



Stockholms  
universitet

# Estimering av Value at Risk baserat på ARCH/GARCH-modeller för in- dex tillhörande Largecap och Small- cap

Jimmy Eriksson Widfors

Kandidatuppsats 2016:20  
Matematisk statistik  
Juni 2016

[www.math.su.se](http://www.math.su.se)

Matematisk statistik  
Matematiska institutionen  
Stockholms universitet  
106 91 Stockholm

# Estimering av Value at Risk baserat på ARCH/GARCH-modeller för index tillhörande Largecap och Smallcap

Jimmy Eriksson Widfors\*

Juni 2016

## Sammanfattning

Historiskt sett har det visat sig att framtida volatilitet för avkastningen hos finansiella tillgångar beror av tidigare realiseringar. Syftet med det här arbetet var att konstruera modeller som tar till vara på detta fenomen för att på så vis estimerar risken en dag framåt hos två aktindex med hjälp av riskmättet VaR (Value at Risk). Skattningarna av VaR är i det här arbetet baserade på modellerna ARCH( $p$ ) och GARCH(1,1). I vissa fall kombinerades de med ARMA(1,1). Innan volatiliteten modellerades antogs den betingade fördelningen för feltermen vara både normal- och t-fördelad. De erhållna modellerna utvärderades sedan genom ett överträdelsebaserat test. Från resultatet av testet framgick det att modellerna baserade på ett normalfördelningsantagande presterar bättre. Resultatet visade också att samtliga modeller tenderar att underestimera den framtida risken.

---

\*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.  
E-post: jimmyew\_@hotmail.com. Handledare: Filip Lindskog, Joanna Tyrcha, Mathias Lindholm.

## Abstract

Historically, the volatility of asset returns has empirically been proven to be pre-deterministic, which makes it possible modelling the future volatility. The purpose of this thesis is to construct such models to estimate the risk one day ahead on two different stock indices by using the risk measurement VaR (Value at Risk). The estimations of VaR are based on conditional heteroscedasticity models, which in this thesis are ARCH( $p$ ) and GARCH(1,1). In some cases, these models were combined with ARMA(1,1). Before modelling the volatility, the conditional distribution of the error term was assumed to be both normal and student-t distributed. The obtained models were then evaluated by a violation-based test. From the results of the test it was possible to conclude that the best performing models were based on a normal distribution assumption. The results also showed that all the models tend to underestimate the risk.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Bakgrund och syfte</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Teori</b>	<b>6</b>
3.1	Finansiell avkastning . . . . .	6
3.2	En finansiell tidsserie och dess komponenter . . . . .	6
3.3	Svagt stationär . . . . .	7
3.4	Autokorrelationsfunktion (ACF) . . . . .	7
3.5	Partiell autokorrelationsfunktion (PACF) . . . . .	8
3.6	Ljung-Box-test . . . . .	9
3.7	T-test . . . . .	9
3.8	ARMA-modellen . . . . .	9
3.9	ARCH-modellen . . . . .	10
3.10	GARCH-modellen . . . . .	10
3.11	Parameterskattning . . . . .	10
3.12	Standardiserade residualer . . . . .	11
3.13	Value at Risk (VaR) . . . . .	12
3.14	Back-testing . . . . .	13
3.15	Binomialtest . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Resultat</b>	<b>15</b>
4.1	Deskriptiv dataanalys . . . . .	15
4.2	Modellering . . . . .	19
4.2.1	ARCH-modellering . . . . .	19
4.2.2	GARCH(1,1)-modellering . . . . .	21
4.3	Standardiserade residualer . . . . .	22
4.4	Backtesting . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>Appendix</b>	<b>29</b>
	<b>Referenser</b>	<b>32</b>

# 1 Inledning

De senaste årens oroligheter i den globala ekonomin har karakteriserats av en ökad volatilitet på de finansiella marknaderna. För privata såväl som institutionella investerare är det därför mer än tidigare befogat att ta ställning till den underliggande risken hos finansiella tillgångar.

Sedan i början av 1990-talet har VaR (Value at Risk) varit ett flitigt använt mått för att mäta denna typ av risk. Avsikten med VaR är att kunna prediktera den maximala förlusten som kan inträffa vid normala marknadsförhållanden. En förutsättning för detta är att det existerar någon sorts struktur i prissättningen av en finansiell tillgång, vilket leder fram till det fenomen som går under benämningen volatilitetsklustring.

Volatilitetsklustring är ett vanligt förekommande i avkastningsdata för finansiella tillgångar. Det innebär att stora förändringar tenderar att följas av stora förändringar, och små förändringar tenderar att följas av små förändringar. Observerandet av fenomenet har resulterat i framtagandet av modeller som har för avsikt att modellera strukturen hos volatiliteten. Idag finns många sätt att gå tillväga för att kvantifiera detta, men de modelltyper som kan anses användas i störst utsträckning är ARCH (Robert F. Engle, 1982) och GARCH (Tim Bollerslev, 1986).

## 2 Bakgrund och syfte

Noterade bolag på Nasdaq Stockholm (Stockholmsbörsen) är idag huvudsakligen indelade i tre separata listor; Largecap, Midcap och Smallcap. Marknadsvärdet är avgörande för vilken lista respektive bolag återfinns på. Bolag som har ett marknadsvärde över 1 miljard euro är listade på Largecap, medan bolag med ett marknadsvärde mellan 150 miljoner euro och 1 miljard euro återfinns på Midcap. Motsvarande värde för bolag listade på Smallcap är därför mindre än 150 miljoner euro. Den generella utvecklingen för bolagen på respektive lista går att följa genom Nasdaqs egna aktieindex, se [5].

I detta arbete analyseras daglig avkastningsdata hos index för Largecap och Smallcap med syfte att modellera den underliggande processen, för att på så vis kunna prediktera risken en dag framåt med hjälp av riskmättet VaR (Value at Risk) på nivån 95%. Estimeringarna av VaR kommer att baseras på modellerna ARCH( $p$ ) och GARCH(1,1). I vissa fall kombineras dessa modeller med ARMA(1,1).

De aktieindex som utnyttjas i det här arbetet heter "OMX\_Stockholm\_Large\_Cap\_PI" och "OMX\_Stockholm\_Small\_Cap\_PI". Data för det dagliga stängningspriset hos dessa index under perioden 2008-02-01 - 2016-02-01 har hämtats från Nasdaqs hemsida, se [5].

Tanken är att resultatet av det här arbetet ska kunna utnyttjas vid finansiell riskhantering. I det här fallet kan det exempelvis handla om placeringar i indexfonder med full exponering mot dessa index. Alternativt, om resultaten anses vara otillräckliga kan arbetet utgöra ett underlag för vidare analys. Med andra ord innebär det att om de erhållna modellernas riskprediktioner inte lever upp till önskad precision kan arbetet fungera som ett underlag vid framtagning av andra modeller.

### 3 Teori

I det här avsnittet kommer teori som tillämpats i analysen att presenteras. Den kommer att beskrivas och anpassas på ett sådant sätt som underlättar för läsaren att förstå arbetets genomförande och resultat. Övrig teori, som kan anses vara vedertagen, utelämnas åt läsaren att själv studera vid eventuella oklarheter.

#### 3.1 Finansiell avkastning

Avkastningen hos en finansiell tillgång beskriver den procentuella vinsten eller förlusten under en period, se [1, s.3]. Från en dag  $t - 1$  till en dag  $t$  är denna definierad som

$$r_t^* = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad (1)$$

där  $P_t$  är priset på tillgången dag  $t$ .

Analysen i arbetet kommer att baseras på den logaritmerade avkastning, vilken definieras som

$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right). \quad (2)$$

Sambandet mellan dessa två definitioner kan skrivas som

$$r_t = \log(r_t^* + 1). \quad (3)$$

#### 3.2 En finansiell tidsserie och dess komponenter

En finansiell tidsserie kan beskrivas som värderingen av en tillgång över tiden, där varje observation återfinns med jämna tidsintervall, till exempel dagligen, månatligen eller kvartalsvis. En matematisk definition av en tidsserie ges nedan.

Låt  $\{r_t\}$  vara en tidsserie som beskriver avkastningen över tiden för en finansiell tillgång. Avkastningen  $r_t$  vid tidpunkten  $t$  kan då definieras som

$$r_t = \mu_t + a_t, \quad (4)$$

där  $\mu_t$  är det betingade väntevärdet och  $a_t$  är feltermen med betingad varians  $\sigma_t^2$ . Dessa komponenter kan närmare beskrivas som



$$\mu_t = E(r_t|F_{t-1}), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \text{Var}(r_t|F_{t-1}) \\ &= E[(a_t)^2|F_{t-1}] - (E(a_t|F_{t-1}))^2 = E[(a_t)^2|F_{t-1}], \end{aligned} \quad (6)$$

där  $F_{t-1}$  är informationen tillgänglig vid tidpunkten  $t - 1$ , se [1, s.111]

### 3.3 Svagt stationär

En tidsserie  $\{r_t\}$  sägs vara svagt stationär om de två första momenten existerar och uppfyller

$$E(r_t) = \mu, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

$$\text{Cov}(r_t, r_{t-1}) = \text{Cov}(r_{t+\ell}, r_{t+\ell-1}), \quad \ell, t \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Denna definition säger att en tidsserie beter sig på liknande sätt oavsett vilken tidsperiod som observeras, se [2, s.98]. För att analysen ska kunna genomföras antas dessa villkor därför vara uppfyllda.

### 3.4 Autokorrelationsfunktion (ACF)

För att bestämma den seriella korrelationen för en svagt stationär serie  $\{r_t\}_{t=1}^T$  utnyttjas dess autokorrelationsfunktion (ACF). Antag att en sådan serie existerar, då bestämmer funktionen korrelationskoefficienten mellan  $r_t$  och  $r_{t-\ell}$ , vilket brukar benämnas som lag- $\ell$ . Om korrelationskoefficienten mellan två stokastiska variabler  $X$  och  $Y$  definieras som

$$\rho_{x,y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}, \quad (9)$$

ges autokorrelationsfunktionens skattning för lag- $\ell$  av

$$\hat{\rho}_\ell = \frac{\sum_{t=\ell+1}^T ((r_t - \bar{r}) - (r_{t-\ell} - \bar{r}))}{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}, \quad (10)$$

där man utnyttjar att  $\sqrt{\text{Var}(r_t)\text{Var}(r_{t-\ell})} = \text{Var}(r_t)$  eftersom tidsserien antas vara svagt stationär.

I arbetet kommer flertalet figurer för autokorrelationsfunktioner att presenteras. Varje figur innefattar ett 95%-igt konfidensintervall för respektive ACF. Dessa kan rättfärdigas genom följande. Om  $\hat{\rho}_m$  antas vara en konsistent skattning av  $\rho_m$  och om  $\{r_t\}$  är en serie av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med  $E(r_t^2) < \infty$ , så är  $\rho_m$  asymptotiskt normalfördelade med väntevärde noll och varians  $1/T$ , se [1, s.30].

### 3.5 Partiell autokorrelationsfunktion (PACF)

Den partiella autokorrelationsfunktionen är en funktion av dess ACF, se [1, s.46]. Den kan vara till användning vid bestämning ordningen av en modell. Nedan följer en definition av PACF baserat på bestämning av ordningen  $p$  hos en AR( $p$ )-modell. Innan dess ges en kort definition av en AR( $p$ )-modell, se [1, s.38].

Om avkastningarna i tidsserien  $\{r_t\}$  är signifikant korrelerade kan dessa modelleras med hjälp av en AR( $p$ )-modell. Denna definieras som

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^j \phi_i r_{t-i} + a_t, \quad (11)$$

där  $\phi_0$  är en konstant,  $\phi_i$  en koefficient och  $\{a_t\}$  en serie av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med väntevärde noll och varians  $\sigma_a^2$ .

Bestämning av ordningen  $p$  med hjälp av PACF kan då göras enligt följande. Låt avkastningen  $r_t$  beskrivas med hjälp av följande AR-modeller:

$$r_t = \phi_{0,1} + \phi_{1,1}r_{t-1} + e_{1t},$$

$$r_t = \phi_{0,2} + \phi_{1,2}r_{t-1} + \phi_{2,2}r_{t-2} + e_{2t},$$

$$r_t = \phi_{0,3} + \phi_{1,3}r_{t-1} + \phi_{2,3}r_{t-2} + \phi_{3,3}r_{t-3} + e_{3t}$$

⋮

där  $\phi_{0,j}$  är en konstant,  $\phi_{i,j}$  en koefficient till  $r_{t-i}$  och  $\{e_{jt}\}$  är feltermen för en AR( $j$ )-modell. Dessa modeller är i formen av en multipel linjär regression, där parametrarna kan skattas med minstakvadratmetoden. Exempelvis är skattningen  $\hat{\phi}_{1,1}$  en estimering av lag-1 för PACF tillhörande  $r_t$ . Skattningen  $\hat{\phi}_{1,1}$  beskriver därför hur pass mycket  $r_{t-1}$  bidrar till  $r_t$ . För en modell av ordning  $p$  bör lag- $p$  av ovanstående anledning ej vara lika med noll, medan skattningen  $\hat{\phi}_{j,j}$  bör vara i närheten av noll, för alla  $j > p$ .

I arbetet kommer flertalet figurer för partiella autokorrelationsfunktioner att presenteras. Samtliga innefattar ett 95%-igt konfidensintervall, vilka kan motiveras på samma vis som för ACF, se avsnitt 3.4.

### 3.6 Ljung-Box-test

För att testa simultant att flera autokorrelationer av  $\{r_t\}$  är noll utnyttjas Ljung-Box-statistikan. Med nollhypotesen  $H_0 : \rho_1 = \dots \rho_m = 0$  och alternativhypotesen  $H_a : \rho_i \neq 0$  för något  $i \in \{1, \dots, m\}$ , är statistikan definierad som

$$Q(m) = T(T+2) \sum_{\ell=1}^m \frac{\hat{\rho}_\ell^2}{T-\ell} \sim \chi^2(m). \quad (12)$$

Nollhypotesen  $H_0$  förkastas om  $Q(m) > \chi_\alpha^2$ , där  $\chi_\alpha^2$  är  $\alpha$ -kvantilen för en  $\chi^2(m)$ -fördelad stokastisk variabel, se [1, s.32].

### 3.7 T-test

Låt  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  vara en serie realiserade stokastiska variabler från en  $N(\mu, \sigma^2)$ -fördelning. Om inferens ska göras på  $\mu$ , och  $\sigma^2$  är okänd, utnyttjas t-statistikan, vilken beskrivs nedan. Med nollhypotes  $H_0 : \mu = \mu_0$  och alternativhypotes  $H_a : \mu \neq \mu_0$  definieras testvariabeln som

$$T = \frac{\bar{\mathbf{X}} - \mu_0}{s(\mathbf{X})/\sqrt{n}} \sim t(n-1), \quad (13)$$

där  $s(\mathbf{X})$  är stickprovsstandardavvikelsen och  $n$  antalet observationer. Statistikan är t-fördelad med  $n-1$  frihetsgrader. Med konfidensnivå  $\alpha$  förkastas  $H_0$  till förmån för  $H_a$  om  $|T| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$ , se [3, s.334].

### 3.8 ARMA-modellen

En ARMA<sup>1</sup>-modell är en ekonometrisk modell som används för att modellera det linjära beroendet i en tidsserie. En generell ARMA( $p, q$ )-modell kan beskrivas som

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i}, \quad (14)$$

där  $\{a_t\}$  är en serie av oberoende och likafördelade stokastiska variabler,  $p$  och  $q$  är ickenegativa heltal,  $\phi_0$  är en konstant och  $\phi_i$  och  $\theta_i$  är koefficienter. AR- och MA-modeller är specialfall av en ARMA( $p, q$ ), där  $p$  beskriver antalet AR-parametrar och  $q$  antalet MA-parametrar, se [1, s.66].

---

<sup>1</sup> *autoregressive moving average.*

### 3.9 ARCH-modellen

Med hjälp av en ARCH<sup>2</sup>-modell kan volatiliteten i en tidsserie modelleras. Inom statistiken kan denna variabilitet kvantifieras med varians och standardavvikelse, vilket för en ARCH-process beskrivs närmare nedan.

Grundtanken bakom en ARCH-modell är att feltermen  $a_t$  i Ekv. (3) är seriellt okorrelerad, men beroende. Ur Ekv. (6) framgår det att korrelationen för  $\{a_t^2\}$  bör undersökas för att avgöra om serien  $\{a_t\}$  är beroende, det vill säga om det föreligger betingad heteroskedasticitet. Detta är också känt som ARCH-effekt, se [1, s.114]. Om det visar att en ARCH-effekt existerar kan det vara lämpligt att gå vidare för att modellera den med en ARCH( $p$ )-modell.

En ARCH( $p$ )-modell kan beskrivas som

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2, \quad (15)$$

där  $\{\epsilon_t\}$  är en sekvens av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians 1,  $\alpha_0 > 0$  och  $\alpha_i \geq 0$  för  $i > 0$ , se [1, s.115].

### 3.10 GARCH-modellen

En ARCH-modell kräver vanligtvis ett högt antal parametrar för att beskriva en volatilitetsprocess korrekt. Ett alternativ kan då vara en GARCH<sup>3</sup>-modell, se [1, s.131]. För en GARCH( $m,s$ )-modell gäller det att

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (16)$$

där  $\{\epsilon_t\}$  är en sekvens av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians 1,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$  och  $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ .

### 3.11 Parameterskattning

För att modellera volatiliteten med hjälp av en ARCH( $m$ )-modell skattas dess parametrar med hjälp av maximum-likelihood-metoden. Eftersom det föreligger ett beroende mellan variablerna utnyttjas conditional-likelihood. Låt  $\{a_t\}$  vara en serie av realiserade normalfördelade stokastiska variabler fram till tidpunkten  $t$ , då ges den betingade simultana täthetsfunktionen av

---

<sup>2</sup>Autoregressive conditional heteroscedastic.

<sup>3</sup>General autoregressive conditional heteroscedastic.

$$\begin{aligned}
f(a_1, \dots, a_T | \boldsymbol{\alpha}) &= f(a_T | F_{T-1}) f(a_{T-1} | F_{T-2}) \dots f(a_{m+1} | F_m) f(a_1, \dots, a_m | \boldsymbol{\alpha}) \\
&= \left[ \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \right] * f(a_1, \dots, a_m | \boldsymbol{\alpha}), \tag{17}
\end{aligned}$$

där  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  är de sökta parametrarna och  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1} \dots + \alpha_m a_{t-m}$ . Eftersom den exakta formen för  $f(a_1, \dots, a_m | \boldsymbol{\alpha})$  är komplicerad utelämnas den vanligtvis, speciellt när stickprovsstorleken är tillräckligt stor. Detta resulterar i att likelihoodfunktionen ges av

$$\begin{aligned}
&f(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_T | \boldsymbol{\alpha}) \\
&= \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right), \tag{18}
\end{aligned}$$

För att finna de värden på parametrarna som maximerar likelihoodfunktionen, med andra ord de mest sannolika värdena, utnyttjas de partiella derivatorna för parametrarna. Eftersom det är ekvivalent att maximera den logaritmerade likelihoodfunktionen görs detta, då den är betydligt simplare att hantera. Om termer som ej beror av de sökta parametrarna elimineras ges log-likelihooden av

$$\ell(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_T | \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{t=m+1}^T \left[ \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) + \frac{1}{2} \frac{a_t^2}{\sigma_t^2} \right] \tag{19}$$

Ovanstående funktion deriveras sedan med avseende på  $\boldsymbol{\alpha}$ . De partiella derivatorna sätts därefter till noll. Detta resulterar i ett ekvationssystem som löses med avseende på  $\boldsymbol{\alpha}$ , se [1, s.120].

För parameterskattningen hos ARMA- och GARCH-modellerna utnyttjas samma metod. Principen är därför densamma.

### 3.12 Standardiserade residualer

Ett första steg för att utvärdera en framtagna modell är att undersöka om modellen lyckats fånga upp all struktur i datamaterialet. Således bör de standardiserade residualerna och dess kvadrat vara serier av oberoende och likafördelade stokastiska variabler. För att förklara vad som avses kan

det till att börja med vara lämpligt att definiera dessa. De icke-kvadrerade standardiserade residualerna ges av

$$\tilde{a}_t = \frac{a_t}{\sigma_t} \quad (20)$$

Om det visar sig att korrelation föreligger hos Ekv. (20) kan man från Ekv. (4) förstå att det innebär att modelleringen av väntevärdesstrukturen behöver revideras. Kvadraten av de standardiserade residualerna  $\tilde{a}_t^2$  beskriver i sin tur om volatilitetsmodellen lyckats fånga upp strukturen för den kvadrerade feltermen  $a_t^2$ . Liksom i det andra fallet krävs det att modellen revideras om det visar sig att dessa är korrelerade, se [1, s.122].

### 3.13 Value at Risk (VaR)

Value at risk är ett mått avsett för att mäta marknadsrisken hos finansiella tillgångar. Detta kan definieras som den maximala förlusten under en given tidsperiod under normala marknadsförhållanden, alternativt den minimala förlusten under extrema marknadsförhållanden. Den matematiska definitionen kan beskrivas enligt följande.

Givet en konfidensnivå  $\alpha \in (0, 1)$  ges VaR för en portfölj med förlust  $L$  vid konfidensnivån  $\alpha$  av det minsta  $l$  sådant att sannolikheten att förlusten  $L$  överskrider  $l$  inte är större än  $1 - \alpha$ . I matematiska termer kan det skrivas som

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha &= \text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}, \end{aligned} \quad (21)$$

där  $F_L$  är fördelningsfunktionen för  $L$ . Baserat på beskrivningen är VaR på nivån  $\alpha$  alltså  $(1 - \alpha)$ -kvantilen av förlustfördelningen. Typiska värden för  $\alpha$  är  $\alpha = 0.95$  eller  $\alpha = 0.99$ .

Förlustfördelningen motsvarar i det här arbetet fördelningen för de negativa avkastningarna. Eftersom analysen baseras på icke-negativa avkastningar innebär det att om VaR på nivån 95% ges av 5%-kvantilen för de negativa avkastningarna ges motsvarande kvantil för de icke-negativa avkastningarna av 95%-kvantilen. För det här arbetet kan den betingade prediktionen av VaR en dag framåt därför beskrivas som

$$-\widehat{\text{VaR}}_{t+1|F_t}^\alpha = \mu_{t+1} + \epsilon_\alpha \sigma_{t+1}, \quad (22)$$

där  $F_t$  är informationen tillgänglig vid tidpunkten  $t$  och  $\epsilon_\alpha$  är  $\alpha$ -kvantilen för de standardiserade residualerna, se [2, s.64].

### 3.14 Back-testing

Back-testing är ett tillvägagångssätt för att utvärdera en estimeringsprocess för ett riskmått. Detta görs genom att för varje dag jämföra den estimerade risken med det faktiska utfallet. I det här arbetet kommer ett överträdelsebaserat test att utföras för riskmättet VaR. Testet genomförs enligt förklaring nedan.

Låt datamaterialet för avkastningarna beskrivas av intervallet  $[1, T]$ , där  $T$  är antalet observationer. Vid det första enskilda testet utnyttjas observationerna i delintervallet  $[1, t]$  för att estimeras risken vid tidpunkten  $t + 1$ . Denna procedur upprepas sedan genom att utnyttja observationerna i delintervallet  $[2, t + 1]$  för att estimeras risken vid tidpunkten  $t + 2$ . Slutligen sker den sista upprepningen med intervallet  $[T - t, T - 1]$  för att estimeras risken vid tidpunkten  $T$ .

Vidare kan testet beskrivas enligt följande definitioner. Vid en tidpunkt  $t$ , låt  $\text{VaR}_\alpha^t$  vara  $\alpha$ -kvantilen hos den betingade förlustfunktionen  $F_{L_{t+1}|\mathcal{F}_t}$ , där  $\mathcal{F}_t$  är informationen tillgänglig vid tidpunkten  $t$ . Om  $\{L_{t+1} > \text{VaR}_\alpha^t\}$  innebär det att en överträdelse skett. Överträdelsen kan beskrivas av indikatorvariabeln  $I_{t+1} = I_{\{L_{t+1} > \text{VaR}_\alpha^t\}}$ . Om man antar att fördelningsfunktionen för förlusten  $L$  är kontinuerlig fås

$$E(I_{t+1}|\mathcal{F}_t) = P(L_{t+1} > \text{VaR}_\alpha^t|\mathcal{F}_t) = 1 - \alpha, \quad (23)$$

vilket innebär att  $I_{t+1}$  är en Bernoulli-variabel med parameter  $1 - \alpha$ . Sekvensen av alla indikatorer för överträdelser skapar då en serie av oberoende och likafördelade stokastiska Bernoulli-variabler. Summan av dessa bildar en binomialfördelad variabel  $X$ , vilken kan beskrivas som

$$X = \sum_{i=t+1}^T I_i \sim \text{Bin}(T - (t + 1), 1 - \alpha). \quad (24)$$

Vad som återstår efter att back-testing genomförts är att avgöra om det faktiska utfallet stämmer överens med det förväntade antalet överträdelser. Det görs genom ett binomialtest, vilket beskrivs i avsnittet 3.14.

### 3.15 Binomialtest

Binomialtest är ett exakt test och kan utnyttjas för att utvärdera resultatet av backtesting. Låt  $X$  vara en binomialfördelad stokastisk variabel med  $n$  observationer och sannolikhet  $p$  för en överträdelse, med andra ord gäller det att

$$X \sim \text{Bin}(n, p). \quad (25)$$

Sannolikheten för  $k$  öveträdelser ges då av

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \quad (26)$$

För att utföra ett binomialtest definieras hypoteserna

$$H_0 : p = 1 - \alpha, \quad H_a : p \neq 1 - \alpha. \quad (27)$$

Vid testets utförande presenteras ett tvåsidigt p-värde. Detta p-värde erhålls genom att summera två p-värden. Om utfallet är större än det förväntade värdet ges ena delen av p-värdet av

$$P_{H_0}(X \geq k). \quad (28)$$

Hur den andra delen av p-värdet erhålls kan förklaras genom följande. Om det förväntade utfallet är  $X = \mu$  och det observerade är  $X = k$  ges avståndet från det observerade till det förväntade av  $t = |k - \mu|$ . Uppfylls olikheten

$$P_{H_0}(X = \mu - t) \leq P_{H_0}(X = k) \quad (29)$$

ges den andra delen av p-värdet av

$$P_{H_0}(X \leq \mu - t). \quad (30)$$

Om så inte är fallet, upprepa jämförelsen genom att undersöka  $P_{H_0}(X \leq \mu - (t + 1))$ , därefter följer samma princip.

Nollhypotesen förkastat till förmån för alternativhypotesen om det tvåsidiga p-värdet är mindre än eller lika med den bestämda signifikansnivån, se [5].

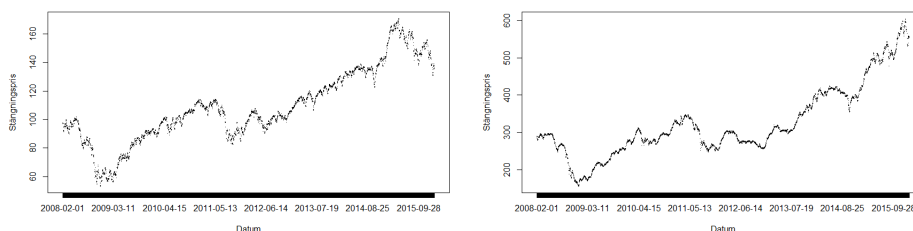


## 4 Resultat

I det här avsnittet presenteras resultatet av arbetet. Till att börja med utförs en deskriptiv analys av datamaterialen, som sedan följs av modellering. Slutligen utvärderas de erhållna modellerna.

### 4.1 Deskriptiv dataanalys

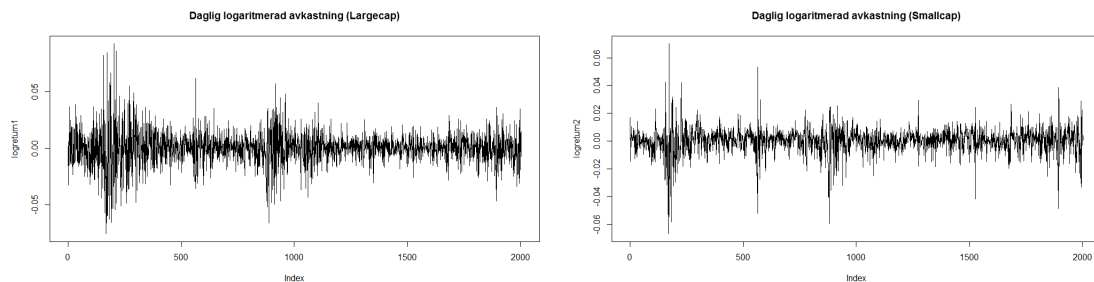
Datamaterialen består av det dagliga stängningspriset för index tillhörande listorna Largecap och Smallcap, som är noterade på Nasdaq Stockholm. Observationer är hämtade för perioden 2008-02-01 - 2016-02-01. Det visar sig att ett fåtal observationer saknas hos båda indexen. Innan vidare analys utförs rensas dem så att varje observation för ett visst datum finns hos båda datamaterialen. Efter rensningen återstår totalt 2004 observationer för respektive index, vilka presenteras i figur 1.



**Figur 1.** *Dagliga stängningspriset för perioden 2008-02-01 - 2016-02-01. Vänstra bilden tillhör index för Largecap och högra bilden tillhör index för Smallcap.*

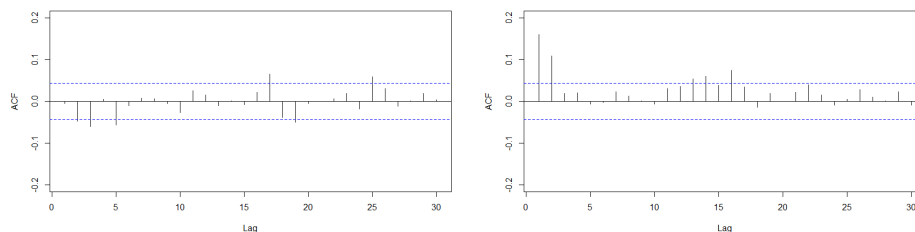
Nästa steg är att transformera data till logaritmerad avkastning, se avsnitt 3.1, vilket resulterar i totalt 2003 observationer för respektive index. Genom denna transformation av datamaterialen antas tidsserien vara svagt stationär, se avsnitt 3.3.

Som tidigare beskrivits ovan, är syftet med det här arbetet att modellera volatiliteten för avkastningarna hos respektive index med hjälp av ARCH( $p$ ) och GARCH(1,1). Ett lämpligt första steg i skapandet av sådana modeller är att studera plottarna för avkastningarna, se figur 2. Vid en första anblick kan man tyda, framför allt hos Largecap, att en hög amplitud hos avkastningen vid en viss dag tenderar att följas av en hög amplitud kommande dag. Som tidigare beskrivits benämns detta som volatilitetsklustring, och det är just det fenomenet som ska modelleras med hjälp av de ovan nämnda modellerna. Innan modelleringen kan påbörjas måste data för avkastningarna analyseras.



**Figur 2.** *Dagliga avkastningar för den givna perioden. Vänstra bilden tillhör index för Largecap och högra bilden tillhör index för Smallcap*

Eftersom intresset ligger i att beskriva volatiliteten med hjälp av feltermen i Ekv. (4) är det  $a_t$  som ska lösas ut ur ekvationen. Det görs genom att först specificera ekvationen för  $\mu_t$ . Första steget för detta ändamål är att avgöra om avkastningarna är seriellt korrelerade. För att avgöra om avkastningarna är seriellt korrelerade bestäms deras autokorrelationsfunktion för ett tillräckligt antal lags, se figur 3. För att kunna dra slutsatsen att korrelation föreligger bör mer än 5% av staplarna av samtliga lags befinna sig utanför de blå sträckade linjerna, som representerar ett 95%-igt konfidensintervall, se avsnitt 3.4.



**Figur 3.** *ACF för avkastningarna hos respektive index. Vänstra bilden tillhör index för Largecap och högra bilden tillhör index för Smallcap.*

Då det inte framgår särskilt tydligt, framför allt inte för Largecap, kan det vara till stor hjälp att utföra ett test med hjälp av Ljung-Box-statistikan, se avsnitt 3.6. Om testet utförs på totalt 10 lags resulterar det i att nollhypotesen kan förkastas på signifikansnivån 5%, se tabell 1. Detta innebär att det finns en viss väntevärdestruktur hos båda indexen.

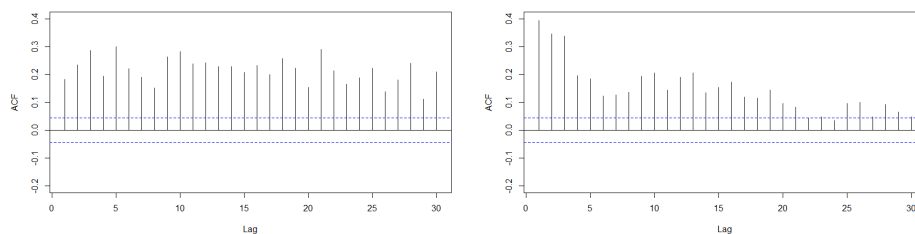
Index	P-värde (LB-test)	P-värde(t-test)
Largecap	0.02707	0.6122
Smallcap	< 0.0001	0.1058

**Tabell 1.** *Ljung-Box(LB)-testet utfört på lag = 10 samt t-test för att avgöra om stickprovsmedelvärdet är noll.*

För den vidare analysen är det nödvändigt att rensa för den seriella korrelationen genom att modellera väntevärdesstrukturen. Dock behöver det inte göras om de betingade väntevärdena har en relativt liten inverkan på utfallen, det vill säga om dessa befinner sig i närheten av noll. För att få en fingervisning om var dessa befinner sig kan stickprovsmedelvärdet undersökas med hjälp av ett t-test, se avsnitt 3.7. Ur tabell 1 framgår det att nollhypotesen ej kan förkastas i båda fallen på signifikansnivån 5%. Därmed är väntevärdet i respektive fall ej signifikant skiljt från noll. Med utgångspunkt att den slutgiltiga modellen ska vara så enkel som möjligt så modelleras inte väntevärdesstrukturen av ovanstående anledning. Dock kan det vara så att de betingade väntevärdena skiljer sig avsevärt från det obetingade väntevärdet. I ett sådant fall bör väntevärdesstrukturen modelleras ändå.

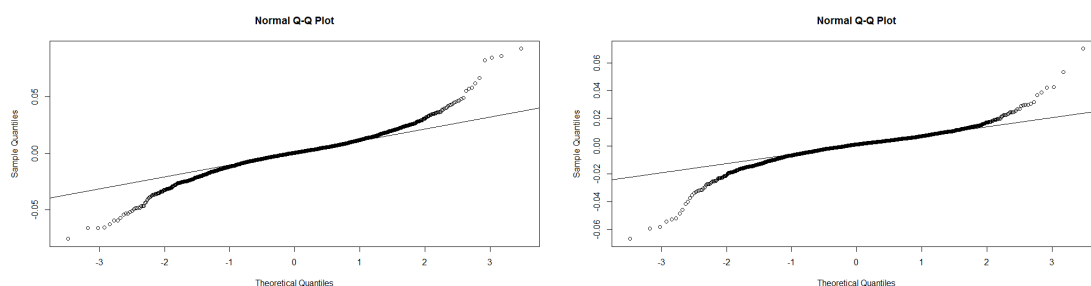
Nästa naturliga steg i den deskriptiva analysen är att undersöka betingad heteroskedasticitet, som även går under benämningen ARCH-effekt. Från Ekv. (6) inses att den kvadrerade feltermen  $a_t^2$  kan beskriva den betingade variansen. För att kunna modellera volatiliteten är det därför lämpligt att avgöra om det föreligger korrelation hos de kvadrerade feltermerna. Det görs genom att bestämma autokorrelationsfunktionen för serien  $\{a_t^2\}$ , se figur 4.

I det här fallet framgår det tydligt ur plottarna att det finns en stark ARCH-effekt hos både Largecap och Smallcap. Detta eftersom majoriteten av staplarna befinner sig utanför konfidensintervallet.



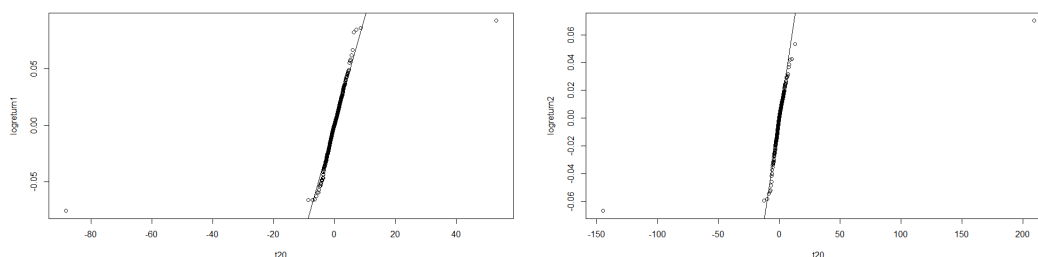
**Figur 4.** *Autokorrelationsfunktionen för de kvadrerade avkastningarna hos respektive index. Vänstra bilden tillhör index för Largecap och högra bilden tillhör index för Smallcap.*

Innan en modellanpassning sker med hjälp av maximum-likelihood-metoden, se avsnitt 3.11, är det nödvändigt att studera fördelningen för avkastningarna för att göra ett antagande om den betingade fördelningen. I det här fallet görs det med hjälp av QQ-plottar. QQ-plottarna för en normalfördelning, se figur 5, tyder på att fördelningen för avkastningarna inte är normalfördelade eftersom observationerna avviker avsevärt från linjen. Baserat på mönstret i plottarna är en fördelning med tjockare svansar mer sannolikt korrekt, exempelvis en t-fördelning.



**Figur 5.** QQ-plottar för normalfördelning. Vänstra bilden tillhör index för Largecap och högra bilden index för Smallcap.

I figur 6 visas QQ-plottar för en t-fördelning med fyra respektive tre frihetsgrader. Bortsett från två observationer följer observationerna linjerna avsevärt bättre än i figur 5. Därmed stödjer dessa plottar ovanstående påstående om att avkastningarna följer en t-fördelning snarare än en normalfördelning. Trots detta kommer modelleringen ske baserat på båda fördelningarna eftersom man inte med säkerhet kan avgöra vilken den betingade fördelningen är.



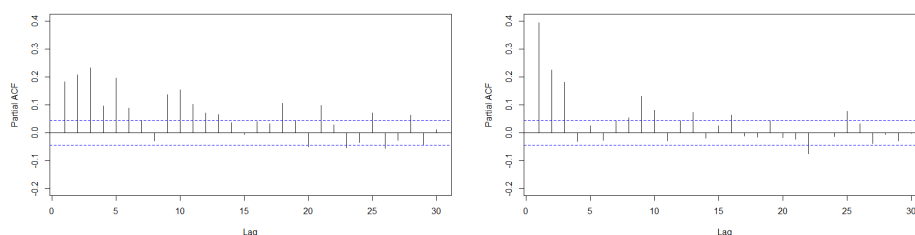
**Figur 6.** QQ-plottar för t-fördelning. Vänstra bilden tillhör index för Largecap (4 frihetsgrader) och högra bilden index för Smallcap (3 frihetsgrader).

## 4.2 Modellering

I inledningen av arbetet framgår det att volatiliteten för datamaterialen ska modelleras med hjälp av ARCH( $p$ ) och GARCH(1,1). I det här avsnittet bestäms, till att börja med, ordningen för respektive ARCH-modell genom PACF, se avsnitt 3.5. Därefter skattas samtliga modellers parametrar med hjälp av maximum-likelihood-metoden. För Smallcap visar det sig även nödvändigt att modellera väntevärdesstrukturen med hjälp av en ekonometrisk modell. I det här fallet en ARMA (1,1)-modell, se avsnitt 3.8.

### 4.2.1 ARCH-modellering

För att bestämma ordningen  $p$  hos respektive ARCH( $p$ )-modell utnyttjas den partiella autokorrelationsfunktionen för de kvadrerade avkastningarna, se figur 7. Från teoridelen framgår det att den valda ordningen bör motsvara lag  $p$ , där lag  $p$  är skilt från noll och lag  $\geq p + 1$  är approximativt lika med noll.



**Figur 7.** Den vänstra bilden visar PACF för de kvadrerade avkastningarna tillhörande Largecap. Den högra bilden visar PACF för de kvadrerade residualerna tillhörande Smallcap.

Eftersom plotten för Largecap är något tvetydig, kan det vara svårt att basera ordningen på denna. En ordning runt 20 kan tyckas vara allt för högt och resultera i en onödigt komplicerad modell. Dock så tenderar lags av lägre ordning att vara av större betydelse, se [1, s.131]. Av den anledningen väljs ordning 13 inledningsvis. Det visar sig därefter, oavsett fördelningsantagande, att modellen kan reduceras successivt till ARCH(11) baserat på t-test utförda på de enskilda parametrarna. För att erhålla en så pass enkel, men ändå adekvat, modell som möjligt undersöks, med samma test, även parametrar med index  $< p$ , för att på så vis avgöra om ytterligare parametrar kan elimineras. Detta resulterar i två ARCH(11)-modeller bestående av 10 parametrar, där samtliga parametrar är skilda från noll på signifikansnivån 5%, se tabell 2.

Utöver interceptet är samtliga parameter positiva, vilket stämmer väl överens med vad som kan tydas ur figuren för PACF. Ur tabellen framgår

det även att parameterskattningarna mellan de båda fördelningsantagandena skiljer sig åt. Värt att också tillägga är att skattningen för t-fördelningens frihetsgrader är 13.17.

Parameter	Normalfördelning	t-fördelning (df=13.17)
$\alpha_0$	0.000034	0.000031
$\alpha_2$	0.161075	0.173442
$\alpha_3$	0.115076	0.109607
$\alpha_4$	0.047564	0.052245
$\alpha_5$	0.042319	0.045962
$\alpha_6$	0.109278	0.125809
$\alpha_7$	0.077773	0.079697
$\alpha_9$	0.078193	0.065802
$\alpha_{10}$	0.097018	0.090959
$\alpha_{11}$	0.123377	0.124104

**Tabell 2.** Tabellen visar maximum-likelihood-skattningar för samtliga parametrar hos ARCH(11)-modeller, baserat på antaganden om både normalfördelning och t-fördelning. Modellerna tillhör Largecap.

För Smallcap visar det sig, oavsett vilken ordning som väljs, att korrelation föreligger hos de standardiserade residualerna, se avsnitt 3.9.1. Detta tyder på att en ARCH-modell inte lyckas fånga upp all korrelation, och av den anledningen behöver väntevärdesstrukturen modelleras trots allt. Efter att ha prövat flertalet ARMA( $p,q$ )-modeller visar det sig att en ARMA(1,1)-modell resulterar i icke-korrelerade residualer. När volatiliteten modellerats visar sig även de standardiserade residualerna vara icke-korrelerade. Som tidigare nämnts är en enkel, men ändå adekvat, modell att föredra. Av den orsaken finns det inte anledning att bygga en mer komplicerad modell för väntevärdesstrukturen. ACF-plottar för residualerna och de kvadrerade residualerna tillhörande ARMA(1,1)-modellen återfinns i Appendix.

Efter att  $a_t$  lösts ut ur Ekv.(4) kan PACF för serien  $\{a_t^2\}$  beskrivas av den högra plotten i figur 7. I det här fallet framgår det inte heller tydligt vilken ordning som bör väljas, men det kan vara rimligt att tänka sig att åtminstone de allra högsta staplarna bör inkluderas i modellen. Därför väljs till en början en ARCH(9)-modell. Baserat på samma test som i fallet för Largecap visar det sig att modellerna kan reduceras till ARCH(7) respektive ARCH(6). Efter ytterligare eliminering fås en ARCH(7)-modell med 7 parametrar respektive en ARCH(6)-modell med 6 parametrar, se tabell 3. De tre första skattningarna i tabellen beskriver ARMA(1,1)-modellernas parametrar, och resterande skattningar beskriver ARCH-modellernas parametrar.

Parameter	Normalfördelning	t-fördelning (df=5.66)
$\phi_0$	0.000182	0.000202
$\phi_1$	0.717902	0.791927
$\theta_1$	-0.582411	-0.679450
$\alpha_0$	0.000023	0.000023
$\alpha_1$	0.202874	0.198961
$\alpha_2$	0.170365	0.235192
$\alpha_3$	0.120127	0.118464
$\alpha_5$	0.118925	0.117210
$\alpha_6$	0.044583	0.063008
$\alpha_7$	0.051420	NA

**Tabell 3.** Tabellen visar maximum-likelihood-skattningar för samtliga parametrar hos en ARMA(1,1)-ARCH(7)-modell (normal) och en ARMA(1,1)-ARCH(6)-modell (student-t). Båda modellerna tillhör Smallcap.

Även här visar sig samtliga ARCH-parametrar vara positiva, vilket inte riktigt stämmer överens med den korrelation som PACF uppvisar i figur 5. Skattningen av antalet frihetsgrader för t-fördelningen uppgår till 5.66.

#### 4.2.2 GARCH(1,1)-modellering

Att bestämma ordningen för en GARCH-modell är inte enkelt, se [1, s.134]. Av den anledningen har volatiliteten modellerats med hjälp av en GARCH(1,1)-modell, baserat på normalfördelnings- och t-fördelningsantagande.

I tabell 4 återfinns parameterskattningarna för Largecap. Där framgår det att interceptet  $\alpha_0$  inte är signifikant skiljt från noll, och därför elimineras denna parameter från båda modellerna. Antalet frihetsgrader för t-fördelningen skattas till 11.36.

Parameter	Normalfördelning	t-fördelning (df=11.36)
$\alpha_1$	0.060975	0.062865
$\beta_1$	0.938025	0.936135

**Tabell 4.** Tabellen visar maximum-likelihood-skattningar för samtliga parametrar hos GARCH(1,1)-modeller, baserat på antaganden om både normalfördelning och t-fördelning. Modellerna tillhör Largecap.

Parameterskattningarna för ARMA(1,1)-GARCH(1,1)-modellerna, tillhörande Smallcap, återfinns i tabell 5. Ur tabellen framgår det att samtliga parametrar är signifikanta. Antalet frihetsgrader för t-fördelningen skattas till 5.80.

Parameter	Normalfördelning	t-fördelning (df=5.80)
$\phi_0$	0.000174	0.000214
$\phi_1$	0.707761	0.782018
$\theta_1$	-0.577626	-0.668717
$\alpha_0$	0.000005	0.000005
$\alpha_1$	0.182460	0.192926
$\beta_1$	0.753355	0.746661

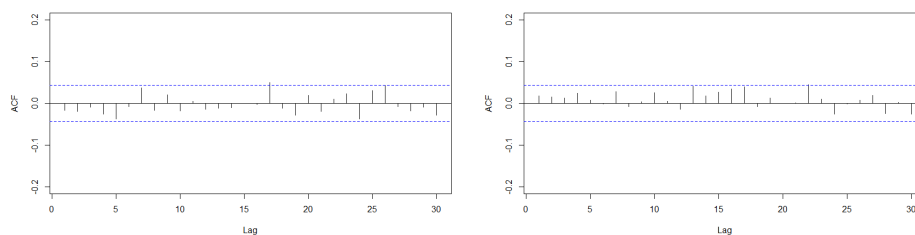
**Tabell 5.** Tabellen visar maximum-likelihood-skattningar för samtliga parametrar hos ARMA(1,1)-GARCH(1,1)-modeller, baserat på antaganden om både normalfördelning och t-fördelning. Modellerna tillhör Smallcap.

### 4.3 Standardiserade residualer

För en korrekt specificerad modell ska de standardiserade residualerna vara en sekvens av oberoende och likafördelade stokastiska variabler, se avsnitt 3.12. För väntevärdesmodelleringen kontrolleras detta genom att undersöka huruvida korrelation förligger i serien  $\{\tilde{a}_t\}$ . Motsvarande undersöks i serien  $\{\tilde{a}_t^2\}$  för volatilitetsmodelleringen. Vidare utnyttjas, likt tidigare, QQ-plottar för att dra slutsatser kring de standardiserade residualernas fördelning.

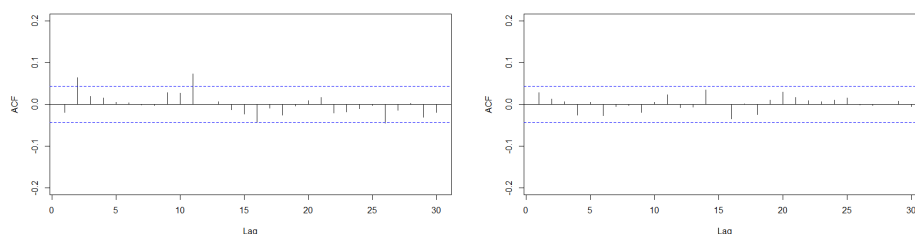
Från figur 8 framgår det tydligt att de standardiserade residualerna inte är korrelerade. I den vänstra bilden visas en ACF-plot för en av modellerna tillhörande Largecap, i vilken endast en av staplarna befinner sig utanför det 95%-iga konfidensintervallet. För att ACF-plotten ska uppvisa signifikant korrelation bör 5% eller fler av staplarna befinna sig utanför de blå sträckade linjerna, vilket inte är fallet. I den högra plotten, tillhörande en modell för Smallcap, framgår det desto tydligare att ingen korrelation föreligger. Därmed kan väntevärdesstrukturen anses vara korrekt modellerad för dessa modeller. Av anledningen att samma slutsats kan dras för resterande modeller så återfinns deras ACF-plottar i Appendix.





**Figur 8.** Den vänstra bilden visar ACF för de standardiserade residualerna för en  $GARCH(1,1)$ -modell tillhörande Largecap, där data antas vara normalfördelat. Med samma fördelningsantagande visar högra bilden  $ARMA(1,1)$ - $GARCH(1,1)$  för Smallcap.

I figur 9 presenteras motsvarande plottar för kvadraten av de standardiserade residualerna. I högra bilden befinner sig samtliga staplar inom konfidensbanden, alltså föreligger ingen korrelation. Samma slutsats kan dras för nästintill samtliga modeller. Plottar för dessa återfinns i Appendix. I den vänstra plotten finns det dock skäl nog för att göra en närmare undersökning med hjälp av Ljung-Box-statistikan eftersom två av staplarna (6.7%) befinner sig utanför konfidensbanden. Testet utförs på de kvadrerade residualerna för båda  $GARCH(1,1)$ -modellerna tillhörande Largecap, av anledningen att deras ACF-plottar är nästintill identiska.



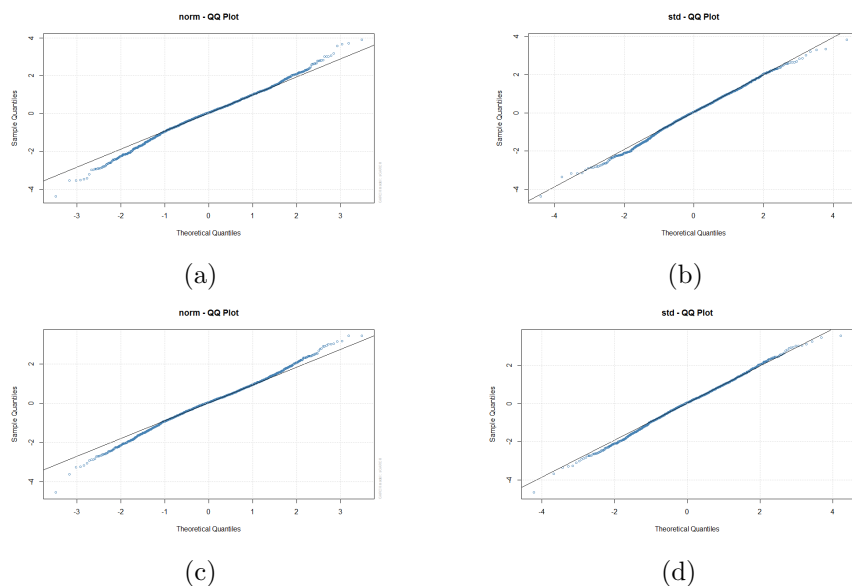
**Figur 9.** Den vänstra bilden visar ACF för kvadraten av de standardiserade residualerna för en  $GARCH(1,1)$ -modell baserad på data för Largecap, där data antas vara normalfördelat. Högra bilden visar motsvarande för Smallcap.

Tabell 6 visar resultatet från LB-testet utfört på  $GARCH(1,1)$ -modellerna tillhörande Largecap. Där framgår det att nollhypotesen ej kan förkastas på signifikansnivån 5% i samtliga fall. Därmed kan modellerna anses ha fångat upp strukturen i datamaterialen.

Fördelning	P-värde (lag=10)	P-värde(lag=15)	P-värde(lag=20)
Normal	0.3205	0.0845	0.1192
Student-t	0.4343	0.2926	0.0702

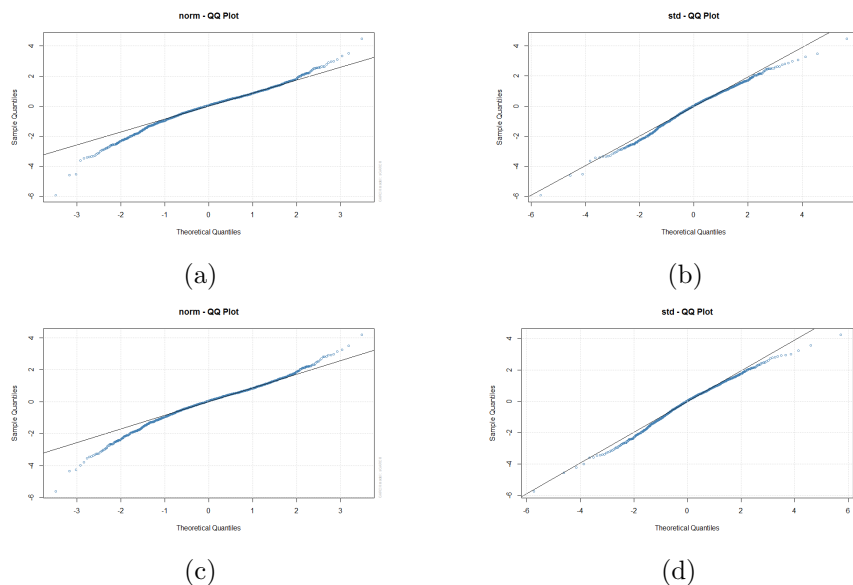
**Tabell 6.** Tabellen visar  $p$ -värde för Ljung-Box-statistikan utförd på  $GARCH(1,1)$ -modellerna tillhörande Largecap. Testet är utfört på lag=10, lag=15 och lag=20.

Vidare undersöks fördelningen för de standardiserade residualerna genom QQ-plottar. Eftersom intresset ligger i att prediktera risken hos respektive index är det enbart intressant att undersöka hur väl observationerna följer linjen i den nedre svansen. Figur 10 visar QQ-plottar för samtliga modeller som tillhör Largecap. För både ARCH- och GARCH-modellerna framgår det tydligt att observationerna följer den nedre svansen betydligt bättre för t-fördelningsantagandet än normalfördelningsantagandet.



**Figur 10.** QQ-plot för standardiserade residualer tillhörande Largecap : (a) Normal,  $GARCH(1,1)$ . (b) Student-t,  $GARCH(1,1)$ . (c) Normal,  $ARCH(11)$ . (d) Student-t,  $ARCH(11)$ .

Samma slutsats kan dras för QQ-plottarna för de standardiserade residualerna tillhörande Smallcap, se figur 9. I figuren kan man tyda att observationerna i nedre svansen för normalfördelningsantaget avviker betydligt mer än för motsvarande modeller tillhörande Largecap.



**Figur 11.** *QQ-plot för standardiserade residualer tillhörande Smallcap :*  
 (a) *Normal, ARMA(1,1)-GARCH(1,1).* (b) *Student-t,*  
*ARMA(1,1)-GARCH(1,1).* (c) *Normal, ARMA(1,1)-ARCH(7).* (d)  
*Student-t, ARMA(1,1)-ARCH(6).*

#### 4.4 Backtesting

Eftersom de erhållna modellerna tycks ha fångat upp strukturen i avkastningsdata, återstår bara att undersöka hur väl dessa predikterar risken för en dag framåt. Det görs med hjälp av ett överträdelsebaserat test. Resultatet från testet utvärderas sedan genom ett binomialtest. För en mer detaljerad beskrivning, se avsnitten 3.13-3.15.

Innan utvärderingen kan påbörjas delas avkastningsdata upp i två delar. De 500 första observationerna utnyttjas i ett rullande fönster för att prediktera risken en dag framåt. Varje prediktion jämförs sedan med respektive utfall, det vill säga de 1503 resterande observationerna. I testet estimeras VaR på nivån 95%, vilket innebär att sannolikheten att den faktiska förlusten en dag framåt inte överskrider prediktionen är 95%. Prediktionerna är därmed ett ensidigt konfidensintervall med en täckningsgrad på 95%, vilket betyder att testet förväntas resultera i att 5% av utfallen hamnar utanför konfidensintervallet.

Resultatet för testet utfört på var och en av modellerna kan tydas ur tabell 4. Samtliga modeller visar sig uppnå fler överträdelser än förväntat. Av den anledningen är det befogat att misstänka att täckningsgraden är lägre än 95%, vilket också stärks av ett binomialtest. Givet att täckningsgraden

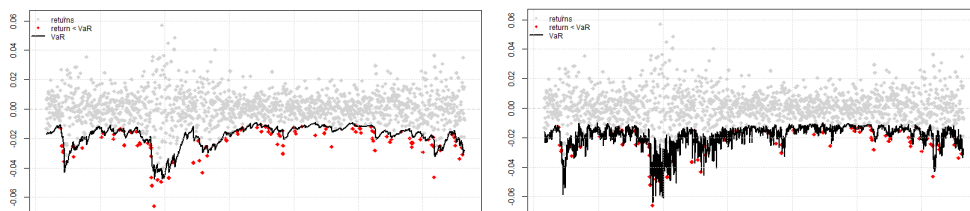
faktiskt är 95% så säger p-värdet för binomialtestet, i samtliga fall, att utfallen är väldigt osannolika.

Om en överträdelse ses som ett lyckat utfall definieras hypoteserna för ett binomialtest som  $H_0 : p = 0.05$  och  $H_a : p \neq 0.05$ . Det innebär att nollhypotesen  $H_0$  förkastas i samtliga fall om signifikansnivån är satt till 10%. På signifikansnivån 5% visar sig dock en av modellerna för Largecap klara sig med en marginal på 0.06%.

Index	Fördelning	Modell	Övertr.	Övert.(%)	P-värde
Largecap	Normal	ARCH(11)	92	6.1%	0.0506
		GARCH(1,1)	105	7.0%	0.0007
Largecap	Student-t	ARCH(11)	95	6.3%	0.0243
		GARCH(1,1)	109	7.3%	0.0001
Smallcap	Normal	ARMA(1,1)-ARCH(7)	107	7.1%	0.0004
		ARMA(1,1)-GARCH(1,1)	108	7.2%	0.0002
Smallcap	Student-t	ARMA(1,1)-ARCH(6)	110	7.3%	0.0001
		ARMA(1,1)-GARCH(1,1)	115	7.7%	< 0.0001

**Tabell 4.** Resultat av överträdelsebaserat test. Nivån på VaR är satt till 95%. P-värdet för binomialtestet visas under rubriken P-värde.

I figur 12 visas resultatet av backtesting för två modeller tillhörande Largecap. Ena modellen är en ARCH(11) och den andra är en GARCH(1,1). Båda är baserade på ett normalfördelningsantagande. I vänstra bilden framgår det tydligt att överträdelserna tenderar att komma i kluster. Detta kan även ses i högra bilden, om än inte lika tydligt. Genom att jämföra bilderna går det även att se, givet en datapunkt, att ARCH-modellen tenderar att prediktera en högre volatilitet än GARCH-modellen. Studerar man plottarna för övriga backtest kan man dra liknande slutsatser. Dessa återfinns i Appendix. Värt att tillägga är att skillnaderna mellan de två olika fördelningsantaganden för en viss modell är svår att urskilja genom figurerna.



**Figur 12.** Den vänstra bilden visar resultatet av backtesting utförd på GARCH(1,1) och högra bilden visar motsvarande för ARCH(11). Modellerna tillhör Largecap och är baserade på ett normalfördelningsantagande.

## 5 Diskussion

I den deskriptiva analysen av de logaritmerade avkastningarna studerades respektive fördelning genom QQ-plottar för att få en fingervisning om den betingade fördelningen. Plottarna tydde på att ett t-fördelningsantagande vore mer sannolikt korrekt än ett normalfördelningsantagande, vilket kan ses genom att jämföra figur 5 och figur 6. Slutsatsen baseras på att observationerna följer linjen avsevärt bättre i QQ-plottarna för en t-fördelning än motsvarande för en normalfördelning.

Efter att modeller tagits fram studerades fördelningen för de standardiserade residualerna genom QQ-plottar, se figur 10 respektive figur 11. Eftersom intresset låg i att prediktera risken var endast fördelningarnas nedre svans av intresse. I plottarna visar det sig att den nedre svansen av observationerna uppfyller fördelningsantagandet bättre för en t-fördelning än en normalfördelning. Trots detta så visade sig modellerna baserade på ett normalfördelningsantagande prestera bättre i samtliga fall, se tabell 4. Detta kan ses genom att jämföra antalet överträdelser och fördelningsantagande för respektive modell i tabellen. Därmed kan betydelsen av ett korrekt fördelningsantagande ifrågasättas vid framtagandet av modeller för prediktion.

Vidare kan man jämföra ARCH( $p$ ) och GARCH(1,1) för respektive index. I fallet för Smallcap hade det även varit intressant att studera väntevärdesmodelleringens bidrag till resultatet, men eftersom det rör sig om en ARMA(1,1) i samtliga modeller kan det vara svårt att avgöra. Av den orsaken kan endast volatilitetsmodelleringen jämföras mellan modellerna.

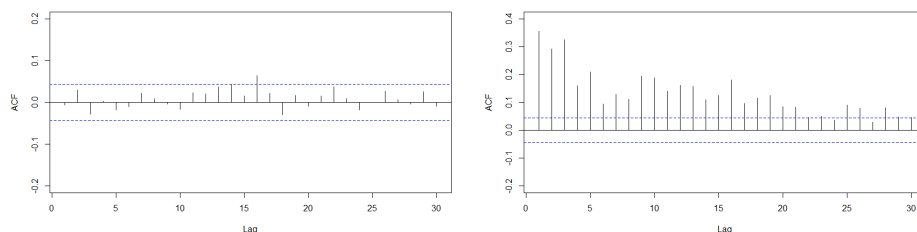
För båda indexen visar resultatet att alla modeller av typen ARCH( $p$ ) presterar bättre, om än dock marginellt i vissa fall, än GARCH(1,1). Givet en datapunkt ser man i figur 10 att ARCH-modellen tenderar att estimera en högre potentiell förlust än en GARCH-modell, vilket kan förklara varför backtesting av ARCH-modellerna resulterade i färre överträdelser än GARCH-modellerna. Men det kan även innebära att ARCH-modellerna överpredikterar volatiliteten för vissa datapunkter. Detta beskriver Ruey S. Tsay som en av ARCH-modellernas svagheter, se [1, s.119].

Genom att studera vänstra bilden i figur 12 kan man även dra slutsatsen att överträdelserna tenderar att komma i kluster, vilket tyder på att dessa är beroende. För att testet ska anses vara robust bör dessa vara oberoende, se avsnitt 3.14. Resultatet kan därmed i vissa fall ifrågasättas. För vidare analys kan det därför vara lämpligt att kontrollera om ett beroende föreligger med hjälp av *Christoffersen's independence test*, se [6].

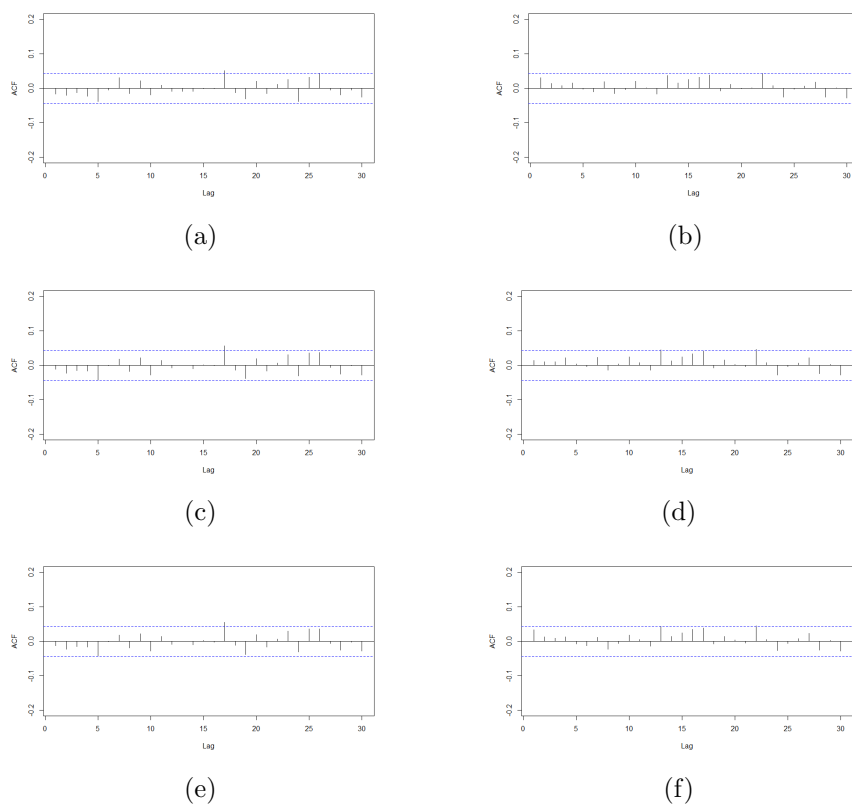
Syftet med det här arbetet var att finna modeller som kan prediktera den framtida risken väl. Givet att resultatet från utvärderingen kan anses vara robust visar det att det procentuella antalet överträdelser för modellerna befinner sig i intervallet 6.1%-7.7%, vilket överstiger det förväntade antalet på 5%. Baserat på binomialtestet tyder dessa resultat på att alla modeller, utom en, tenderar att underestimera risken för en dag framåt. Den enda modell där nollhypotesen inte förkastas i binomialtestet ger ett p-värde på 5.06%, vilket är strax över konfidensnivån på 5%. Utöver det låga p-värdet innehåller modellen dessutom ett relativt högt antal parametrar. Därför bör andra modeller undersökas innan beslut tas om att utnyttja denna vid prediktion.

Sammanfattningsvis kan arbetet för framtagandet av modeller för riskhantering ej ses som slutfört. Det här arbetet kan därför fungera som ett underlag för vidare analys. Lämpligen bör mer avancerade modeller undersökas, exempelvis EGARCH och IGARCH, se [1]. Från parameterskattningarna i tabell 4 framgår det att  $\alpha_1 + \beta_1 \approx 1$ , vilket motiverar att anpassa en IGARCH-modell, se [1, s. 138]. Givet resultatet är prediktion av VaR med hjälp av andra ARCH-modeller än de erhållna inte rätt väg att gå eftersom det troligtvis resulterar i onödigt komplicerade modeller (högt antal parametrar). Utöver andra modelltyper bör även GARCH-modeller av högre ordning undersökas.

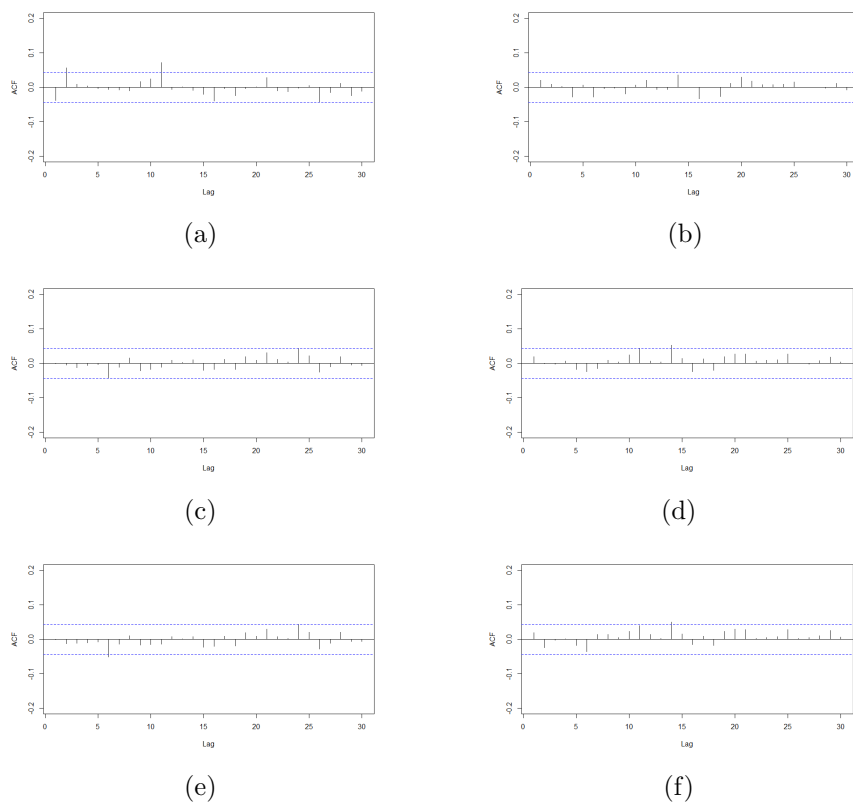
## 6 Appendix



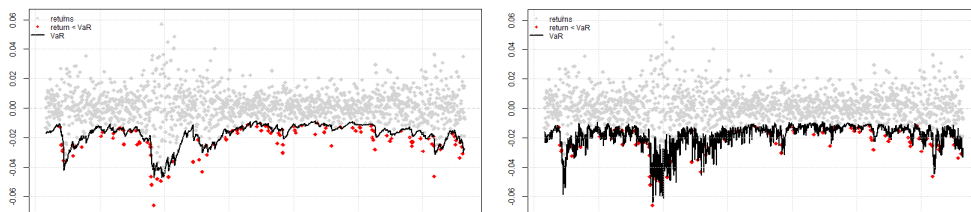
**Figur 13.** Vänstra plotten visar ACF för residualerna tillhörande  $ARMA(1,1)$ -modellen för Smallcap. Högra bilden visar motsvarande för de kvadrerade residualerna.



**Figur 14.** ACF för standardiserade residualer. (a) Largecap, student-t,  $GARCH(1,1)$ , (b) Smallcap, student-t,  $ARMA(1,1)$ - $GARCH(1,1)$ , (c) Largecap, normal,  $ARCH(11)$ , (d) Smallcap, normal,  $ARMA(1,1)$ - $ARCH(7)$ , (e) Largecap, student-t,  $ARCH(11)$ , (f) Smallcap, student-t,  $ARMA(1,1)$ - $ARCH(6)$ .

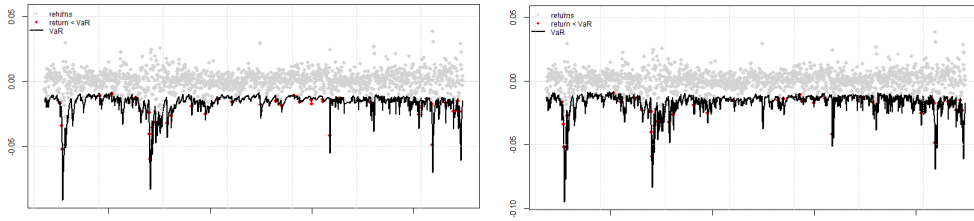


**Figur 15.** ACF för kvadrerade standardiserade residualer. (a) Largecap, student-t, GARCH(1,1), (b) Smallcap, student-t, ARMA(1,1)-GARCH(1,1), (c) Largecap, normal, ARCH(11), (d) Smallcap, normal, ARMA(1,1)-ARCH(7), (e) Largecap, student-t, ARCH(11), (f) Smallcap, student-t, ARMA(1,1)-ARCH(6).

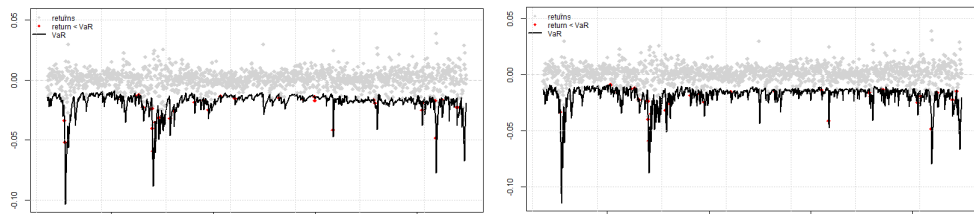


**Figur 16.** Vänstra bilden visar backtest för GARCH(1,1). Högra bilden visar motsvarande för ARCH(11). Båda modellerna tillhör Largecap och är baserade på ett t-fördelningsantagande.





**Figur 17.** Vänstra bilden visar backtest för  $ARMA(1,1)$ - $GARCH(1,1)$ . Högra bilden visar motsvarande för  $ARMA(1,1)$ - $ARCH(11)$ . Båda modellerna tillhör Smallcap och är baserade på ett normalfördelningsantagande



**Figur 18.** Vänstra bilden visar backtest för  $ARMA(1,1)$ - $GARCH(1,1)$ . Högra bilden visar motsvarande för  $ARMA(1,1)$ - $ARCH(11)$ . Båda modellerna tillhör Smallcap och är baserade på ett  $t$ -fördelningsantagande.

## Referenser

- [1] Tsay, R. S., *Analysis of financial time series*, John Wiley Sons, Inc, Tredje upplagan., 2010.
- [2] McNeil, A. J.; Frey, R.; Embrechts, P., *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press, Reviderad upplaga., 2015.
- [3] Alm, S. E.; Britton, T., *Stokastisk - Sannolikhetssteori och statistikteori med tillämpningar*, Liber AB, Första upplagan., 2008.
- [4] Nasdaq, Inc, Hämtat 5 februari 2016. URL:  
<http://www.nasdaqomxnordic.com/>
- [5] GraphPad, *The binomial test*. Hämtat 27 april 2016. URL:  
[http://www.graphpad.com/guides/prism/6/statistics/index.htm?stat\\_binomial.htm](http://www.graphpad.com/guides/prism/6/statistics/index.htm?stat_binomial.htm)
- [6] Christoffersen, P., *Backtesting*, McGill University & Copenhagen Business School, 2008.