alpha/2}$ är standardnormalpercentilen för den önskade konfidensnivån på testet. Nollhypotesen, $p = \hat{p}$, förkastas om $p \notin I_p$, se [1].

A.2 Maximum likelihood-skattningar för GARCH(1,1)

En modell sägs vara GARCH(1,1) om den kan skrivas på formen

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \ \text{ där } \ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

och där ϵ_t har kommer från en väldefinierad fördelning med väntevärde 0 och standardavvikelse 1, se [4]. ML-ekvationerna fås på sedvanligt vis genom att derivera loglikelihoodfunktionen, som ges av den logaritmerade täthetsfunktionen för ϵ_t. I och med att vi har tre okända parametrar som vi önskar skatta får vi partialderivera loglikelihoodfunktionen med avseende på alla tre parametrar. Vi betecknar mängden av de tre parametrarna med $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$. Beteckna likelihoodfunktionen $L(\theta)$, loglikelihoodfunktionen $l(\theta)$ och fördelningsfunktionen för ϵ_t $f_t(\theta)$. Det ska dock nämnas här att θ endast ingår i likelihoodfunktionen via σ_t^2. Det betyder att när vi deriverar $l(\theta)$ så gör vi det med avseende på θ genom σ_t^2. Men för att hålla notationen enkel så använder vi bara θ i denna[26]. Loglikelihoodfunktionen för normalfördelningen ges med ovan använda beteckningar som

$$l(\theta) = \ln(L(\theta)) = \ln\left(\prod_{t=1}^{n} f_t(\theta)\right) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}.$$

där n är antalet observationer i avkastningen. Nu deriverar vi $l(\theta)$ och sätter derivatan till 0.

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \sigma_t^2} = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{\sigma_t^2}\cdot\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\frac{a_t^2}{(\sigma_t^2)^2}\cdot\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta} = 0.$$

Som ovan nämts så beror σ_t^2 på $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ så $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \sigma_t^2}$ måste deriveras med avseende på alla dessa tre parametrar. Vi får de partiella derivatorna av σ_t^2 som

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha_0} &= 1 + \beta_1 \frac{\partial \sigma_{t-1}^2}{\partial \alpha_0} \\
\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha_1} &= a_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial \sigma_{t-1}^2}{\partial \alpha_1} \\
\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \beta_1} &= \sigma_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial \sigma_{t-1}^2}{\partial \beta_1}
\end{aligned}$$

där var och en ska stoppas in i $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \sigma_t^2}$ för att få ut maximum likelihood-skattningarna av $\hat{\theta} = (\hat{\alpha_0}, \hat{\alpha_1}, \hat{\beta_1})$.

[26] det mest korrekta hade möjligtvis varit att skriva $l(\sigma_t^2(\theta))$

För t-fördelade ϵ_t går vi tillväga på samma sätt men vi har en likelihoodfunktion som består av en produkt av n stycken täthetsfunktioner från en t-fördelning. Med samma beteckningar som ovan får vi

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \ln(L(\theta)) = \ln\left(\prod_{t=1}^{n} f_t(\theta)\right) \\ &= n\ln\left(\frac{\Gamma(\frac{m+1}{n})}{\sqrt{\pi(m-2)}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\right) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\ln\sigma_t^2 - \frac{m+1}{2}\sum_{t=1}^{n}\ln\left(1+\frac{a_t^2}{\sigma_t^2(m-2)}\right), \end{aligned}$$

där m är antalet frihetsgrader, se [9]. Vi deriverar med avseende på σ_t^2 och sätter detta lika med 0.

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \sigma_t^2} = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{\sigma_t^2}\cdot\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\theta} + \frac{m+1}{2}\sum_{t=1}^{n}\frac{a_t^2}{(\sigma_t^2)^2(m-2)+\sigma_t^2 a_t^2}\cdot\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\theta} = 0.$$

Vi stoppar in de partiella derivatorna av σ_t^2 med avseende på α_0, α_1 och β_1 i $\frac{\partial l(\theta)}{\partial\sigma_t^2}$ för att få ut maximum likelihood-skattningarna av $\hat{\theta} = (\hat{\alpha_0}, \hat{\alpha_1}, \hat{\beta_1})$.

A.3 Tvådelat konfidensintervall för t-fördelningen

Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara ett stickprov från $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, μ och σ okända. Låt $\bar{x}$ beteckna stickprovsmedelvärdet och s^2 stickprovsvariansen.[27] Då ges ett tvåsidigt konfidensintervall för μ med konfidensnivå $1-\alpha$ av

$$I_\mu = \left(\hat{\mu} - t_{\alpha/2}(m)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\ \hat{\mu} + t_{\alpha/2}(m)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

där $t_{\alpha/2}(m)$ är t-percentilen från en t-fördelningen med m frihetsgrader och $s = \sqrt{s^2}$, se [1].

[27] definierade i kapitel 2.2.1

Referenser

[1] Alm, S. E.; Britton, T. *Stokastik - Sannolikhetsteori och statistikteori med tillämpningar.* Liber, 2008.

[2] Brooks, C. *Introductory econometrics for finance.* Second edition. Cambridge University Press, 2008.

[3] Gut, A. *An intermediate course in probability.* Second edition. Springer, 2009.

[4] Hult, H.; Lindskog, F.; Hammarlid, O.; Rehn, C. J. *Risk and portfolio analysis - Principle and methods.* Springer, 2012.

[5] McNeil, A. J.; E.; Frey, R.; Embrechts, P. *Quantitative Risk Management.* Princeton University Press, 2005.

[6] Tsay, R. S. *Analysis of financial time series.* Third edition. John Wiley & Sons, Inc., 2010.

[7] Investopedia. *An Introduction To Value at Risk (VAR).* Hämtat 3 maj 2015. URL: `http://www.investopedia.com/articles/04/092904.asp`.

[8] R hjälpmanual. *AIC.* Hämtat 5 maj 2015. URL: `http://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/AIC.html`.

[9] MathWorks. . Hämtat 8 maj 2015. URL:`http://se.mathworks.com/help/econ/maximum-likelihood-estimation-for-conditional-variance-models.html`.

[10] Holton, G. A. *Value-at-Risk: Theory and Practice.* Second edition, e-book, 2014. URL: `http://value-at-risk.net`.