



Stockholms
universitet

Schellings segregationsmodell - en simuleringsstudie

Jessika Djäknegård

Kandidatuppsats 2015:23
Matematisk statistik
September 2015

www.math.su.se

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm

Schellings segregationsmodell - en simuleringsstudie

Jessika Djäknegård*

September 2015

Sammanfattning

Denna uppsats är en simuleringsstudie av Schellings segregationsmodell, en modell där utvecklingen av segregation i en population drivs av diskriminerande beteenden på individnivå. Syftet med studien är att bidra med ökad förståelse för hur andelen tomma celler i modellen påverkar segregationen och utfallet vid simulering. Den ursprungliga modellbeskrivningen är dock otydligt formulerad så vi söker även en mer rigorös modellbeskrivning som en del av arbetet. För detta kopplar vi samman modellen med teori inom området agent-baserad modellering.

Modellen återskapas i programmeringsspråket JavaScript och simuleras för 10%, 30%, 50% och 70% tomma celler. Då det vanligtvis är nivån av diskriminerande beteende som tillåts variera i modellen väljer vi att upprepa testerna för låg, medel och hög nivå av diskriminerande beteende. Vi kan således få en mer omfattande bild av andelen tomma cellers inverkan. Diskriminerande beteende mäts i form utav grannskapströsklar, ett mått för hur höga krav individerna har på dess lokala grannskap i populationen. Ju högre grannskapströskel desto högre är nivån av diskriminerande beteende. Resultatet analyseras sedan utifrån den resulterande segregationsnivån i populationen samt tiden det tar för modellen att stabiliseras.

Resultaten i studien visar att andelen tomma celler har en effekt på både segregationsnivån och stabiliseringstiden. För låg grannskapströskel ökar både segregationsnivån och stabiliseringstiden då andelen tomma celler ökar. För medel till hög grannskapströskel observeras ett mönster där stabiliseringstiden för 10% tomma celler är avsevärt högre än för 30%, 50% och 70% tomma celler. För medel grannskapströskel är segregationsnivån hög för alla andelar tomma celler men som högst för 70% tomma celler. För hög grannskapströskel är segregationsnivån mycket hög men resultatet varierar ändå något för olika andelar tomma celler.

Nyckelord: Schellings segregationsmodell, stokastisk modellering, agent-baserad modellering

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.
E-post: jedj2028@student.su.se. Handledare: Mia Deijfen.

Abstract

This thesis is a simulation study of Schelling's model of segregation, a model where the evolution of segregation in a population is driven by discriminatory behavior at individual level. The purpose of the study is to contribute with increased understanding of how the proportion of empty cells in the model affects the level of segregation and the outcome from simulation. The original model description, however, is ambiguous so we are also looking for a more rigorous description as a part of the work. For this, we link together the model with theory in the field of agent based modeling.

The model is implemented in the programming language JavaScript and simulated for 10%, 30%, 50% and 70% empty cells. As it is usually the level of discriminatory behavior that is allowed to vary in the model we choose to repeat the tests for low, medium and high level of discriminatory behavior. We can thereby obtain a more extensive picture of how the amount of empty cells affect the outcome of the model. Discriminatory behavior is measured in the form of neighborhood thresholds, a measure of how high demands the individuals have on their local neighborhood in the population. The higher the neighborhood threshold, the higher the level of discriminatory behavior. The results are then analyzed with respect to the resulting level of segregation in the population and the time taken for the model to stabilize.

The results of the study show that the proportion of empty cells have an effect on both the level of segregation and stabilization time. For low neighborhood thresholds, both segregation level and stabilization time increases when the proportion of empty cells increases. For medium to high neighborhood thresholds we observe a pattern where the stabilization time for 10% empty cells is substantially higher than for 30%, 50% and 70% empty cells. For medium neighborhood threshold, the level of segregation is high for all proportions of empty cells but is the highest for 70% empty cells. For high neighborhood threshold, the level of segregation is very high although the results still vary somewhat for different proportions of empty cells.

Keywords: Schelling's model of segregation, stochastic modelling, agent-based modelling

Förord

Ett stort tack till min handledare Mia Deijfen för värdefull feedback och rådgivning under arbetets gång. Jag vill även tacka familj, vänner och arbetsgivare som alla har visat stort stöd och låtit mig ta min tid till att skriva denna uppsats. Ett extra tack till Andreas för hjälp med korrekturläsning och till Stina för särskilt stöttande.

Innehåll

1	Introduktion	1
1.1	Bakgrund	1
1.2	Schellings segregationsmodell	2
1.3	Problemformulering och syfte	3
2	Teori	4
2.1	Agent-baserad modellering	4
2.2	Segregationsnivå	5
2.3	Moore-grannskap	6
3	Beskrivning av modellen	8
4	Metod	11
5	Resultat	13
5.1	Låg grannskapströskel	13
5.2	Medel grannskapströskel	15
5.3	Hög grannskapströskel	18
6	Slutsatser	22
7	Diskussion	24
7.1	Relation till Schellings resultat	24
7.2	Studiens begränsningar	24
7.3	Framtida studier	25
7.4	Konsekvenser av studiens resultat	27
	Bilaga A Data från simuleringar	28

1 Introduktion

1.1 Bakgrund

Segregation är ett väl omdebatterat ämne i Sverige och det anses vara en av de viktigaste samhällspolitiska problemen i många väst-europeiska länder [1]. Vad som driver segregation och hur man motarbetar det är dock svårt att fastställa. Orsakerna är många och svåra att analysera men vi vet att socioekonomiska faktorer, samhällsstrukturer och diskriminerande beteenden är några bland många orsaker [2]. Det finns få modeller inom området som kan vara till hjälp för att förstå problemet. En välkänd modell inom socioekonomisk forskning är dock Schellings segregationsmodell, framtagen av Thomas Schelling i slutet av 60-talet. Modellen ger inblick i hur diskriminerande beteende på individnivå kan agera som drivkraft till segregation på kollektiv nivå och resultaten visar att även mildare diskriminerande beteende kan leda till hög segregation. Sedan Schellings modell först publicerades har den blivit väl citerad inom socioekonomisk forskning och är mycket populär inom området [3].

Schellings segregationsmodell anses vara en av de första agent-baserade modellerna och många forskare menar att Schelling är en pionjär inom området [4], [5], [6]. Agent-baserad modellering har sedan 90-talet blivit ett populärt sätt att studera hur individuella beteenden kollektivt kan generera komplexa system, exempelvis inom samhällsvetenskaplig forskning [7]. Även om Schellings modell publicerades 20 år innan agent-baserad modellering blev stort bygger dynamiken på samma funktionalitet som dagens agent-baserade modeller.

Modellerna byggs upp utav autonoma agenter och utvecklingen drivs utav interaktionen mellan dessa, till skillnad från många andra modeller som bygger på ekvationer på en aggregat nivå. För att generera och observera systemen modelleras dessa och simuleras med datorer som verktyg. Således kan man återskapa komplexa sociala mekanismer, där bland segregation i en population. I avsnitt 2.1 går vi djupare in på detta område.

1.2 Schellings segregationsmodell

Nedan följer en beskrivning av Schellings segregationsmodell i två dimensioner. Modellbeskrivningen är en sammanställning av Schellings egna formuleringar i hans publikationer från slutet av 60-talet och början på 70-talet [3], [8], [9].

Låt N individer delas in i två grupper. Om två individer tillhör samma grupp betraktas de som lika, annars betraktas de vara olika. Indelningen antas vara uttömmande, igenkännbar och permanent. Med detta menas att ingen individ saknar grupptillhörighet, att det är enkelt att urskilja grupptillhörighet och att ingen individ kan byta grupptillhörighet. Antag vidare att alla individer är medvetna om och bryr sig om proportionen av lika grannar i deras grannskap. Varje individ har en given position vid varje tidssteg och alla individer har förmågan att flytta om de är missnöjda med sin position. Huruvida en individ är nöjd eller missnöjd baseras på dess åsikt om proportionen av lika grannar i grannskapet. Antalet individer i varje grupp, den individuella preferensen om grannskapet och storleken på grannskapet kan manipuleras.

Fördela individerna - slumpmässigt eller icke slumpmässigt - i ett rutnät av fixerad storlek sådant att alla individer får plats och en andel av positionerna lämnas tomma. Ungefär 25-30% tomma positioner är tillräckligt för att ge individerna utrymme för rörelse utan att lämna rutnätet för tomt. Se Figur 1.1 för ett exempel på hur en sådan utplacering utav individerna kan se ut.

Definiera ett grannskap för varje individ som ett fixt antal av de närliggande positionerna i rutnätet. Den minsta storleken på grannskapet bör vara de åtta närliggande positionerna med undantag för kantpositionerna som har fem grannar och hörnpositionerna som har tre grannar. Stipulera regler för varje individ gällande hur stor andel lika grannar individen vill ha i sitt grannskap. Sortera ut de individer som är missnöjda med sin position utifrån dessa regler. Bestäm regler för förflyttning och flytta de missnöjda individerna till någon av de tomma positionerna i rutnätet enligt dessa regler. Fortsätt flytta missnöjda individer tills alla är nöjda med sin position. Observera vilka mönster som har uppstått. Om populationen inte uppnår ett stadie där alla individer är nöjda, observera vilket beteende som genereras.

#		○	#	#	○	#	○
	○	○		○		○	
#	#	○	#	#	○	#	#
	○		#		#		○
○	#	#	○	#	○	○	
#	○	#		○	#	#	
	○	#	#		○		○
○	#		○	○	#	○	#

Figur 1.1: Ett exempel på Schellings segregationsmodell baserad på bilder från Schellings egna illustrationer [8]. Cirklar representerar individer av den ena grupptillhörigheten och fyrkanter representerar individer av den andra grupptillhörigheten. Helvita rutor är tomma positioner.

1.3 Problemformulering och syfte

I Schellings ursprungliga beskrivning av segregationsmodellen framgår det inte tydligt hur parametrar bör väljas. Det finns en stor uppsättning möjliga variationer och tolkningar av modellen vilket gör det intressant att söka en mer rigorös beskrivning utav den ursprungliga segregationsmodellen.

Det vore också intressant att undersöka hur miljön i modellen påverkar utfallet vid simulering. När vi talar om miljön i modellen finns det många aspekter att undersöka, då denna uppsats inte kan täcka allt väljer vi att fokusera på de tomma positionernas påverkan. Schelling nämner själv att 25-30% tomma positioner duger bra men någon tydlig motivation utelämnas. Huvudsyftet med denna studie blir således att bidra med en bättre förståelse för hur andelen tomma celler påverkar utfallet vid simulering utav Schellings segregationsmodell, detta ur två aspekter: segregationsnivå och stabiliseringstid. Segregationsnivån definierar vi i avsnitt 2.2 och stabiliseringstid är ett mått på tiden det tar för utvecklingen i modellen att stabiliseras.

2 Teori

Innan vi går in på modellbeskrivning och metodval är det viktigt att vi redogör för den teori som ligger till grund för arbetet. I detta avsnitt tar vi upp teori kring agent-baserad modellering, vi definierar den typ av grannskap som används i studien och vi klargör vad som menas med segregationsnivå.

2.1 Agent-baserad modellering

Agent-baserad modellering är det beräkningsmatematiska studiet av autonoma interagerande agenter som ett utvecklande system [7]. Det används som verktyg för att förstå hur komplexa sociala system utvecklas och hur interaktionen mellan individer (agenter) driver utvecklingen i systemen. Detta görs genom en kombination av spelteori, teori för komplexa system, evolutionär programmering och stokastisk modellering [6].

Modellerna består huvudsakligen av tre grundläggande beståndsdelar: en mängd agenter, en mängd regler för interaktion och en miljö. Nedan följer en definition av hur agent-baserade modeller är uppbyggda. Definitionen är en sammanställning av ett flertal teoriavsnitt från olika källor med fokus på de delar av agent-baserad modellering som är relevant för denna uppsats [5], [6], [7], [10], [11].

Definition 1. Låt

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, n \in \mathbb{N}$$

vara en mängd av agenter. Varje agent består av en identitet, en mängd attribut och en mängd beteenden:

$$a_i = \{id, attr_1, attr_2, \dots, attr_k, bet_1, bet_2, \dots, bet_l\} \quad \text{för } k, l \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, n$$

Alla agenter har minst två attribut gemensamt: de är autonoma och oberoende. Detta innebär att agenterna är självdrivande och samarbetar inte med varandra på något sätt. I modellen finns även en uppsättning regler

$$R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}, m \in \mathbb{N}$$

Reglerna bestämmer hur agenterna ska interagera med varandra, hur de ska förhålla sig till varandras attribut och hur de ska bete sig i olika sammanhang,

det vill säga när deras beteenden ska aktiveras. Agenterna existerar i en miljö som influerar hur interaktion mellan agenter går till och därmed påverkar deras beteenden.

Agent-baserade modeller är bra att använda då ett system består av och drivs av mindre oberoende komponenter. Ett bra exempel på ett sådant system ges av Macy och Willer [5]. Exemplet handlar om det beteende som får en flock fåglar att flyga i v-formation. Att modellera detta på en kollektiv nivå vore både komplicerat och tidskrävande. Flocken har inte en ledare som koordinerar flygningen och de samarbetar inte för att skapa den specifika formationen. Istället är det varje enskild fågel som förhåller sig till dess grannar enligt en uppsättning regler som kollektivt bildar v-formationen. Genom att modellera flockens beteenden som varje fågels interaktion med dess grann-fåglar kan man således återskapa och simulera v-formationen på ett realistiskt sätt.

2.2 Segregationsnivå

Hur man bäst mäter graden av segregation är en omdebatterad fråga inom socioekonomisk forskning och en standard för måttet tycks inte vara framtaget [12]. I denna uppsats mäts segregationsnivån baserat på den genomsnittliga andelen lika grannar i populationen. Denna andel anges i procent där resultat mellan 70% och 100% anses tyda på måttlig till mycket hög segregation.

Definition 2. För detta mått behöver följande grundkriterier vara uppfyllda:

- N individer är fördelade över ett två-dimensionellt rutnät
- Varje individ tillhör precis en av två möjliga grupper
- Det finns exakt lika många individer i båda grupperna och grupperna är distinkt olika
- Varje individ x_i har m_i grannar, för $m_i \in \{0, 1, \dots, M\}$, $M \geq 0$ och $i = 1, 2, \dots, N$
- En individ kan ej vara granne med sig själv

Andelen lika grannar för individ x_i är således

$$s_i = \begin{cases} \frac{1}{m_i} \sum_{l=1}^{m_i} \mathbb{1}_{\{\text{granne } l \text{ tillhör samma grupp}\}} & \text{om } m_i > 0 \\ 0 & \text{om } m_i = 0 \end{cases}$$

och segregationsnivån, S , mellan individerna definieras av

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i$$

vilket motsvarar den genomsnittliga andelen lika grannar i populationen.

2.3 Moore-grannskap

Enligt Schellings modellbeskrivning bör individernas grannskap definieras som minst de åtta närliggande positionerna i rutnätet. Detta motsvarar ett Moore-grannskap av räckvidd 1 vilket kommer att användas i studien [13].

Moore-grannskap är kvadratiska områden i ett tvådimensionellt rutnät där rutorna har sidlängd 1. Cell (x, y) är den cell med mittpunkt i punkten (x, y) och räckvidden från en cell till dess horisontella, vertikala och diagonala grannar betecknas med r . Se figur 2.1 för exempel på Moore-grannskap av olika räckvidd.

Räckvidden mellan två celler bör ej blandas ihop med avståndet mellan dessa. För cell (x_0, y_0) och (x_1, y_1) är avståndet

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

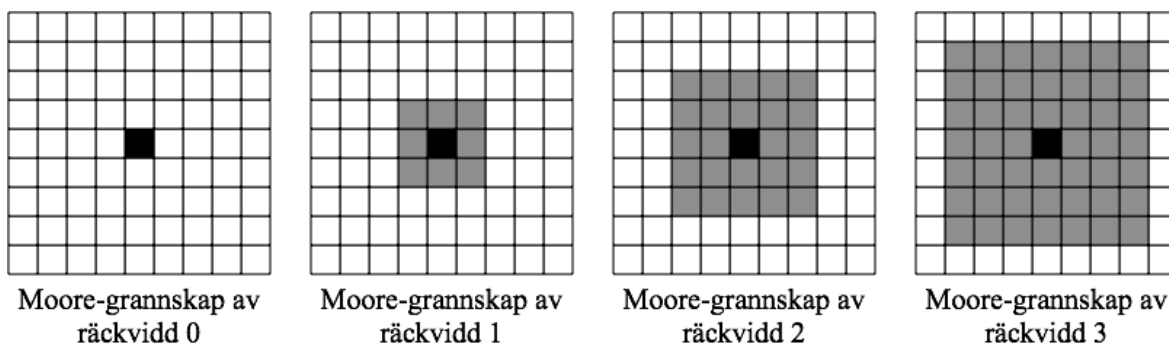
medan räckvidden är

$$\max(|x_1 - x_0|, |y_1 - y_0|).$$

En matematisk definition av Moore-grannskap följer nedan.

Definition 3. För varje cell (x_0, y_0) i ett tvådimensionellt rutnät definieras dess Moore-grannskap av räckvidd r av mängden $N_{(x_0, y_0)}^{(r)}$ av närliggande celler (x, y) sådana att $|x - x_0| \leq r$ och $|y - y_0| \leq r$, det vill säga

$$N_{(x_0, y_0)}^{(r)} = \{(x, y) : |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq r\}.$$



Figur 2.1: Exempel på Moore-grannskap av räckvidd 0, 1, 2 respektive 3. Den svarta cellen i vardera rutnät avser cell (x_0, y_0) och dess grannskap är de närliggande gråa cellerna.

3 Beskrivning av modellen

Modellen som används i denna studie är en tolkning av Schellings segregationsmodell. Den är beskriven enligt teori kring agent-baserad modell från avsnitt 2.1 och baseras på de vanligaste exempel som ges av Schelling i boken *Micromotives and Macrobehavior* [9].

Låt

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$$

vara en mängd av agenter som existerar i ett två-dimensionellt rutnät. I denna studie är rutnätet av storlek 48×48 vilket är stort nog för att populationen ska anses vara stor utan att simuleringarna blir för långsamma. Detta ger totalt 2304 celler och N måste således vara mindre än 2304. Låt K ange antalet tomma celler, det vill säga $K = 2304 - N$. Agenterna fördelas slumpmässigt ut i rutnätet. Se Figur 3.1 för exempel på hur en slumpmässig fördelning av agenter och tomma celler kan se ut, detta i ett rutnät av storlek 10×10 .

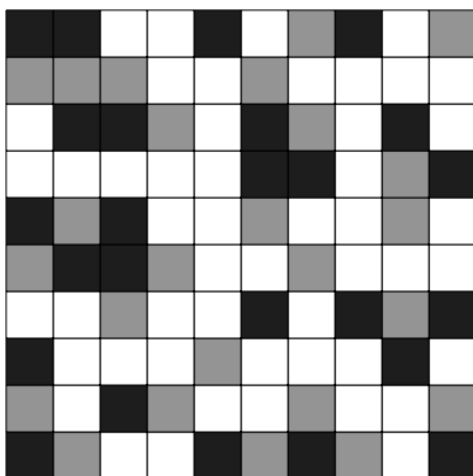
Varje agent har ett grannskap vilket motsvarar dess Moore-grannskap av räckvidd 1. En agent kan inte vara granne med sig själv och en tom cell i grannskapet räknas inte som en granne. Ett grannskap kan således innehålla som minst 0 grannar och som mest 8 grannar med undantag för kant-grannskapen som kan ha som mest 5 grannar och hörn-grannskapen som kan ha som mest 3 grannar. Se Figur 3.2 för exempel på hur dessa grannskap kan se ut.

Varje agent består av en identitet, fyra attribut och ett beteenden. För agent $a_i \in A$ motsvarar dess identitet i . Agentens attribut är grupptillhörighet och grannskapströskel, de är även autonoma och oberoende. Grupptillhörigheten motsvarar precis en av två möjliga grupper, vi kallar dem för grupp 1 och grupp 2. Om två agenter tillhör samma grupp betraktas de som lika, annars betraktas de som olika. En agents grannskapströskel betecknas med Λ och antar ett värde mellan 0 och 1. Grannskapströskeln motsvarar den minsta andelen grannar av samma grupptillhörighet (lika grannar) som agenten vill ha i sitt grannskap. Att agenterna är autonoma och oberoende innebär att varje agent jobbar självständigt och självgående med att nå sina mål, inga agenter samarbetar med varandra på något sätt.

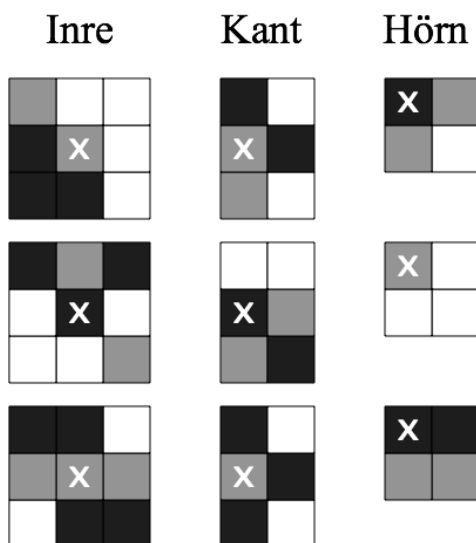
Agenternas beteenden är flyttbenägenhet och detta aktiveras om andelen lika grannar i grannskapet är lägre än dess grannskapströskel. Om agenten är flyttbenägen kommer den att vilja flytta till en tom cell och således lämna sin cell tom efter sig. Förflyttningen sker primärt till en tom cell sådan att agenten inte längre är flyttbenägen, om en sådan cell inte finns tillgänglig kommer agenten att flytta till en slumpmässigt vald tom cell. För att exemplifiera, om en agent har en grannskapströskel Λ och andelen lika grannar är $l < \Lambda$ så är agenten flyttbenägen, annars stannar agenten kvar i sitt grannskap.

Simulera modellen

1. Välj $N < 2304$
2. Välj en grannskapströskel $\Lambda \in (0, 1)$ som tillsätts alla agenter.
3. Gruppera in agenterna i två lika stora grupper: grupp 1 och grupp 2.
4. Fördela de N agenterna slumpmässigt i rutnätet.
5. Klassificera varje agent som flyttbenägen eller ej baserat på agentens grannskapströskel i samspel med dess grannskap.
6. Klassificera varje tom cell som passande för grupp 1 och/eller grupp 2 baserat på om en agent av respektive grupp skulle vilja stanna i cellens grannskap.
7. Välj slumpmässigt ut en agent som är flyttbenägen.
8. Välj slumpmässigt ut en tom cell som passar samma grupp som den utvalda agenten. Om ingen av de tomma cellerna passar samma grupp som den utvalda agenten, välj då slumpmässigt ut en tom cell.
9. Flytta den utvalda agenten till den utvalda tomma cellen.
10. Upprepa steg 5. Om inga agenter är flyttbenägna så avsluta simulering, annars upprepa steg 6-10.



Figur 3.1: Exempel på hur modellen skulle kunna se ut för ett rutnät av storlek 10×10 . De vita cellerna är tomma celler, de ljusgrå cellerna är agenter som tillhör grupp 1 och de mörkgrå cellerna är agenter som tillhör grupp 2.



Figur 3.2: Exempel på olika grannskap i modellen. Grannskapen tillhör agenterna markerade med x. De vita cellerna är tomma celler, de ljusgrå cellerna är agenter som tillhör grupp 1 och de mörkgrå cellerna är agenter som tillhör grupp 2.

4 Metod

I denna studie byggs ett JavaScript-program med biblioteken D3js och jQuery inkluderade. Programmet baseras på modellbeskrivningen i avsnitt 3. För att undersöka hur andelen tomma celler påverkar utfallet i modellen simuleras modellen för 10%, 30%, 50% respektive 70% tomma celler. I Schellings beskrivning av modellen nämner han att 25-30% tomma celler är lämpligt vilket gör det intressant att testa 30% tomma celler. Det finns också ett intresse att testa modellen för 50% tomma celler då detta innebär att agenterna tar upp lika många celler som det finns celler att flytta till. För att testa mer extrema värden väljs 10% och 70%, dessa har samma distans från 30% respektive 50% som distansen mellan 30% och 50%. Denna variation täcker fall då andelen tomma celler kan anses vara låg, medel, hög och mycket hög. Notera dock att antalet tomma celler endast kan anges i heltal vilket innebär att de procentuella andelarna är approximativt angivna. Mer precist motsvarar ovanstående andelar tomma celler $K = 230, 692, 1152$ respektive 1614, vilket således motsvarar $N = 2074, 1612, 1152$ respektive 690.

I varje test simuleras modellen 10 gånger och en simulering anses vara klar då inga agenter är flyttbenägna, då har modellen stabiliserats. När modellen har stabiliserats erhålls segregationsnivån i populationen enligt definition 2 i avsnitt 2.2 samt ett mått av tiden det tagit för modellen att stabiliseras. För att mäta stabiliseringstiden kan man tänka sig att det vore tillräckligt att mäta antalet förflyttningar som utförts tills dess att inga agenter längre är flyttbenägna. Antalet agenter varierar dock i samband med att andelen tomma celler varierar vilket vi behöver kompensera för. Som en normaliserat tidsmått används istället antalet förflyttningar dividerat med antalet agenter, detta är ekvivalent med det genomsnittliga antalet förflyttningar per agent i populationen. Resultaten blir således lättare att jämföra för olika andelar tomma celler. För exemplifiera, låt N vara antalet agenter i populationen och F vara antalet förflyttningar som genomfört under simuleringens gång, då mäts stabiliseringstiden som $\frac{F}{N}$.

Grannskapströskeln är den variabel som vanligtvis tillåts variera i Schellings segregationsmodell och därför finns det ett intresse att undersöka modellen för olika val av denna. Det ger oss en mer omfattande bild av andelen tom-

ma cellers inverkan i modellen. Därför upprepas varje test för $\Lambda = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ och $\frac{3}{4}$ vilket motsvarar en låg, medel respektive hög grannskapströskel. Dessa val täcker tre mycket intressanta fall och ger en tillräckligt bred bild av modellen. För låg grannskapströskel kan agenterna nöja sig med att ha en minoritet av lika grannar men för hög grannskapströskel måste grannskapet bestå av en klar majoritet lika grannar. För medel grannskapströskel kan agenterna nöja sig med att ha lika många lika som olika grannar i sitt grannskap.

Slutligen behöver vi hantera eventuella fall då det tar extremt lång tid för modellen att stabiliseras. Genom att följa utvecklingen av modellen under simuleringens gång bör vi kunna observera hur modellen går mot ett mer stabilt tillstånd. Om utvecklingen av modellen inte tyder på att den är på väg att stabiliseras bör simulering avbrytas vilket kan göras efter $10N$ förflyttningar. Detta motsvarar att agenterna i genomsnitt har flyttat 10 gånger var och om modellen vid detta laget ännu inte visar tecken på stabilisering så kan vi anta att det kommer ta extremt lång tid. Utfallet av en simulering som avbryts räknas som avsaknad av data, både segregationsnivå och stabiliseringstid bör samlas in då inga agenter längre är flyttbenägna.

5 Resultat

Nedan presenteras en sammanställning av de resultat som erhöles vid simulering av modellen i alla tester. En fullständig redovisning av all data ges i Bilaga A. Resultaten för vardera val av grannskapströskel presenteras i separata avsnitt. I Tabell 5.1 - 5.3 presenteras medelvärde och standardavvikelse från varje test och i Figur 5.1, 5.3, 5.4, 5.6 och 5.7 presenteras låddiagram för dessa. För varje test presenteras även en före- och efterbild på en av de tio simuleringarna i Figur 5.2, 5.5 och 5.8.

Ett gemensamt resultat för alla tester var att ingen av simuleringarna behövde avbrytas. Modellen stabiliserades vid alla simuleringar.

5.1 Låg grannskapströskel

I Tabell 5.1 samt figur 5.1 och 5.2 presenteras resultat för tester med låg grannskapströskel. I Tabell 5.1 ser vi att medelvärdet för segregationsnivån ökar i samband med att andelen tomma celler ökar men standardavvikelsen är nästintill densamma. Skillnaden i medelvärdet mellan 10% och 70% tomma celler är 18 procentenheter från 58% till 76%. Detta motsvarar en skillnad mellan låg och måttlig segregation. För stabiliseringstiden är medelvärdet som lägst 0.07 och som högst 0.25 vilket är cirka 3.5 gånger högre än den lägsta. Stabiliseringstiden ökar i både medelvärde och standardavvikelse då andelen tomma celler ökar.

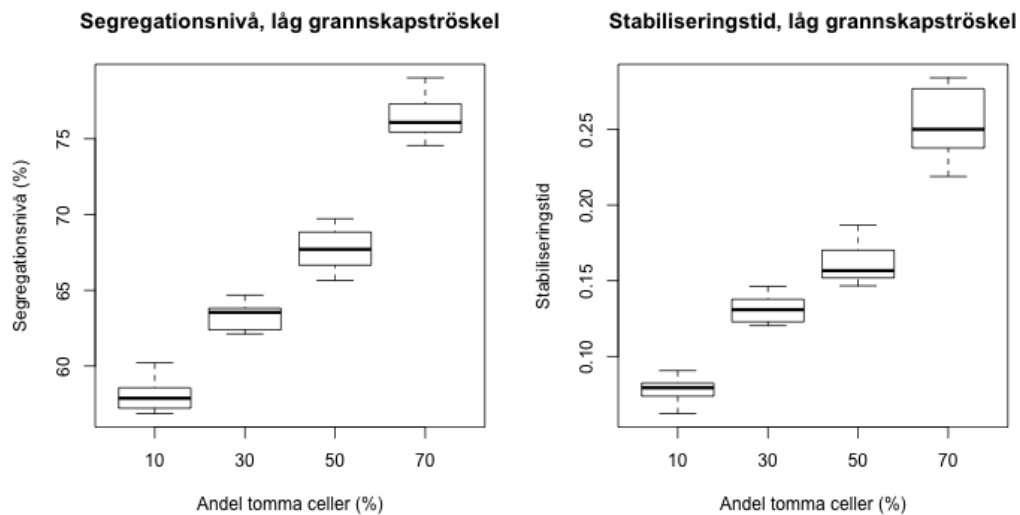
I låddiagrammen i Figur 5.1 ser vi dels hur segregationsnivån och stabiliseringstiden ökar då andelen tomma celler ökar, samt att spridningen i resultaten är låg. Resultaten från varje test är koncentrerad på ett kort intervall i förhållande till varandra och detta gäller för både segregationsnivån och stabiliseringstiden.

I före- och efterbilderna i Figur 5.2 ser vi att agenterna har efter simulering bildat många små klungor av lika agenter. Ju högre andel tomma celler desto mindre är storleken på de sammanhängande klungorna. Vi ser även att agenter som är olika i större grad kommer i kontakt med varandra ju lägre andelen av tomma celler är. För 10%, 30% och 50% tomma celler har i stort

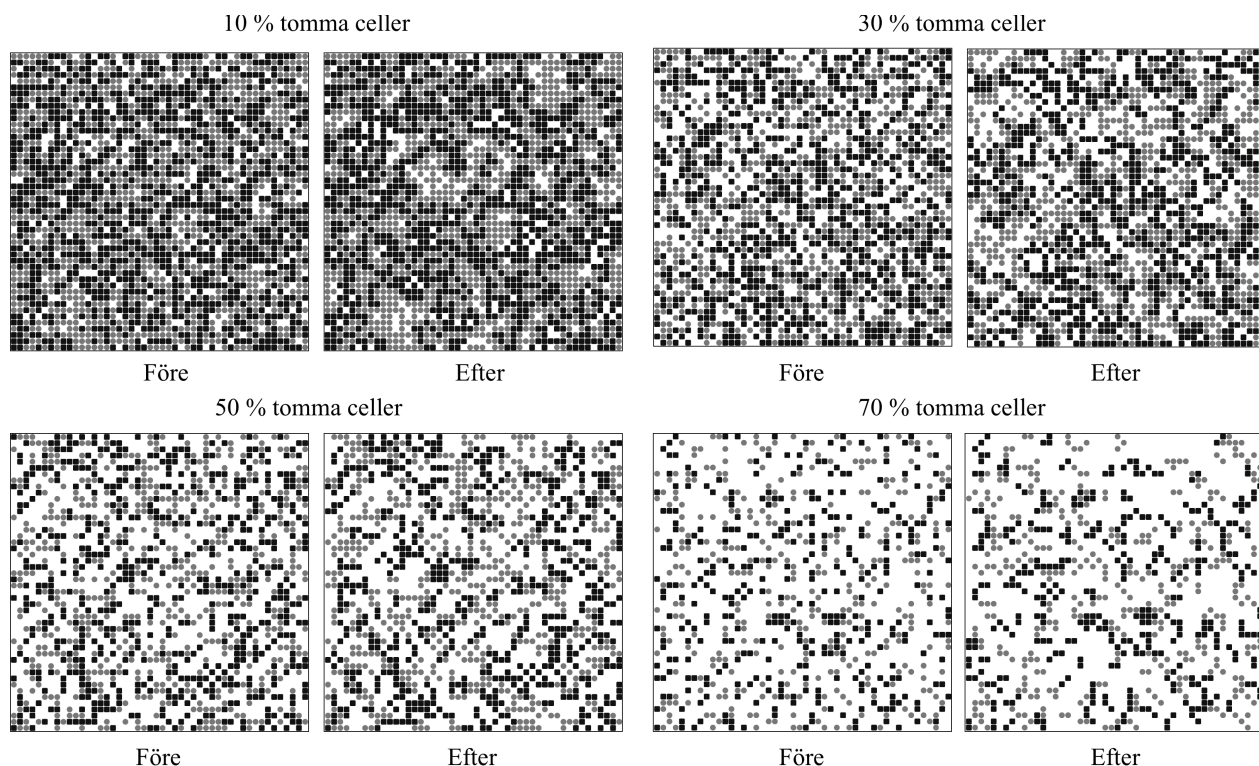
Låg grannskapströskel				
Andel tomma celler	Segregationsnivå (%)		Stabiliseringstid	
	Medelvärde	Standardavvikelse	Medelvärde	Standardavvikelse
10%	58.1	1.00	0.0784	0.00775
30%	63.4	0.869	0.131	0.00866
50%	67.7	1.24	0.162	0.0128
70%	76.5	1.49	0.254	0.0231

Tabell 5.1: Segregationsnivå och stabiliseringstid för tester med låg grannskapströskel.

sett alla homogena klungor kontakt med varandra medan det finns flera isolerade klungor för 70% tomma celler, det vill säga att de är omringade av tomma celler.



Figur 5.1: Låddiagram över segregationsnivå och stabiliseringstid för tester med låg grannskapströskel.



Figur 5.2: Före- och efter-bild på en av de tio simuleringarna för varje val av andel tomma celler med låg grannskapströskel.

5.2 Medel grannskapströskel

I Tabell 5.2 samt Figur 5.3, 5.4 och 5.5 presenteras resultat för tester med medel grannskapströskel. I Tabell 5.2 ser vi att medelvärdet för segregationsnivå för 10%, 30% och 50% tomma celler skiljer sig relativt lite från varandra, men att medelvärdet är ungefär 3-5% högre för 70% tomma celler. Dessa medelvärden motsvarar alla en hög nivå av segregation. Standardavvikelsen för segregationsnivån för 10%, 50% och 70% tomma celler skiljer sig lite från varandra, med undantag för 30% tomma celler där den är något lägre. För stabiliseringstiden ser vi att medelvärdet för 10% tomma celler är cirka 1.5 gånger högre än för övriga andelar. För 30% och 70% tomma celler erhöles samma resultat för både medelvärde och standardavvikelse och för 50% tomma celler är medelvärdet nästan densamma, dock är standardavvikelsen högre.

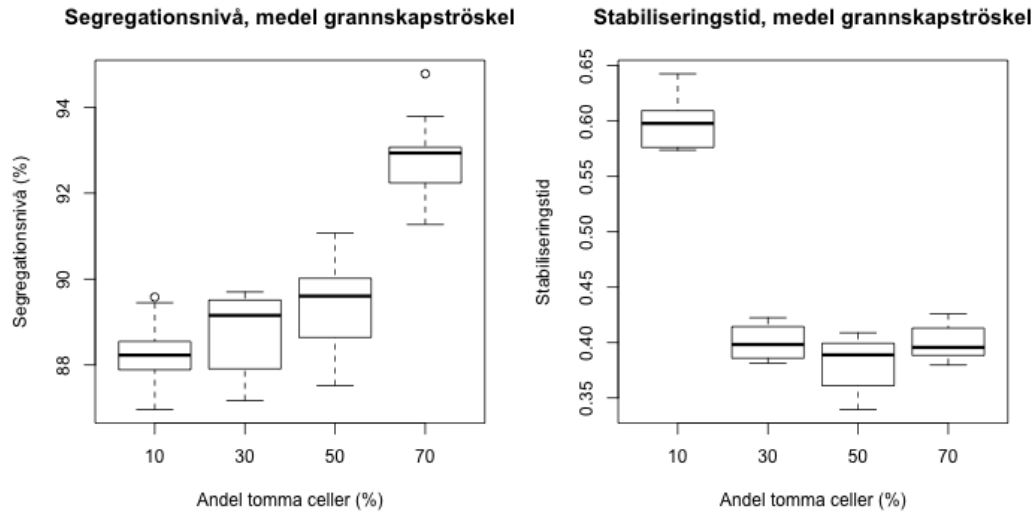
I låddiagrammet för segregationsnivåerna i Figur 5.3 ser vi att spridning-

Medel grannskapströskel				
Andel tomma celler	Segregationsnivå (%)		Stabiliseringstid	
	Medelvärde	Standardavvikelse	Medelvärde	Standardavvikelse
10%	88.3	0.777	0.600	0.0249
30%	88.8	0.927	0.400	0.0149
50%	89.4	1.11	0.382	0.0225
70%	92.9	0.960	0.399	0.0150

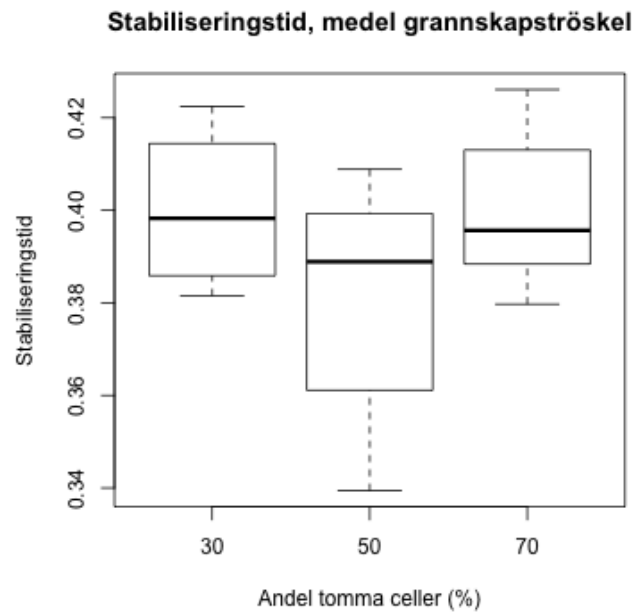
Tabell 5.2: Segregationsnivå och stabiliseringstid för tester med medel grannskapströskel.

en i resultaten för 10%, 30% och 50% tomma celler är hög i förhållande till varandra. Vi ser även att mätningarna av segregationsnivån för 70% tomma celler alla är högre än för 10%, 30% och 50% tomma celler. För stabiliseringstiden ser vi att resultatet för 10% tomma celler är mycket högre än övriga resultat. I Figur 5.4 presenteras låddiagram för stabiliseringstiden då resultatet för 10% tomma celler är exkluderad. I detta låddiagram ser vi hur läget och spridningen av resultaten för 30%, 50% och 70% tomma celler skiljer sig mycket lite från varandra.

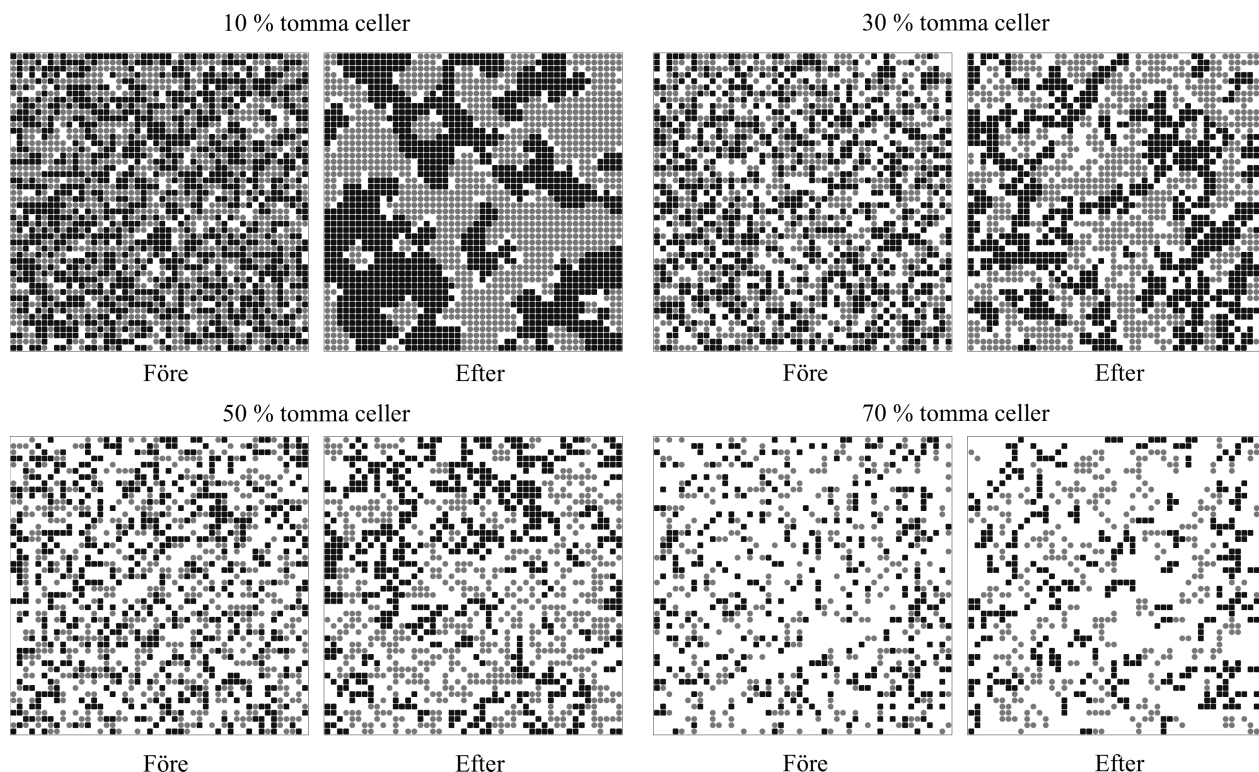
I Figur 5.5 ser vi hur agenterna av samma grupptillhörighet har klungat ihop sig efter simulering med tydligast resultat för lägre andelar tomma celler. För 10% tomma celler är de homogena klungorna få och stora. De är inte isolerade från varandra men de tomma cellerna är positionerade kring kanterna av klungorna. För 30%, 50% är de homogena klungorna också stora men inte lika täta som för 10%. Störst utsträckning utav isolerade homogena klungor finns för 70% tomma celler, dock kommer de inte mycket i kontakt med varandra för 50% heller.



Figur 5.3: Låddiagram över segregationsnivå och stabiliseringstid för tester med medel grannskapströskel.



Figur 5.4: Låddiagram över stabiliseringstid för tester med medel grannskapströskel då resultatet för 10% tomma celler är uteslutet.



Figur 5.5: Före- och efter-bild på en simulering för tester med medel grannskapströskel.

5.3 Hög grannskapströskel

I Tabell 5.3 samt Figur 5.6, 5.7 och 5.8 presenteras resultat för tester med hög grannskapströskel. I Tabell 5.3 ser vi att både medelvärdena och standardavvikelseerna för segregationsnivåerna avviker mycket lite från varandra samt att standardavvikelseerna cirka 0.1%. Den största differensen mellan medelvärdena är 1.2 procentenheter mellan 89.6% och 99.8% för 50% och 70% tomma celler. Resultterande segregationsnivån för alla tester betraktas som mycket hög segregation. För stabiliseringstiden ser vi att medelvärdet och standardavvikelsen för 10% tomma celler väldigt mycket högre än för övriga resultat, cirka 13-15 gånger högre. För 30%, 50% och 70% tomma celler avtar medelvärdet då andelen tomma celler ökar medan skillnaderna i standardavvikelsen är små.

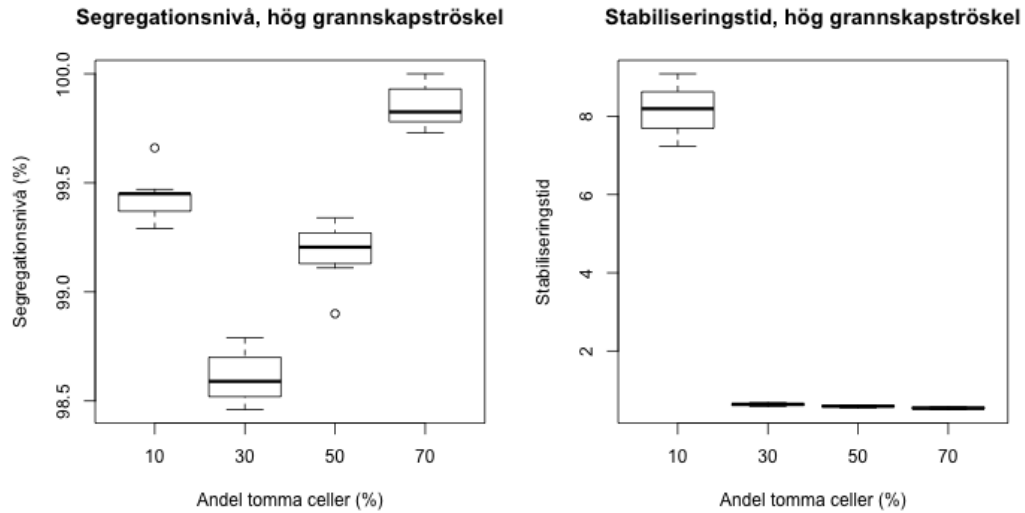
I låddiagrammen i Figur 5.6 ser vi att segregationsnivån ökar då andelen

Hög grannskapströskel				
Andel tomma celler	Segregationsnivå (%)		Stabiliseringstid	
	Medelvärde	Standardavvikelse	Medelvärde	Standardavvikelse
10%	99.4	0.0977	8.21	0.608
30%	98.6	0.110	0.632	0.0294
50%	99.2	0.124	0.587	0.0227
70%	99.9	0.0861	0.541	0.0244

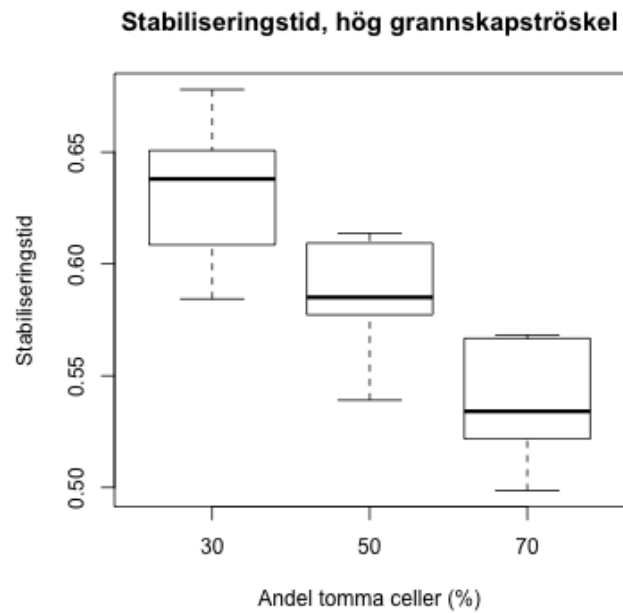
Tabell 5.3: Segregationsnivå och stabiliseringstid för tester med hög grannskapströskel.

tomma celler ökar mellan 30%, 50% och 70% men att segregationsnivån för 10% tomma celler nästan densamma som för 50%. För stabiliseringstiden ser vi att resultatet för 10% tomma celler avviker kraftigt från övriga resultat i både läge och spridning, så pass att övriga resultat blir till små streck i jämförelse. I Figur 5.7 presenteras resultat för stabiliseringstiden då 10% tomma celler är exkluderad. I detta låddiagram ser vi att stabiliseringstiden avtar då andelen tomma celler ökar men att spridningen i dessa data är hög i förhållande till varandra. För 50% tomma celler är spridningen tillräckligt hög för att mätningarna överlappar resultaten för både 30% och 70% tomma celler. Detta gäller dock ej för 30% och 70% tomma celler.

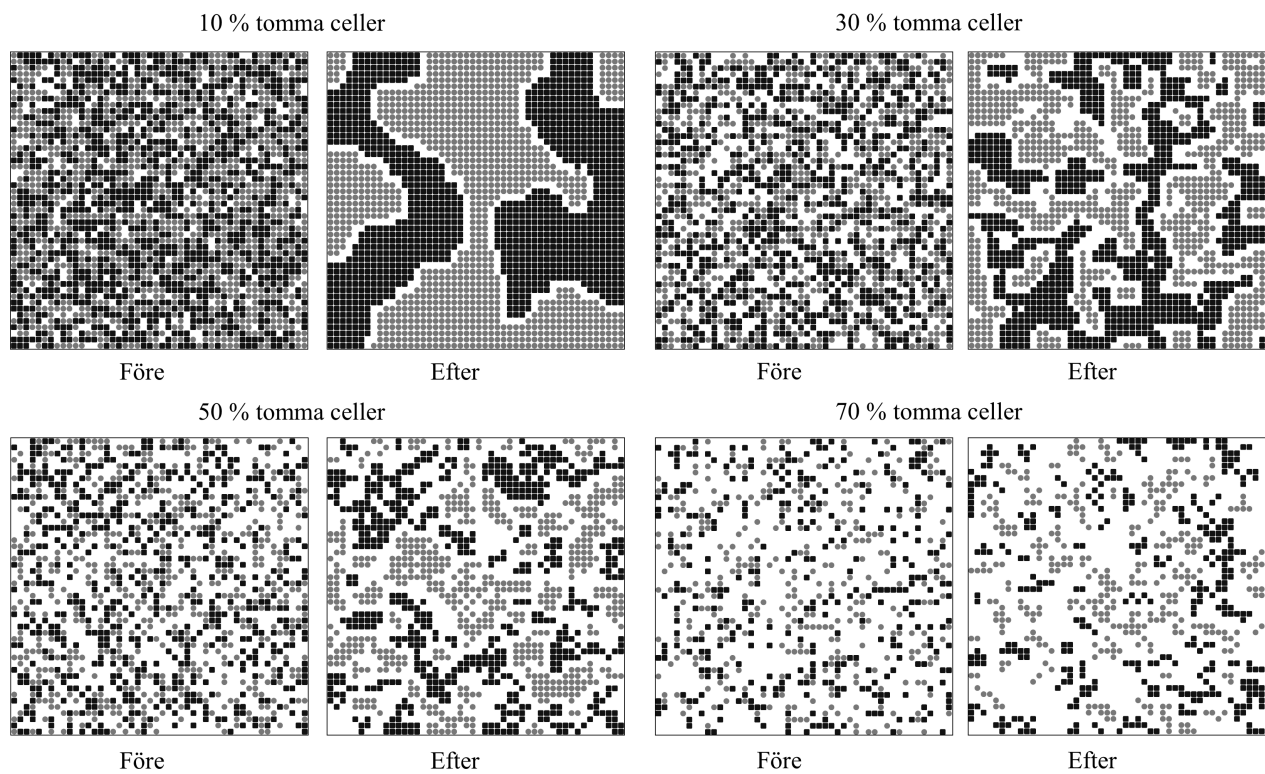
I Figur 5.8 ser vi hur agenterna av samma grupptillhörighet har bildat stora isolerade klungor efter simulering. För 10% tomma celler är det endast ett par av olika agenter som kommer i kontakt med varandra, i övrigt är alla tomma celler positionerade längs med kanterna av homogena klungor och isolerar dem från varandra. För 30%, 50% och 70% tomma celler råder total isolering mellan alla homogena klungor, dock är tätheten inom klungorna inte lika hög som för 10% tomma celler. Vi ser även att ju högre andel tomma celler desto mindre är storleken på de homogena klungorna.



Figur 5.6: Låddiagram över segregationsnivå och stabiliseringstid för tester med hög grannskapströskel.



Figur 5.7: Låddiagram över stabiliseringstid för tester med hög grannskapströskel då resultatet för 10% tomma celler är uteslutet.



Figur 5.8: Före- och efter-bild på en av de tio simuleringarna för varje val av andel tomma celler med hög grannskapströskel.

6 Slutsatser

I resultaten ovan ser vi att andelen tomma celler kan ha inverkan på både segregationsnivån och stabiliseringstiden i utfallet av modellen. Vi ser dock att resultaten skiljer sig åt för olika val av grannskapströskel vilket tyder på att grannskapströskeln, det vill säga nivån av diskriminerande beteende, och andelen tomma celler inverkar på resultatet i samverkan med varandra. Mer exakt hur dessa samverkar kan vi inte dra några slutsatser om, för detta krävs vidare studier. Nedan följer slutsatser för alla tester.

För låg grannskapströskel tyder resultaten på att både segregationsnivån och stabiliseringstiden ökar då andelen tomma celler ökar. Segregationsnivån är låg för 10-50% tomma celler och måttlig för 70% tomma celler. Stabiliseringstiden är som lägst cirka 0.08 och som högst cirka 0.25 vilket är cirka 3.5 gånger ökning mellan 10% och 70% tomma celler. Segregationsnivån för låg grannskapströskel kan gå från låg till måttlig om agenterna får tillräckligt hög andel tomma celler i sin miljö och att stabiliseringstiden ökar då andelen tomma celler ökar.

För medel grannskapströskel tyder resultatet på att segregationsnivån för 70% tomma celler är något högre än för 10%, 30% och 50% tomma celler, trots det betraktas nivån som hög för alla andelar tomma celler. Om det råder en skillnad i segregationsnivån för 10%, 30% och 50% tomma celler kan vi inte dra en slutsats om, resultaten tyder inte på att det finns en skillnad. Det finns inte heller något som tyder på att stabiliseringstiden skiljer sig för 30%, 50% och 70% tomma celler, alla resultat hamnar på cirka 0.4. För 10% tomma celler är däremot stabiliseringstiden cirka 1.5 gånger högre än för 30%, 50% och 70%.

Sammanfattningsvis kan vi säga att segregationsnivån för medel grannskapströskel troligtvis är hög oavsett andel tomma celler i miljön men om andelen är tillräckligt stor kan segregationsnivån bli ännu högre. Vi kan även säga att stabiliseringstiden ökar mycket snabbt då andelen tomma celler går från 30% till 10%.

För hög grannskapströskel tyder resultaten på att stabiliseringstiden är myc-

ket högre för 10% tomma celler jämför med 30%, 50% och 70% tomma celler. Vi observerade cirka 14 gånger högre stabiliseringstid för 10% tomma celler jämfört med övriga andelar tomma celler. Resultaten för segregationsnivån tyder på att det är vissa skillnader mellan olika val av andel tomma celler, men nivån är mycket hög för alla andelar. Två tänkbara slutsatser skulle kunna dras om segregationsnivån. Den första slutsatsen är att det råder någon form av kvadratisk samband i segregationsnivån mellan 10%, 30%, 50% och 70% tomma celler. Med detta menas att segregationsnivån kan förklaras av andelen tomma celler med ett andrags-polinom med minimum i närheten av 30%. Den andra slutsatsen är att segregationsnivån för 10% tomma celler avviker från övriga resultat och att segregationsnivån ökar av linjär karaktär mellan 30%, 50% och 70% tomma celler. Vilken slutsats som är den mest korrekta är svår att avgöra i denna studie. Vad vi däremot ser är att skillnaden i segregationsnivån för olika andelar tomma celler inte är mycket större än som mest 1 procentenhet vilket innebär att även om resultatet tyder på att det finns skillnader i segregationsnivån för olika andelar tomma celler så är skillnaderna mycket små.

Sammanfattningsvis kan vi säga att segregationsnivån för hög grannskaps-tröskel är troligtvis mycket hög oavsett andel celler som finns i miljön men att den ändå varierar lite mellan olika andelar tomma celler. Vi kan även säga att stabiliseringstiden ökar mycket snabbt då andelen tomma celler går från 30% till 10%.

7 Diskussion

I detta avsnitt kopplar vi samman slutsatserna i studien med Schellings resultat, vi behandlar begränsningar i studien, förslag på tänkbara framtida studier ges och vi diskuterar vilka konsekvenser slutsatserna i studien har fått.

7.1 Relation till Schellings resultat

I likhet med Schellings studie har vi kunnat visa hur även lägre grannskapsströsklar kan leda till måttlig till hög segregation. Till skillnad från Schellings ursprungliga studier har vi kunnat visa att modellens resultat varierar om man väljer olika andelar tomma celler.

Varför andelen tomma celler har inverkan kan bero på att de tomma cellerna bidrar med ökade möjligheter till förflyttning och rörelse för agenterna. Då andelen tomma celler varierar ändras förutsättningarna för att agenterna ska hitta grannskap de inte är flyttbenägna i.

7.2 Studiens begränsningar

En begränsning i denna studie som är bra att ha i åtanke är att det inte finns en standard för hur man mäter segregation. Detta är dock ett brett fenomen som kan mätas ur många perspektiv och denna studie tar hänsyn till ett av dessa. Segregationsnivån, så som det är definierat i denna uppsats, ger en indikation på omfattningen av separation mellan agenter av olika grupp-tillhörighet i populationen. Som vi såg i testerna för hög grannskapströskel fanns det visuella skillnader i utfallen av modellen för olika andelar tomma celler, trots detta var segregationsnivån nästan densamma. En visuell skillnad som observerades var att de homogena klungorna var fler och mycket mindre för högre andelar tomma celler jämfört med lägre andelar, en skillnad som syntes tydligt i bilderna men inte i de mätta segregationsnivåerna. Vad de visuella resultaten däremot hade gemensamt var att separationen mellan olika agenter var väldigt lika, det vill säga graden i vilken agenter av vardera grupp hade väldigt få eller inga grannar från den motsatta gruppen. Granskar man

bilderna lite närmre finner man denna likhet snabbt, även om den inte står ut lika tydligt som sammanhållningen mellan lika agenter.

Storlek och täthet på homogena klungor av agenter säger också något om segregation och det vore intressant att ha med detta perspektiv i analysen av Schellings segregationsmodell. Ett sådant mått skulle, tillsammans med segregations-måttet i avsnitt 2.2, bidra med en bredare bild utav resultatet och tydligare koppla samman de kvantitativa resultatet med de visuella. Det vore också mycket intressant att komma fram till hur segregation bäst bör mätas men för detta skulle en annat typ av studie krävas.

Även det tidsmått som har använts följer inte någon standard utan är istället ett förhållande mellan antalet förflyttningar och antalet agenter. Detta skulle kunna betraktas som missvisande då det inte är ett tidsmått på dess enklaste form, det vill säga antalet förflyttningar i form av diskreta tidssteg. Stabiliseringstiden är dock bra för jämförelse av resultaten i studien då antalet agenter varierar och måttet kompenserar för detta.

Ett tillvägagångssätt för att förbättra mätningen av stabiliseringstid vore att utforma studien lite annorlunda. Istället för att öka antalet tomma celler genom att minska antalet agenter skulle man kunna öka storleken på rutnätet. Detta skulle innebära att antalet agenter som kan förflytta sig är densamma och man kan således mäta tiden i form utav antalet förflyttningar som utförs. Detta blir också en mätning utav tomma cellernas inverkan men från ett annat perspektiv.

Ett alternativt sätt att mäta stabiliseringstid i form av förflyttningar vore att undersöka fördelningen bland antalet förflyttningar per agent. Man kan tänka sig att det finns vissa fall då många agenter flyttar ett fåtal gånger och vissa fall då ett fåtal agenter flyttar många gånger etc. Detta kan ge insikt i hur lätt eller svårt är för agenterna att ordna upp sig och även ge en bredare vy utav hur stabiliseringstiden är fördelad utöver varje agent.

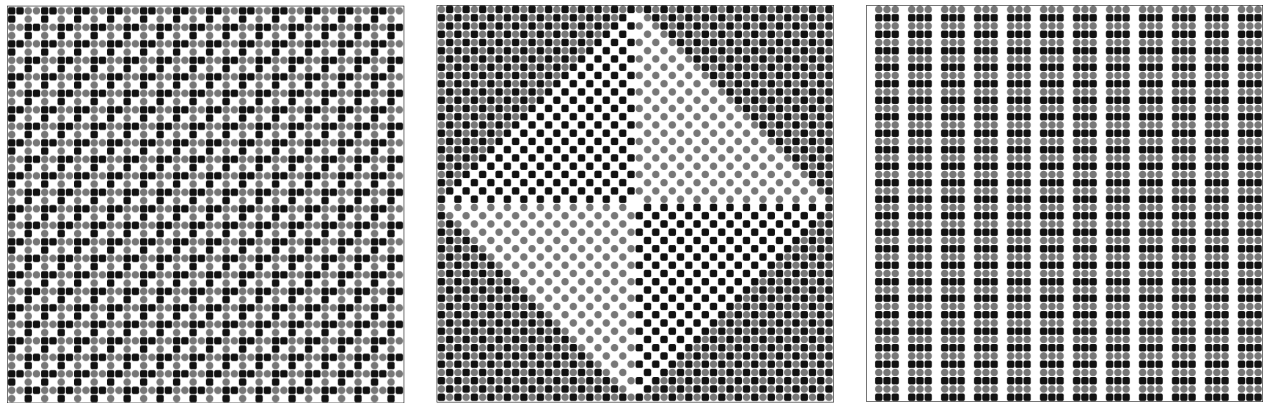
7.3 Framtida studier

Precis som med många studier täcker denna bara en liten del utav allt som kan undersökas i modellen. Det huvudsakliga syftet var att få insikt i miljöns inverkan på modellen och utöver andelen tomma celler finns det mycket mer

som kan tänkas undersökas.

Vill man applicera resultat från Schellings segregationsmodell på verkliga sammanhang vore det intressant att undersöka hur proportionen mellan storleken på grupperna samt hur metoden för utplacering av agenterna spelar in. Storleken mellan två olika grupper (exempelvis svenskfödda och utlandsfödda) är sällan exakt lika och ursprungsläget för individer är sällan helt randomiserad, därför vore det intressant att undersöka hur olika initiala indelningar av agenter påverkar segregationsnivån. Det vore också intressant att testa hur modellen påverkas av flera grupptillhörigheter och flera attribut. Detta skulle bättre knyta an modellen till de problem med segregation som existerar i många samhällen idag samt öka komplexiteten i interaktionen mellan agenterna.

I början av arbetet på denna uppsats undersöktes en uppsättning olika startkonfigurationer för att se hur det kunde tänkas påverka utfallet av modellen. I Figur 7.1 presenteras bilder på hur dessa startkonfigurationer såg ut där andelen tomma celler är 25%. Någon systematisk studie på detta har dock inte utförts då arbetet skulle bli för omfattande. Däremot utfördes några experiment med olika startkonfigurationer och dessa visade att både segregationsnivå och stabiliseringstid varierade för de olika startkonfigurationerna. Detta indikerar att startkonfigurationen kan ha påverkan på utfallet av modellen och det vore intressant att utföra en studie på detta.



Grupper om tre lika agenter

Diamant-liknande mönster

Alternerande rader av lika agenter

Figur 7.1: Olika startkonfigurationer som undersöktes i början av arbetet på denna uppsats. Någon systematisk studie har dock inte utförts på dessa.

7.4 Konsekvenser av studiens resultat

Resultaten från denna studie bidrar med en inblick i hur valet av miljö i modellen faktiskt kan påverka modellen mer än vad som eventuellt förväntas. Mer specifikt har vi visat hur andelen tomma celler kan påverka segregationsnivån och stabiliseringstiden i utfallet av modellen men den har även öppnat upp för vidare studier på hur miljön ur flera aspekter.

I studien har vi gjort en klar koppling mellan Schellings originalmodell och ny teori kring agent-baserad modellering. Studien har även behandlat oklarheter i Schellings modellbeskrivning och angripit dessa för att bidra med en mer rigorös beskrivning av Schellings segregationsmodell.

A Data från simuleringar

Nedan följer all insamlad data från testerna som utförts. Radnumreringen (första kolumnen från vänster) motsvarar ordningen i vilken simuleringarna har utförts där varje andel tomma celler har testat en i taget. Förkortningarna seg.nivå och stab.tid står för segregationsnivå respektive stabiliseringstid.

Grannskapströskel: låg								
	10% tomma celler		30% tomma celler		50% tomma celler		70% tomma celler	
	seg.nivå	stab.tid	seg.nivå	stab.tid	seg.nivå	stab.tid	seg.nivå	stab.tid
1	56.9%	0.0622	63.5%	0.138	69.7%	0.170	78.6%	0.277
2	57.2%	0.0781	63.5%	0.133	68.2%	0.156	75.8%	0.252
3	57.9%	0.0800	62.4%	0.120	66.6%	0.155	75.4%	0.242
4	57.9%	0.0738	63.8%	0.137	67.7%	0.147	76.0%	0.284
5	57.8%	0.0858	64.7%	0.146	68.8%	0.176	74.8%	0.238
6	58.3%	0.0728	64.4%	0.138	67.7%	0.157	76.2%	0.248
7	58.6%	0.0791	63.7%	0.129	67.1%	0.165	79.0%	0.232
8	57.0%	0.0796	62.1%	0.123	66.7%	0.149	76.9%	0.271
9	60.2%	0.0907	62.3%	0.123	65.7%	0.152	77.3%	0.284
10	58.9%	0.0825	63.6%	0.123	68.9%	0.187	74.6%	0.219

Grannskapströskel: medel								
	10% tomma celler		30% tomma celler		50% tomma celler		70% tomma celler	
	seg.nivå	stab.tid	seg.nivå	stab.tid	seg.nivå	stab.tid	seg.nivå	stab.tid
1	88.1%	0.584	87.2%	0.386	89.6%	0.399	92.3%	0.388
2	88.3%	0.574	89.6%	0.402	91.1%	0.382	92.2%	0.393
3	87.9%	0.609	89.4%	0.396	90.6%	0.409	91.3%	0.399
4	87.8%	0.576	87.9%	0.395	87.5%	0.339	93.0%	0.380
5	89.6%	0.607	89.4%	0.414	89.6%	0.361	92.2%	0.386
6	88.5%	0.643	88.9%	0.422	89.0%	0.385	94.8%	0.426
7	88.6%	0.589	88.6%	0.385	88.6%	0.405	92.9%	0.388
8	88.0%	0.610	89.7%	0.423	90.0%	0.392	93.0%	0.416
9	87.0%	0.636	87.5%	0.401	88.0%	0.378	93.8%	0.413
10	89.5%	0.575	89.5%	0.359	90.0%	0.392	93.1%	0.399

Grannskapströskel: hög								
	10% tomma celler		30% tomma celler		50% tomma celler		70% tomma celler	
	seg.nivå	stab.tid	seg.nivå	stab.tid	seg.nivå	stab.tid	seg.nivå	stab.tid
1	99.5%	8.24	98.5%	0.630	99.2%	0.571	99.9%	0.532
2	99.5%	8.63	98.7%	0.660	99.1%	0.539	99.7%	0.564
3	99.3%	7.24	98.8%	0.678	98.9%	0.609	99.9%	0.533
4	99.4%	7.69	98.5%	0.647	99.3%	0.581	99.8%	0.520
5	99.7%	8.61	98.8%	0.609	99.1%	0.577	99.8%	0.535
6	99.4%	8.15	98.6%	0.584	99.2%	0.614	99.8%	0.567
7	99.5%	8.11	98.6%	0.604	99.3%	0.585	99.8%	0.499
8	99.5%	7.47	98.7%	0.651	99.1%	0.592	99.9%	0.567
9	99.5%	8.87	98.5%	0.646	99.3%	0.614	99.9%	0.522
10	99.4%	9.09	98.6%	0.609	99.3%	0.585	100.0%	0.568

Litteraturförteckning

- [1] R. Páncs & N. J. Vriend, *Schelling's spatial proximity model of segregation revisited*, Journal of Public Economics, 2007.
- [2] SOU 2005:29, *Storstad i rörelse. Kunskapsöversikt över utvärderingar av storstadspolitikens lokala utvecklingsavtal. Slutbetänkande av Utredningen av lokala utvecklingsavtal*, Stockholm, Fritze, 2005.
- [3] T. C. Schelling, *Models of Segregation*, The American Economic Review, vol. 59, No. 2, 1969.
- [4] J. Zhang, *Tipping and Residential Segregation: a Unified Schelling Model*, Department of economics, Clark University.
- [5] M. W. Macy & R. Willer, *From Factors to Actors: Computational Sociology and Agent-based Modelling*, Annual Review of Sociology, vol. 28, 2002, pp. 143-166.
- [6] K. C. Clarke, *Cellular Automata and Agent-based Models*, Springer, 2013, pp 1217-1233.
- [7] M. A. Janssen, *Agent-based modelling*, School of Human Evolution and Social Change and Department of Computer Science and Engineering, Arizona State University, 2005.
- [8] T. C. Schelling, *Dynamic Models of Segregation*, Journal of Mathematical Sociology, vol. 1, 1971.
- [9] T. C. Schelling, *Micromotives and Macrobehavior*, första upplagan, W.W Norton & Company, 1978.
- [10] D. Helbing (editor), *Social Self-organization - Agent-based Simulations and Experiments to Study Emergent Social Behavior*, Springer, 2012.
- [11] C. M. Macal & M. J. North, *Tutorial on agent based modeling and simulation*, Journal och Simulation 4, 2010, pp. 151-162.
- [12] O. Nordström Krans, Olof Åslund, "SNS välfärdsrapport 2009 - Segregationen i storstäderna", SNS förlag, första upplagan, 2009.

- [13] Weissstein, Eric W. "Moore Neighborhood." From MathWorld – A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/MooreNeighborhood.html> [Hämtad 2015-08-16]