



Stockholms
universitet

Value at risk estimering & jämförelse av volatilitetsmodellerna GARCH(1, 1) och IGARCH(1, 1)

Linnéa Forsell

Kandidatuppsats 2016:21
Matematisk statistik
Juni 2016

www.math.su.se

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm

Value at risk estimering & jämförelse av volatilitetsmodellerna GARCH(1, 1) och IGARCH(1, 1)

Linnéa Forsell*

Juni 2016

Sammanfattning

Vi utgår från de justerade stängningspriserna för aktieindexet OMXS30 under en given tidsperiod. Sedan beräknas logavkastningarna och därefter utför vi en genomgående analys av logavkastningsdatan och kommer fram till att de två önskade modellerna GARCH(1, 1) och IGARCH(1, 1) är passande modeller. De anpassas för två olika fördelningsantaganden.

Vi fortsätter med att skatta de dagliga VaR (Value at Risk) värdena för konfidensnivåerna 95% och 99%. Därefter utvärderar vi de fyra olika modellenpassningarna med ett binominaltest, för att sedan kunna avgöra vilken modell som är bäst för mätning av risk för det valda datamaterialet.

Efter att vi jämfört de olika modellerna kommer vi fram till att ingen av modellerna skulle vara bra för mätning av risk för de dagliga logavkastningen för OMXS30. Resultaten för GARCH(1, 1) och IGARCH(1, 1) är likartade om man jämför de två fördelningsantagandena och konfidensnivåerna.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.
E-post: linnea.forsell@hotmail.com. Handledare: Filip Lindskog, Joanna Tyrcha, Mathias Lindholm.

Abstract

We start with the adjusted closing prices of the stock index OMXS30 during a given time period. We calculate the log return and then we perform a all through analysis of the log return data and reaches that the two desired models GARCH(1, 1) and IGARCH(1, 1) are suitable models for our log return data and adapts them for two different distribution assumptions.

Continuing with calculate the daily VaR (Value at Risk) values for both the 95% and 99% confidence level. Following, we evaluate the four different model adjustments with a binominal test, and then determine which model is best for measuring risk for the selected data.

After that, we compared the different models. We found that none of them would be good for the measurement of risk of the daily log return of OMXS30. Results for the GARCH(1, 1) and IGARCH(1, 1) is similar if you compare the two distribution assumptions and confidence levels.

Innehållsförteckning

1	Introduktion	4
1.1	Bakgrund.....	4
1.2	Datamaterial.....	4
1.3	Problemformulering.....	5
1.4	Syfte.....	5
1.5	Programvara.....	5
2	Statistisk teori	6
2.1	Avkastningsserier.....	6
2.2	Vitt brus (i.i.d.).....	6
2.3	Tidsserier.....	6
2.4	Tidsseriemodeller.....	8
2.4.1	ARCH.....	8
2.4.2	GARCH.....	8
2.4.3	IGARCH.....	9
2.5	Volatilitet.....	9
2.6	Value at Risk (VaR).....	10
2.7	Backtesting.....	11
2.7.1	Binomialtest.....	11
3	Genomförande	13
3.1	Dataanalys.....	13
3.2	Modellanpassning.....	16
4	Resultat	20
4.1	95% konfidensnivå.....	20
4.2	99% konfidensnivå.....	21
5	Slutsats	22
6	Diskussion	23
	Referenser	24
	Litteratur.....	24
	Artiklar.....	24
	Elektroniska källor.....	24

A	Appendix 1–Statistisk teori	25
A.1	<i>T</i> –test.....	25
A.2	<i>Skevhet och Kurtosis</i>	25
A.3	<i>QQ</i> –plott.....	26
A.4	<i>Autokorrelationsfunktion (ACF)</i>	26
A.5	<i>Ljung–Box test</i>	26
A.6	<i>Normalfördelning</i>	27
A.7	<i>Student t</i> –fördelning.....	27
A.8	<i>Maximum likelihood</i> –skattning.....	27
A.9	<i>AIC och BIC</i>	28
A	Appendix 2–Figurer och tabeller	29

1 Introduktion

1.1 Bakgrund

Att mäta risk har blivit allt mer populärt bland investerare, för att en högre risknivå ger en högre avkastning. Investerarna vill minimera sina risker samtidigt som de vill erhålla en hög avkastning (Markowitz, 1952). Det finns olika typer av risker i finansiella marknader, det finns tre huvudtyper och marknadsrisk är en av dem, vilken vi kommer koncentrera oss på i denna rapport. Det finns flera sätt att öka förståelsen för marknadsrisken, där prognoser som är baserade på tidseriedata är en utav dem. För att kunna göra dessa prognoser används olika metoder. En av de metoderna är VaR (Value at Risk), vilket är den vi kommer att använda oss av i denna rapport. Det är en av de metoder som blivit mest populära bland banker och investbolag. VaR introducerades av JP Morgan år 1994 och går ut på att man mäter extrema risker som en investerare kan utsättas för. Det är alltså en statistisk teknik som används för att mäta och kvantifiera potentiell förlust, samt sannolikheten för den potentiella förlusten under en viss tidsperiod och konfidensnivå (Hull, 2010).

Vi är mer intresserade av att mäta risker på kapital nu än vad vi var förr, bl.a. för att vi vill kunna motverka en ny potentiell finanskris. För att kunna förhindra skandaler i framtiden behöver man studera det som varit, vilket man gör i tidsserieanalyser. Man undersöker en tidsperiod som varit för att kunna prediktera framtiden.

Om man kollar på tidigare forskning på finansiella tidsserier, visar det att volatiliteten (prisörligheten hos en tillgång) kan beskrivas av GARCH-modeller. Om man jämför GARCH-modeller med ARMA-modeller så tar GARCH-modeller hänsyn till att börsen präglas av nervositet och tenderar till att ha olika varians över tid (Cryer & Chan, 2008, s. 277), vilket gör den till en mer passande modell för finansiella datamaterial.

1.2 Datamaterial

Det datamaterial som valts till denna statistiska analys är OMXS30, under tidsperioden 2 januari 2006 till 30 december 2015. Anledningen till den valda tidsperioden är att vi vill ha med händelser i finansvärlden. De händelser som inträffat under den valda tidsperioden är den amerikanska huskrisen år 2007–2010, den amerikanska finanskrisen år 2008–2010 och den stora skuldskrisen år 2008–2010.

OMXS30 är ett index från stockholmsbörsen, ett index är en sammansatt aktieportfölj. OMXS30 innehåller de 30 mest omsatta aktierna på stockholmsbörsen, det är ett kapitalviktat index som mäter kursutvecklingen. Kapitalviktat index betyder att varje bolags vikt i indexet är lika med andelen av ett bolags marknadsvärde i förhållande till det sammanlagda marknadsvärdet för samtliga bolag (Berk & DeMarzo, 2011). Aktieindex kan väljas för att de inte är lika volatilt som en enskild aktie och på grund av att en aktieportfölj minskar riskerna. Det gör att aktieindexet kan bidra till en bättre estimering av VaR (Markowitz, 1952).

Datamaterialet är hämtat från Yahoo finance, som vi finner med följande länk:

<http://finance.yahoo.com/>

1.3 Problemformulering

- Är volatilitetsmodellerna GARCH(1, 1) och IGARCH(1, 1) lämpliga att använda vid mätning av risk för den dagliga logavkastningen för det svenska aktieindexet OMXS30 och hur skiljer de sig åt?

1.4 Syfte

Syftet med detta kandidatarbete är att vi ska undersöka hur väl VaR förklarar risken med att förvalta sina pengar i aktieindexet OMXS30. Vi ska anpassa GARCH(1, 1) och IGARCH(1, 1) på logavkastningsdatan och sedan skatta VaR på det och därefter utföra backtesting för att kunna utvärdera hur bra prediktionerna stämmer med verkligheter och att jämföra modellerna med varandra. Vi har valt att anpassa GARCH-modeller istället för en ARCH-modell, vilket också är en volatilitetsmodell, för att det kräver ofta många parametrar för att korrekt beskriva volatilitetsprocessen av en avkastningsdata (Tsay, 2010, s. 131) om man ska använda sig av en ARCH-modell. T.ex. kanske man istället för en ARCH(9) kan anpassa en GARCH(1, 1) för samma avkastningsdata, vilket resulterar i färre parameterskattningar.

Vi har valt att arbeta med just GARCH(1, 1) för att det är väldigt svårt att bestämma parametrarna för en GARCH-modell och därmed väljer vi att vi vill anpassa den vanligaste. Jämför vi med en ARCH-modell, kan man beräkna antalet parametrar genom att undersöka PACF-plotten. För GARCH-modellerna finns ingen sådan metod för att komma fram till antalet parametrar. Valde därefter att också arbeta med integrated GARCH (IGARCH), för att kunna ha en annan GARCH-modell att jämföra med. Använde också parametrarna (1, 1) där, just för att göra det enklare och att den modellen också är den vanligaste IGARCH-modellen som används. Det är intressant att se vad de är för skillnad mellan de olika GARCH-modellerna och vilken av modellerna som är bäst för mätning av risk för det valda datamaterialet under tidsperioden.

1.5 Programvara

Den programvara som använts för denna analys är R som är ett mycket vanligt program för matematisk statistik. R kan enkelt laddas ner från följande länk:

<https://cran.r-project.org/>

De färdiga paketen som använts för analysen i denna rapport från R är *rugarch* (Alexios Ghalahos) och *moments* (Lukasz Komsta & Frederick Nocomestky), teorin bakom beskrivs i avsnitten *Statistisk teori* och *Appendix 1*. För fullständig information om paketen hänvisas man till länkarna under *elektroniska källor*.

2 Statistisk teori

För att underlätta förståelsen kommer de viktigaste begreppen och definitionerna av teorin som används för analysen av datamaterialet och den finansiella tidsserieanalysen förklaras nedan. Det som inte förekommer här finns med i slutet av rapporten, i *Appendix 1*.

2.1 Avkastningsserier

Låt P_t vara det dagliga stängningspriset av en aktie eller ett index vid tiden t . Relativa avkastningen R_t , mellan tiden $t - 1$ och t , är definierad som:

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}, \quad (1)$$

eller

$$P_t = P_{t-1}(1 + R_t). \quad (2)$$

Logavkastningen betecknas med r_t och är definierad som den naturliga logaritmen av (1) och definieras som nedan:

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right). \quad (3)$$

2.2 Vitt brus (i.i.d.)

En tidsserie r_t kallas vitt brus om $\{r_t\}$ är en sekvens av oberoende och likafördelade slumpstermer med ett ändligt väntevärde och varians. Om tidsserien är vitt brus ska alla autokorrelationsfunktioner (ACF) vara noll eller nära noll (Tsay, 2010, s. 36). För vissa tidsserier är det nödvändigt att modellera autokorrelation innan ytterligare analys kan utföras (Tsay, 2010, s. 36).

$$E(r_t) = 0, \quad \text{Var}(r_t) = \sigma^2, \quad \text{Cov}(r_t, r_{t-k}) = 0, \quad \forall k \neq 0. \quad (4)$$

2.3 Tidsserier

Finansiell tidsserieanalys är relativt nytt, innan användes den mest till analyser inom natur och fysik, där residualerna ofta har utmärkts av homoskedasticitet. Inom finansiella tidsserier märker man ofta att variansen för residualerna inte är konstant, vilket betyder att variansen för residualerna vid en tidpunkt beror på variansen i föregående tidpunkt.

Medelvärdet (μ_t) och variansen (σ_t^2) för logavkastningarna (r_t) betingat på den information som man har vid tiden t , F_{t-1} definieras nedan (Tsay, 2010):

$$\mu_t = E(r_t|F_{t-1}), \quad \sigma_t^2 = \text{Var}(r_t|F_{t-1}) = E[(r_t - \mu_t)^2|F_{t-1}],$$

där F_{t-1} vanligtvis består av alla tidiagre linjära funktioner av avkastningar vid tiden $t - 1$ (Tsay, 2010).

En tidsserie definieras nedan:

$$r_t = \mu_t + a_t, \quad (5)$$

vilket leder till att σ_t^2 blir:

$$\sigma_t^2 = \text{Var}[(r_t - \mu_t)^2 | F_{t-1}] = E[(a_t)^2 | F_{t-1}] = \text{Var}(a_t | F_{t-1}).$$

För ett datamaterial kan det vara två olika tidsserieprocesser: μ_t och a_t . I vissa datamaterial kan man inte säga att μ_t är signifikant skilt från noll och då undersöker man bara a_t som en tidsserieprocess. Därmed brukar man vilja börja med att undersöka huruvida μ_t kan vara signifikant skilt från noll eller inte med ett t-test (teorin bakom t-testet förklaras i *Appendix 1*). Många gånger är det meningen att man ska använda sig av ARCH/GARCH-modeller, speciellt när det gäller finansiella datamaterial. Man kan oftast direkt anpassa en ARCH/GARCH-modell om μ_t inte är signifikant skilt från noll, annars får man anpassa en ekonometrisk modell för avkastningsdatan (t.ex. en AR-, MA- eller ARMA-modell) för att avlägsna eventuellt linjärt beroende (Tsay, 2010, s. 113) och därefter kan man anpassa en ARCH/GARCH-modell för a_t . Linjärt beroende är alltså om logavkastningen (r_t , eller a_t om man antagit att μ_t är noll) har autokorrelation.

I denna rapport är vi intresserade av att anpassa GARCH-modeller och kommer här nedan att sätta upp punkter som man måste gå igenom och undersöka innan man vet om det är lämpligt. Det som logavkastningsdatan (r_t) behöver uppfylla för att en GARCH-modell ska vara en lämplig modell att anpassa tidsserien med är följande:

- Det ska finnas volatilitetsklustering. Klusterbildning förklaras av att den betingade variansen för logavkastningen inte är konstant (Cryer & Chan, 2008, s. 279).
- Att det föreligger ickelinjärt beroende.

Det vi ska analysera för att komma fram till om de önskade modellerna är passande, är följande:

- Undersöka huruvida μ_t kan vara signifikant skilt från noll eller ej.
- Undersöka huruvida a_t har autokorrelation eller ej, för har det autokorrelation betyder det att vi kan behöva anpassa en medelvärdesekvation för μ_t .
- Om vi inte kan säga att μ_t är signifikant skilt från noll ska vi använda avkastningsdatan i kvadrat (a_t^2) för att undersöka om det föreligger villkorlig heteroskedasticitet, vilket också är känt som ARCH-effekter (Tsay, 2010, s. 114). a_t^2 ska vara korrelerade för att vi ska kunna gå vidare med en ARCH/GARCH-modell.

Vi ska undersöka de kvadrerade avkastningsdata för att vi låter:

$$a_t = r_t - \mu_t, \tag{6}$$

vara residualerna för väntevärdesstrukturen.

2.4 Tidsseriemodeller

2.4.1 ARCH

(Autoregressive conditional heteroskedasticity).

ARCH-modellen kommer från Engle (1982) och är den första riktiga modellen för volatilitetsmodellering. Själva basidén med ARCH-modellen är att chocken a_t av en aktieavkastning är seriellt okorellerade och ickelinjärt beroende av a_{t-1} . De ska gå att förklara beroendet av a_t med en enkel kvadratisk funktion av dess laggade värden (Tsay, 2010).

ARCH/GARCH-modellerna brukar vanligen användas då volatiliteten existerar i kluster, vilket är vanligt förekommande inom finansmarknaden (Tsay, 2010).

Anta att (6) gäller, då defineras ARCH(1)-modellen som nedan:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (7)$$

där:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2, \quad (8)$$

där:

$$\epsilon_t \text{ är i.i.d., } E(\epsilon_t) = 0 \quad \text{och} \quad V(\epsilon_t) = 1,$$

$$\alpha_0 > 0 \quad \text{och} \quad \alpha_1 \geq 0.$$

2.4.2 GARCH

(Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity).

GARCH-modellen är en generalisering av ARCH-modellen som utvecklades av Bollerslev (1986). Modellen introducerades för att modellera volatilitetsklustering. Modellen kännetecknas av sin förmåga att fånga egenskaper hos många finansiella tidsserier, såsom identifiering av den betingade variansen när framtida perioder av hög och låg volatilitet inte kan identifieras (Tsay, 2010), för att negativa och positiva händelser har samma effekt på volatiliteten för denna modell. Denna modell brukar resultera i färre parametrar än för ARCH-modellen p.g.a. att modellen tar hänsyn till tidigare modellerade värden.

Anta att (6) gäller, då defineras GARCH(1, 1)-modellen som nedan:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

där:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (9)$$

där:

$$\epsilon_t \text{ är i.i.d., } E(\epsilon_t) = 0 \quad \text{och} \quad V(\epsilon_t) = 1,$$

$$\alpha_0 > 0, \quad 0 \leq \alpha_1, \beta_1 \leq 1 \quad \text{och} \quad (\alpha_1 + \beta_1) < 1.$$

Detta innebär att en stor a_{t-1}^2 tenderar att följas av en annan stor a_t^2 , vilket genererar det välkända beteendet volatilitetsklustering i finansiella tidsserier (Tsay, 2010, s. 132). Summan $\alpha_1 + \beta_1$ anger hur snabbt variansen tenderar att gå tillbaka till sin långsiktiga viktade genomsnitt.

Vid beräkning av GARCH(1, 1)–modellen skattas parametrarna genom log–likelihoodmetoden (Tsay, 2010).

2.4.3 IGARCH

(Integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity). IGARCH är en integrerad GARCH–modell, vilket betyder att modellen har en enhetsrot. Den är en begränsad version av den ursprungliga GARCH–modellen för att parametrarna i modellen ska summera till precis ett. Modellen grundades av Engle och Bollerslev (1986), samma som för GARCH–modellen. Modellen utvecklades för att fånga ytterligare egenskaper som inte kan förklaras av den generella ARCH–modellen (Tsay, 2010).

Antag att (6) gäller, då defineras IGARCH(1, 1) som nedan:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

där:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (10)$$

där:

$$\begin{aligned} \epsilon_t \text{ är i.i.d., } \quad E(\epsilon_t) = 0 \quad \text{och} \quad V(\epsilon_t) = 1, \\ \alpha_0 > 0, \quad 0 < \alpha_1, \beta_1 < 1 \quad \text{och} \quad \alpha_1 + \beta_1 = 1. \end{aligned}$$

Parametrarna skattas på samma sätt som för GARCH–modellen, med hjälp av log–likelihoodmetoden.

2.5 Volatilitet

Volatiliteten förklarar prisrörligheten hos en tillgång. När man använder standardavvikelsen som mått för den dagliga risken hos en tillgång, använder man den logaritmerade avkastningen, vilket man gör för ARCH/GARCH–modellerna (Tsay, 2010). Vi predikterar variansen för nästa dag, baserat på variansen idag.

Den generella formeln för volatilitet framåt i tiden ($t = h$) för en GARCH(1, 1) är (Tsay 2010, s. 133):

$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(l-1), \quad l > 1. \quad (11)$$

Den generella formeln för volatilitet framåt i tiden ($t = h$) för en IGARCH(1, 1) är (Tsay 2010, s. 141):

$$\sigma_h^2(l) = \sigma_h^2(1) + (l-1)\alpha_0, \quad l \geq 1, \quad (12)$$

1–dags prediktion för båda modellerna är:

$$\sigma_h^2(1) = \sigma_{h+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2, \quad (13)$$

där det för IGARCH gäller att $\alpha_1 = 1 - \beta_1$.

Volatilitet har många finansiella tillämpningar, bl.a. för att volatilitetsmodellering ger en enkel metod att beräkna VaR av en finansiell ställning i riskhantering med.

Det kan vara svårt att direkt observera volatilitet, vilket kan vara ett problem gällande aktiernas volatilitet. Det finns därmed vissa egenskaper som man enkelt kan se i aktieavkastningen, vilket leder till att man kan lista ut om det föreligger volatilitet eller inte. Det är svårt att använda heteroskedastiska prognosmetoder p.g.a. att det är svårt att observera om det föreligger volatilitet eller inte. Heteroskedasticitet betyder att residualerna i en tidsserie ej har konstant varians, utan förändras med tiden (Tsay, 2005, s. 97). Trots att volatiliteten inte är observerbar så har den fyra egenskaper som man brukar undersöka:

- Volatilitetskluster, vilket betyder att volatiliteten är hög under vissa perioder och låg under andra perioder (Tsay, 2005, s. 97).
- Volatiliteten utvecklas över tiden på ett kontinuerligt sätt. Hopp i förändringen av volatiliteten är ovanligt (Tsay, 2005, s. 97).
- Volatiliteten är ofta stationär och kan inte divergera till oändligheten, utan rör sig kring ett medelvärde (Tsay, 2005, s. 97).
- Volatiliteten ser ut att reagera olika för en stor prisökning eller en stor prisminskning, vilket kallas hävstångseffekt (Tsay, 2005, s. 97).

2.6 Value at Risk (VaR)

Metoden bedömer risk genom att använda statistiska modeller eller simuleringsmodeller som syftar till att fånga volatiliteten hos en tillgång. Om vi ser på finansiella institutioner så definieras VaR som den maximala förlusten av en finansiell position under en given tidsperiod och konfidensnivå $(1 - \alpha)$, vanligtvis med 95% eller 99% (Tsay, 2010, s. 326). VaR gör det möjligt att uttrycka framtida förluster eller vinster hos en tillgång.

En generell definition av VaR följer nedan:

$$VaR_p = \min\{m : P(L \leq m) \geq 1 - p\}, \quad (14)$$

där L är förlustfunktionen för tillgången, det kommer antas olika fördelningar för förlustfunktionen och vi kommer att betrakta kvantilerna för den.

Vi kan också skriva VaR_p som den $(1 - p)$:te kvantilern för förlustfunktionen:

$$VaR_p = F_L^{-1}(1 - p), \quad (15)$$

där F_L är fördelningsfunktionen för förlustfunktionen.

Man brukar betrakta VaR som en procentuell förlust istället för ett definitivt belopp. Utifrån ekvation (15) får vi:

$$VaR_p(r_t) = F_{-r_t}^{-1}(1 - p) = -F_{r_t}^{-1}(p), \quad (16)$$

där vi låter förlustfunktionen vara $-r_t$ (Hult m.fl., 2012).

För att ge ett exempel: Om en aktieportfölj har en daglig 5% VaR på en miljon kronor, då betyder det att sannolikheten är 0.05 att aktieportföljen kommer att minska med minst en miljon kronor över en dag. En förlust på en miljon kronor eller mer på aktieportföljen förväntas alltså inträffa på en av 20 dagar, p.g.a. 0.05 sannolikhet.

2.7 Backtesting

Vid backtesting kan man välja att göra det på många olika sätt. Ett alternativ är att ha ett skattningsunderlag som är lika stort som antalet dagar i det datamaterial som man anpassat modellen med. När man ska skatta nästa dags VaR använder man sig av alla tidigare dagars skattning av VaR för att skatta näst påföljande dag. Därefter inkluderas alla dagars skattningar av VaR som gjorts, alltså även den som nyss gjordes, för att skatta för ytterligare en dag. Detta skatteunderlag kallas *expanderande fönster*. Det andra möjliga sättet kallas *rullande fönster* och det är ett rörligt skattningsunderlag där alla tidigare skattningar används för nästa dags skattning. Därefter flyttas skattningsunderlaget av en längd, vanligtvis ett, alltså att det skattas om för varje ny dag. Det finns möjlighet att skatta om efter ett antal dagar som man kan välja fritt, t.ex. att det skattas om efter 25 dagar igen.

Om vi ska ta ett exempel: Vi har ett datamaterial av 3000 dagliga logavkastningar och väljer att anpassa en modell på de 1000 första dagliga logavkastningarna och att backtesta på de 2000 resterande. I vår rapport använder vi oss bara av ett *rullande fönster* som skattas om för varje ny dag. Då används de 1000 första dagliga logavkastningarna för att anpassa en modell med, som det skattas VaR på. Med hjälp av det *rullande fönstret* skattas VaR på dag 1001 med hjälp av dag 1–1000 och därefter används dag 2–1001 för att skatta VaR för dag 1002, och så fortsätter det så fram tills datamaterialet är slut.

2.7.1 Binominaltest

Backtesting är en metod som systematiskt jämför den verkliga förlusten med den beräknade VaR. Med det menas att det skattade VaR för tiden t kan jämföras med den verkliga förlusten för tiden $t + 1$. För att modellen ska vara tillräckligt bra ska det förväntade resultaten vara följande:

$$P(r_{t+1} > \widehat{VaR}_q^t) = 1 - q, \quad (17)$$

där t är tidpunkten och q är konfidensnivån.

För att ta ett exempel: Vi väljer en konfidensnivå på 95% ($q = 0.95$) och antalet observationer som det ska utföras backtesting på är 1000, då borde man förvänta sig 50 överträdelser. Antalet förväntade överträdelser är alltså $n(1 - q)$, där n är antalet dagar för den perioden man utför backtesting på.

Av dessa överträdelser kan ett binominaltest konstrueras för att kontrollera betydelsen av överträdelserna. Antalet överträdelser sägs följa en binominal sannolikhetsfördelning, vilket defineras nedan:

$$P(X = x) = B(x|p, n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 1, \dots, n, \quad (18)$$

där x är totala antalet förutsägelser, p är sannolikheten för en överträdelse givet konfidensnivån och n är totala antalet observationer.

Man kan ha en hypotes som är antingen ensidigt eller tvåsidigt, vi väljer i denna rapport att enbart ha tvåsidigt, eftersom att risker inte ska under- eller överskattas, antalet överträdelser ska därmed vara nära det förväntade antalet. Nollhypotesen och alternativhypotesen defineras nedan:

$$H_0 : p = \alpha, \quad H_a : p \neq \alpha,$$

där α är signifikansnivån (1–konfidensnivån), i denna rapport 0.05 och 0.01. Mer om binominaltestet finner vi under en länk som finns bland *elektroniska källor*.

Vid utvärdering av binomialtesten kommer vi betrakta p-värdena, där höga p-värden antyder att det är en bra modell. P-värden som är lägre än 0.05 respektive 0.01 innebär att vi förkastar nollhypotesen ovan.

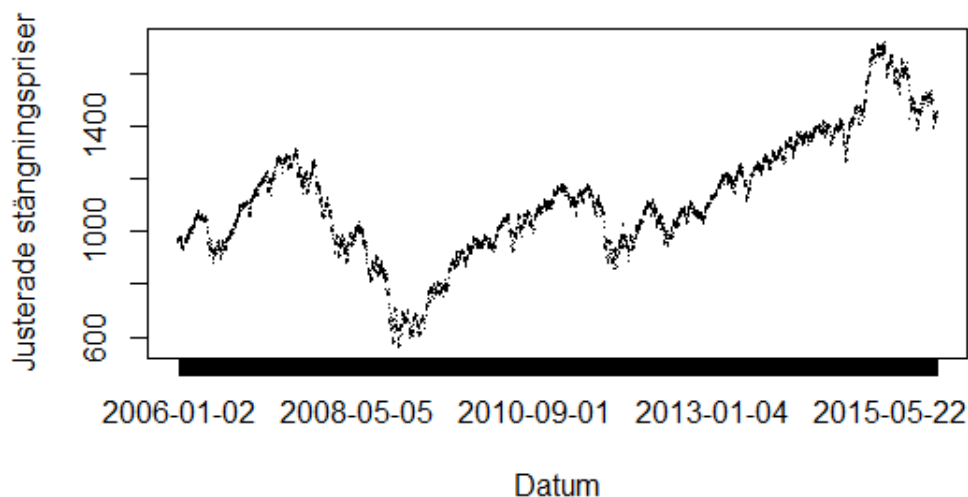
3 Genomförande

I denna del ska vi gå igenom den analys och modellering som man ska utföra när man arbetar med tidsserieanalys. Vi börjar med den övergripande analysen av datamaterialet. Vi har ett datamaterial från OMXS30 med logavkastningsdata från den 2 januari 2006 till och med den 30 december 2015, alltså 2524 börsdagar vilket motsvarar 2523 dagliga logavkastningar.

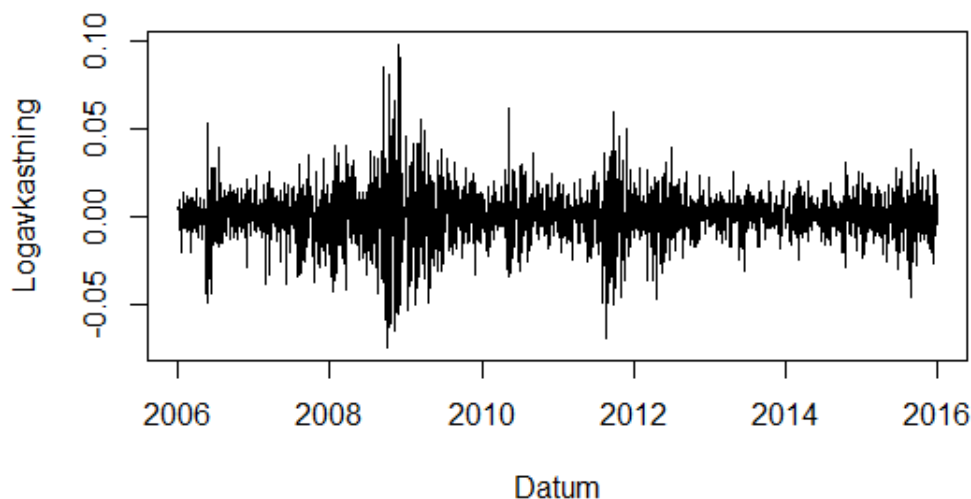
Logavkastningen använder man sig vanligtvis av i finansiella sammanhang, det beror på att aktien/indexets utveckling beter sig vanligtvis logaritmiskt och att de har fördelar vad gäller statistisk analys. Om man skulle använda sig av de relativa avkastningarna (R_t), ger ekvation (1) att $R_t > -1$, för att $P_t > 0$. Normalfördelningen är definerad för alla reella tal och det håller därmed inte om man skulle använda sig av de relativa avkastningarna (R_t). Man använder sig av de logaritmerade avkastningarna (r_t) p.g.a. att de är definerade för alla reella tal, $r_t > \ln(0) = -\infty$, vilket leder till att vi kan använda oss av normalfördelningen och detsamma gäller även för student t-fördelningen. De är dessa fördelningar som är de som används mest i praktiken och de antaganden som är tänkta i denna analys om de visar sig lämpliga.

3.1 Dataanalys

Innan vi kan anpassa de önskade modellerna för vår logavkastningsdata måste vi ta hänsyn till vissa antaganden vilka förklarades tidigare under avsnittet *Tidsserier* i teoridelen. Vi ska analysera logavkastningsdatan med hjälp av olika typer av plottar och tester för att undersöka huruvida en GARCH-modell är en lämplig modell att anpassa logavkastningsdatan med.



Figur 1. De justerade stängningspriserna plottat mot datum för hela tidsperioden. Vi kan lägga märket till finanskrisen som inträffade år 2008.



Figur 2. Logavkastningen, som beräknats enligt definition (3), är plottat mot datum för hela tidsperioden.

I figur 2 kan vi se att dess varians inte är konstant, vilket betyder att det kan förekomma heteroskedasticitet. Figuren visar också att det är både hög och låg volatilitet under tidsperioden, vilket kallas volatilitetsklustering. Vi kan också observera att man nog inte kan säga att μ_t är signifikant skilt från noll p.g.a. att logavkastningen rör sig runt nollan under hela tidsperioden.

För att säkerställa huruvida man inte kan säga att μ_t är signifikant skilt från noll eller ej ska vi utföra ett t-test. Man brukar förvänta sig ett medelvärde nära noll, men lite positivt för att sista priset i perioden är högre än första så att den totala avkastningen för hela perioden är positiv. För t-testet är teststatistikan student t-fördelad med 2522 frihetsgrader (mer om teorin bakom testet finns under *Appendix 1*). T-testet ger följande resultat:

$$T = 0.54668 < 1.96 = t_{0.025}(2522).$$

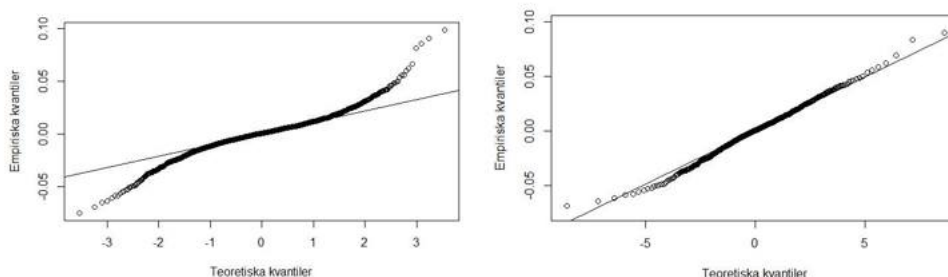
Resultatet ovan säger oss att vi accepterar nollhypotesen, att vi inte kan säga att μ_t är signifikant skilt från noll med en konfidensnivå på 95%.

Medelvärde	Standardavvikelse	Skevhets	Kurtosis	Min	Max
0.00016	0.01481	0.05119	7.25109	-0.07513	0.09865

Tabell 1. Basfakta om datamaterialet, gjord på logavkastningen för hela tidsperioden. Skevhets och kurtosis definieras enligt (20) och (21) i *Appendix 1*.

För att få en ökad förståelse för logavkastningsdatan (r_t) har vi beräknat basfakta för den. Vi ser i tabell 1 att μ_t ligger väldigt nära noll, vilket stämmer in på resultatet vi fick från t-testet ovan. Vi kan också lägga märket till en hög kurtosis, den är över tre och fördelningen kallas då för leptokurtisk, för att det är en kurtosis mer än vad standardnormalfördelning har (teorin

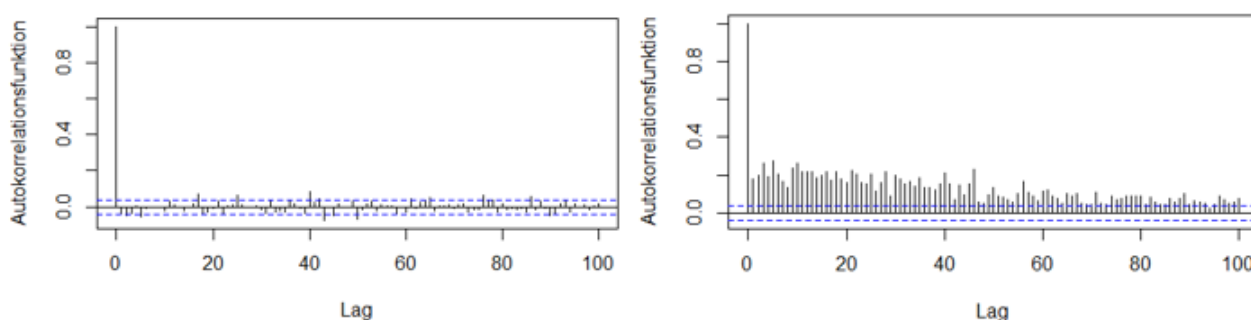
om kurtosis finner vi i *Appendix 1*). Skevheten som är > 0 betyder att fördelningen är lite skev åt höger, vilket betyder att extrema positiva avkastningar är mer förekommande än motsatsen (teorin om skevhet finner vi också i *Appendix 1*). En skevhet som ligger i intervallet $[-0.5, 0.5]$ brukar man inte behöva ta hänsyn till, för det anses vara symmetriskt.



Figur 3. QQ-plott, där punkterna beräknas med hjälp av definition (22) i *Appendix 1*. Gjord på r_t under hela tidsperioden med standardnormal kvantiler som referenslinje (vänster) och standard student t kvantiler med fyra frihetsgrader som referenslinje (höger).

I figur 3 ovan ser det ut som att r_t förklaras bäst av en student t -fördelning. Bl.a. p.g.a. att student t -fördelningen är en leptokurtisk fördelning vilket detta enligt tabell 1 är. Vi har valt att jämföra det med en student t -fördelning som har fyra frihetsgrader för att det är den som generellt sett brukar passas bäst och vi vet inte än vilken frihetsgrad som annars skulle passa bättre. Det kommer senare att skattas fram.

Dock avviker den inte alltför mycket från en normalfördelning och det är ett vanligt förekommande fördelningsantagande i praktiken. (Teori om QQ-plottar finner vi i *Appendix 1*). Vi kommer att använda oss av två olika fördelningsantaganden: normalfördelning och student t -fördelning. Båda fördelningarna är vanligt förekommande för de modell Anpassningar vi vill utföra.



Figur 4. ACF-plott för r_t (vänster) och r_t^2 (höger) med 100 lags under hela tidsperioden. ACF defineras enligt (23) i Appendix 1.

En ACF-plott är baserad på en ACF (teori om ACF finns i Appendix 1). Figur 4 undersöker huruvida antagandet om autokorrelation föreligger eller ej. De blå sträckade linjerna utgör ett 95%:igt konfidensintervall för estimatorerna. Om mer än 5% överstiger konfidensintervallet föreligger det autokorrelation. Volatilitetsklustringen borde uttrycka tydlig korrelation för de första laggarna och avta för de högre laggarna. Om vi lägger fokus på den högra plotten i figur 4 (p.g.a. att det är där vi undersöker r_t^2 och där vill vi att det ska förekomma autokorrelation) ser vi tydligt att det är mer än 5% som överstiger konfidensintervallet, vi antar alltså att det föreligger autokorrelation för r_t^2 . Vi antar alltså att vi har korrelation för volatiliteten. Det är svårare att se om det föreligger autokorrelation för r_t .

Det kan ibland vara svårt att bestämma hur det är utifrån en ACF-plott, i vårt fall ser det ut att vara tydligt för den ena plotten, men inte för den andra. Vi vill undersöka om det föreligger autokorrelation matematiskt m.h.a. ett test som undersöker samma sak som figur 4 gör. Testet heter Ljung-Box testet (teorin bakom testet finner vi i Appendix 1).

Avkastningsdata	Q(m)	P-värde
r_t	$Q(8) = 22.206$	0.004548
r_t^2	$Q(8) = 862.01$	2.2×10^{-16}

Tabell 2. Resultat från Ljung-Box test på r_t och r_t^2 för hela tidsperioden, vilket beräknas enligt definition (24) i Appendix 1.

I tabell 2 ser vi att båda p-värdena är mindre än α (signifikansnivån), vilket säger oss att vi förkastar nollhypotesen att vi inte har autokorrelation, alltså har vi autokorrelation, på både en konfidensnivå på 95% och 99%.

3.2 Modellanpassning

Som vi sett under dataanalysen verkar det som att en GARCH-modell är en lämplig modell att anpassa det valda datamaterialet med. Det som inte talar för att vi direkt kan anpassa en GARCH-modell är att vi i Ljung-Box testet inte kunde förkasta autokorrelation för logavkastningsdatan r_t (som är a_t när vi antar att μ_t är noll). a_t ska inte ha autokorrelation, men vi kan inte se något tydligt mönster i ACF-plotten för r_t . P.g.a. att det inte syns något tydligt mönster kan det bli svårt att motivera för att anpassa en specifik ekonometrisk modell. Det innebär att, med tanke på att t-testet för μ_t sa oss att vi inte kan säga att det är signifikant skilt från noll, inte behöver modellera det. Vi antar därmed att antagandet om korrelation för logavkastningsdatan inte håller för den perioden vi ska prediktera, alltså behöver vi inte anpassa en medelvärdesekvation. Förutom det uppvisade datamaterialet de kriterium som ställdes upp under avsnittet *Tidserier*. Vi ska därmed anpassa de modeller som är tänkta för a_t . Efter en modellanpassning måste vi undersöka så att avkastningsdatan i kvadrat (a_t^2) uppvisar ARCH-effekter, vilket betyder att autokorrelationen ska försvinna, annars behöver man anpassa en ekonometrisk modell för att avlägsna linjärt beroende.

Efter att vi undersökt detta och anpassat de modeller som visat sig lämpliga, ska vi skatta VaR för de 1000 första dagliga logavkastningarna och sedan utföra backtesting för de resterande.

Som nämnt tidigare i rapporten ska vi anpassa a_t för de två olika modellerna GARCH(1, 1) och IGARCH(1, 1) och för de två fördelningsantagandena: normalfördelning och student

t-fördelning. Finansiella tidsserier av dagsdata brukar dock ofta karakteriseras av att de inte är normalfördelade. Trots informationen ovan om att finansiella tidsserier inte brukar vara normalfördelade betyder det inte att ingen finansiell tidsserie inte skulle kunna vara en bra modellanpassning med ett normalfördelningsantagande. Om man inte använder korrekt fördelning vid en GARCH-modellanpassning kan skattningarna ha minskad effektivitet (Cryer & Chan, 2008, s. 301). Trots detta vill vi se vad skillnaden blir när vi anpassar modellerna med de två olika fördelningsantagandena.

Skattningar från de fyra olika modellanpassningarna kommer nedan:

Fördelningsantagande	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$	AIC	BIC
Student t		0.064777	0.934223	0.999	-5.9202	-5.9133
Normal	0.000002	0.082747	0.905463	0.98821	-5.9116	-5.9046

Tabell 3. Tabell över parameterskattningarna, vilka defineras med (30) och (31) i Appendix 1, för GARCH(1, 1)-modellerna som anpassats med de två fördelningsantagandena, för hela tidsperioden. Modellpassningsskattningarna AIC och BIC, vilka defineras med (32) och (33) i Appendix 1.

Fördelningsantagande	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$	AIC	BIC
Student t	0.065464	0.934536	1	-5.9221	-5.9175
Normal	0.06446	0.93554	1	-5.8971	-5.8948

Tabell 4. Tabell över parameterskattningarna, vilka defineras med (30) och (31) i Appendix 1, för IGARCH(1, 1)-modellerna som anpassats med de två fördelningsantagandena, för hela tidsperioden. Modellpassningsskattningarna AIC och BIC, vilka defineras med (32) och (33) i Appendix 1.

Skattningarna av parametrarna följer de antagande som definieras i teorin om modellerna. Vi ser i tabell 3 att det för GARCH(1, 1)-modellerna är $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 < 1$. I tabell 4 för IGARCH(1, 1)-modellerna är $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 = 1$. Under dataanalysen undersökte vi huruvida μ_t kunde sägas inte vara signifikant skilt från noll och fick resultatet att det är det och därmed har vi dragit bort μ_t från modellpassningen. M.h.a. paketet *rugarch*, som vi använder oss av även när vi skattar parametrarna, testas alla parametrar i modellen om de är signifikanta eller ej.

Parameterskattningarna testas med de t-test som vi tidigare använt. Från t-testet finner vi att interceptet (α_0) i de flesta fallen, rättare sagt för tre av fyra modellanpassningar, inte är signifikanta och tas därmed bort. För IGARCH-modellerna togs α_0 bort i båda fallen och därmed finns det inte med bland skattade parametrar i tabell 4. Resterande parametrar för respektive modeller är signifikanta för en 95%:ig konfidensnivå.

AIC- och BIC-värden ger en insikt på hur bra en modellpassning är för ett datamaterial, modellpassningen som har det lägsta värdet är den modellen som anpassar datamaterialet bäst. Om vi först jämför värdena för GARCH-modellen, vi ser där från tabell 3 att det är GARCH-modellen med student t-fördelningsantagandet som är den bästa anpassningen, enligt både AIC och BIC. Om vi nu istället kollar på IGARCH-modellerna, vi ser från tabell 4 att det även där är student t-fördelningsantagandet som är den bästa anpassningen, enligt både AIC och BIC. Det allra bästa värdet för både AIC och BIC har IGARCH-modellen med student t-fördelningsantagandet.

I de modeller vi har student t-fördelningsantagandet, skattas även antal frihetsgrader som fördelningarna har för de standardiserade residualerna (ϵ_t), vilket vi finner nedan:

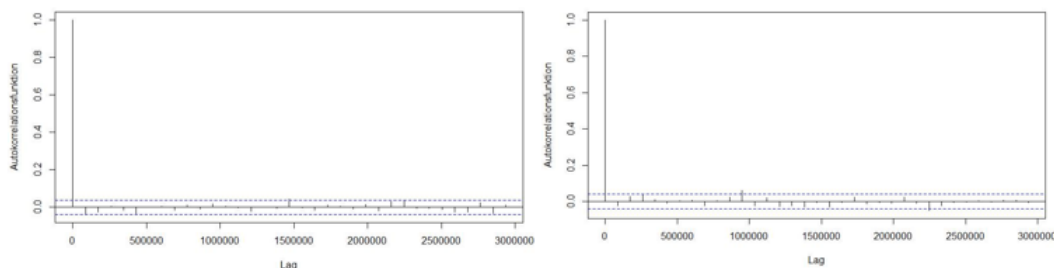
Modell	Antal frihetsgrader
GARCH(1, 1)	9.506704 \approx 9.5067
IGARCH(1, 1)	9.357309 \approx 9.3573

Tabell 5. Tabell över skattningarna för frihetsgrader för de två modellerna GARCH(1, 1) och IGARCH(1, 1) med student t -fördelningsantagande.

Nu när vi anpassat GARCH-modellerna ska vi undersöka ϵ_t för att se om autokorrelationen försvunnit, vilket är ett av målen med anpassningen. Vi ska undersöka ϵ_t för att vi vill se om vi har fångat upp volatiliteten. Standardiserade residualer är när man delar bort standardavvikelsen från de vanliga residualerna, definitionen följer nedan:

$$\text{Standardiserad residual } i = \frac{\text{Residual } i}{\text{Standardavvikelse för residual } i}$$

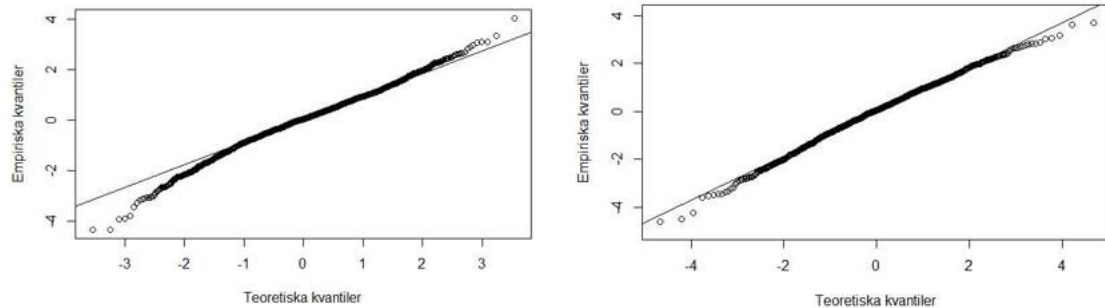
Vi vill undersöka ϵ_t för att säkerställa att modellenpassningarna följer de antagandena modellerna har i definitionerna, att ϵ_t är i.i.d. med ett väntevärde på noll och varians på ett, stämmer. Därmed delar man bort σ_t från definition (7), för man vill enbart att ϵ_t ska kvarstå. För att undersöka antagandet konstruerar vi ACF-plottar för alla de fyra modellerna vi anpassat. Vi utför även Ljung-Box test för att det, som nämnt tidigare, kan vara svårt att dra slutsatser direkt ifrån en ACF-plott, man kan också behöva en matematisk beräkning.



Figur 5. ACF-plottar för ϵ_t (vänster) och ϵ_t^2 (höger) för GARCH(1, 1) med normalfördelningsantagande, anpassat för hela tidsperioden. ACF defineras med (23) i Appendix 1.

Utifrån figur 5 ser det ut som att autokorrelationen har försvunnit. Ljung-Box testet, som vi finner med alla värden i tabell 8 i Appendix 2, ger samma resultat. För GARCH(1, 1) med normalfördelningsantagandet, får vi ett p-värde för ϵ_t på 0.6007 och ett p-värde för ϵ_t^2 på 0.3344, vilket säger oss att modellen tagit bort autokorrelationen. Vi förkastar alltså inte nollhypotesen, om att det inte föreligger autokorrelation, alltså förligger det ingen autokorrelation. ϵ_t är därmed i.i.d. Samma slutsats dras för de resterande modellenpassningarna (ACF-plottarna för de resterande modellerna finner vi i Appendix 2). Detta säger oss att det än så länge ser ut som att de anpassade modellerna är bra, för när man

får bort autokorrelationen har man fångat upp strukturen.



Figur 6. QQ-plottar, där punkterna beräknas med hjälp av definition (22) i Appendix 1, för ϵ_t i GARCH(1, 1)-modellen. Anpassat med normalfördelningsantagande med en standardnormal kvantiler som referenslinje (vänster). Anpassat med student t -fördelningsantagande med standard student t kvantiler med 9.5067 frihetsgrader (enligt tabell 5) som referenslinje (höger).

I den vänstra plotten i figur 6 ovan följer de empiriska kvantilerna de teoretiska, som i detta fall är standardnormal kvantiler, bra fram till den nedersta svansen. I den högra plotten följer de empiriska kvantilerna de teoretiska synnerligen bra. Samma resonemang gäller QQ-plottarna för IGARCH-modellerna (vilka vi finner i Appendix 2). Detta säger oss att student t -fördelningsantagandet var ett bättre val av fördelning vid modell Anpassningen, vilket var det vi hade förväntat oss.

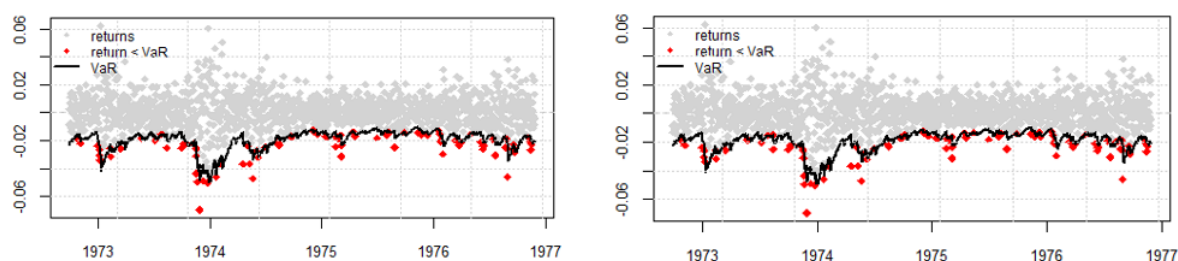
Vid backtesting kan vi inte lägga till något fördelningsantagande, utan paketet *rugarch* som vi använder oss av, tar kvantilerna från respektive modell och utför backtesting utefter det, vilket gör att vi inte säkert kan säga vilken fördelning som används vid våra backtesting. Med tanke på att alla QQ-plottar ser ut att följa respektive referenslinje relativt väl och att det är just kvantilerna från QQ-plottarna som används, blir det antagligen något som liknar de fördelningsantaganden vi undersökt för ϵ_t . För normalantagandet är det nog kvantiler från ungefär en standardnormalfördelning och för student t -antagandet är det antagligen en standard student t -fördelning med de skattade frihetsgraderna, p.g.a. att väntevärdet ska vara noll och variansen ett.

4 Resultat

4.1 95 % konfidensnivå

	Normal	Student t
Totalt antal observationer	1523	1523
Förväntad	76	76
GARCH(1, 1)	101 (0.005)	103 (0.003)
IGARCH(1, 1)	100 (0.007)	101 (0.005)

Tabell 6. Tabell över backtesting för 95% konfidensnivå. Totalt antal observationer är alla observationerna i tidsserien minus de som använts för att anpassa modellen. P -värden från binomialtestet i parenteserna.



Figur 7. Backtesting från GARCH(1, 1) med normalfördelningsantagande (vänster) och student t -fördelningsantagande (höger).

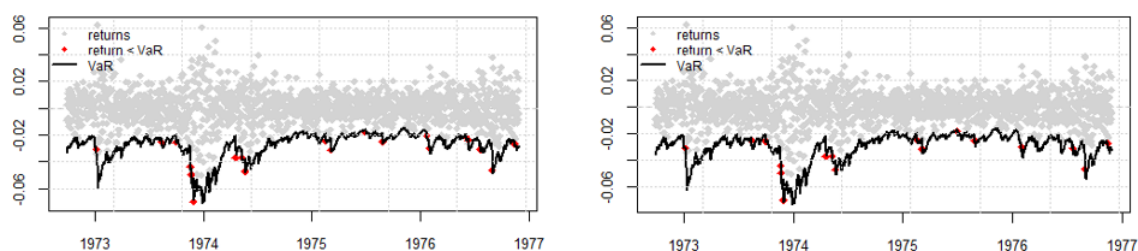
I figur 7 ovan ser vi resultatet från backtesting på GARCH(1, 1) med de båda fördelningsantagandena. De röda prickarna är de verkliga VaR som överskrider de förväntade förlusten. Det ser ut att vara ganska många som överträder, från tabell 6 ovan ser vi att det är 101 för den vänstra respektive 103 för den högra, som överskridit den förväntade förlusten, när det förväntade antalet överträdelser var beräknade till 76.

För backtesting på IGARCH(1, 1) med de båda fördelningsantagandena (plottarna för dem finner vi i Appendix 2) är det även där många som överträder, rättare sagt 100 och 101 för normalfördelningsantagandet och student t -fördelningsantagandet, respektive.

4.2 99 % konfidensnivå

	Normal	Student t
Totalt antal observationer	1523	1523
Förväntad	15	15
GARCH(1, 1)	36 (0.000)	24 (0.037)
IGARCH(1, 1)	34 (0.000)	23 (0.052)

Tabell 7. Tabell över backtesting för 99% konfidensnivå. Totalt antal observationer är alla observationerna i tidsserien minus de som använts för att anpassa modellen. P -värden från binomialtestet i paranteserna. De p -värden som är i fetstil är de som klarat binomialtestet.



Figur 8. Backtesting från GARCH(1, 1) med normalfördelningsantagande (vänster) och student t -fördelningsantagande (höger).

I figur 8 ovan ser vi backtesting på GARCH(1, 1) med de båda fördelningsantagandena. Det ser ut att även för 99% konfidensnivå vara många som överträder, från tabell 7 ser vi att det är 36 för den vänstra och 23 för den högra, som överskridit den förväntade förlusten, när det förväntade antalet överträdelser var beräknade till 15.

Backtesting på IGARCH(1, 1) med de båda fördelningsantagandena (plottarna för dem finner vi i *Appendix 2*) är det även där många som överträder, rättare sagt 34 och 23 för normalfördelningsantagandet och student t -fördelningsantagandet, respektive.

5 Slutsats

Efter granskning av datamaterialet för aktieindexet OMXS30 visade det sig att det uppfyllde de förväntade kraven om bl.a. volatilitetsklustering och att det föreligger ickelinjärt beroende. Efter att det konstaterades fanns det anledning att gå vidare med att anpassa de önskade GARCH-modellerna och vi valde att anpassa de för de två olika fördelningsantagandena: normalfördelning och student t -fördelning. De anpassades för de 1000 första dagliga logavkastningarna och sedan skattades VaR. Därefter utfördes backtesting på de resterande dagliga logavkastningarna. Efter backtestingen utfördes ett binomialtest för att utvärdera hur backtestingen gick.

När backtesting gjorts konstaterar vi att antalet överträdelser är många och att binomialtesterna inte ger bra resultat. Man kan tänka sig att anledningen till att modellerna inte fick bra resultat för backtestingen, med stor sannolikhet kan bero på de händelser som präglade datamaterialet, så som finanskrisen år 2008–2010. Fel fördelningsantagande kan också leda till att modellen inte kan mäta risken tillräckligt bra. En skev student t -fördelning hade kunnat ge bättre resultat, p.g.a. att logavkastningsdatan var skev enligt tabell 1, men skevheten är dock ytterst liten så det är inte säkert att det skulle blivit någon större förbättring.

Vår slutsats är att ingen av modellerna vi anpassat kan leva upp till kraven för en bra volatilitetsmodell för det svenska aktieindexet OMXS30 under den valda tidsperioden, utifrån de resultat vi fått fram. Modellerna har en tendens att underskatta risken, för att antalet överträdelser är fler än det förväntade antalet. Det är de båda GARCH-modellerna med student t -fördelningsantagandet på en 99% konfidensnivå som är de enda som klarar binomialtestet, men man brukar säga att om överträdelserna är 0 – 4 är det bra och i dessa fall är det åtta respektive nio och det brukar anses som dåligt. Det blev bättre resultat för anpassning av de båda GARCH-modellerna med student t -fördelningsantagandet på en konfidensnivå på 99% än för en konfidensnivå på 95%, vilket kan verka orimligt. Det borde bli bättre resultat för en lägre konfidensnivå. Denna slutsats säger oss att risken underskattas.

Om man jämför hur bra de två olika modellerna GARCH(1, 1) och IGARCH(1, 1) mäter risken, skiljer sig inte så mycket åt för det datamaterial vi analyserat. Det kan vi observera genom att undersöka resultaten från binomialtestet, alla modellerna misslyckades förutom två och de var en GARCH-modell och en IGARCH-modell och de var för student t -fördelningsantagande och en 99% konfidensnivå i båda fallen. Baserat på resultaten kan vi dra slutsatsen att de två olika modellerna verkar vara väldigt likartade i detta fall, med det valda datamaterialet, fördelningsantaganden och konfidensnivåerna. Det är för konfidensnivån på 99% det student t -fördelningsantagandet är överlägset bättre.

6 Diskussion

Som nämnt tidigare, under slutsats, kan det vara så att det skulle bli bättre resultat om vi använde oss utav någon/några andra fördelningsantaganden vid modell Anpassningen. Ett alternativ är att vi skulle kunna ha undersökt huruvida det kan var vårt datamaterial som inte passar till de önskade modellerna. Det vi då skulle kunna ha gjort är att simulera fram data från GARCH(1, 1) och IGARCH(1, 1) med de valda fördelningsantagandena och använda de skattningar som vi fått av respektive modell. Därefter utfört backtesting på alla de fyra simulerade modellerna. Vi skulle därefter kunna se om överträdelserna överskred 76 och 15, respektive. Om de skulle ge positivt resultat, alltså att överträdelserna inte skulle bli så många som vi fått, skulle vi kunna misstänka att det är det valda datamaterialet som inte anpassades tillräckligt bra av de önskade modellerna.

Som det förklarades tidigare i rapporten togs interceptet (α_0) bort i tre av fyra modell Anpassningar p.g.a. att de inte var signifikanta. Backtesting gjordes även för modellerna när interceptet inte togs bort och resulterade i bättre resultat i backtestingarna och därmed bättre värden på binomialtesten. Vi väljer ändå att ta bort interceptet i de fallen de inte är signifikanta för att de gör modellen sämre om man har kvar en parameter som inte är signifikant.

För detta datamaterial anpassades ingen ekonometrisk modell, som i vissa fall behövs. Ljung–Box testen efter modell Anpassningarna resulterade i att autokorrelationen försvunnit, men det kan ändå vara så att det skulle blivit ännu bättre resultat om det anpassades en ekonometrisk modell innan. ACF–plotten för r_t verkade ha autokorrelation enligt Ljung–Box testet och det skulle kunna blivit bättre resultat om vi hade försökt modellerat det.

Vad som också nämndes innan, under slutsats, är att de dåliga resultaten kan bero på att vi har med en tidsperiod i vårt datamaterial när det var upp och nergångar i ekonomin, vilket också har påverkat det svenska aktieindexet OMXS30. Det vi då skulle kunnat undersökt är att anpassa en modell efter finanskrisen. Vi skulle kunnat anpassa en modell från och med 2010 till och med 2012 t.ex. och sedan utfört backtesting på resterande (år 2013 till och med 2015). Om det är finanskrisen som är anledningen till att modellerna inte kan mäta risken tillräckligt bra, skulle de antagligen märkas, och då resultera i förbättrade resultat i backtestingarna.

Något mer att diskutera är en osäkerhet i de backtesting som utförts. Även om en modell är väldigt bra, kan den leverera dåliga resultat på ett backtesting, vilket man behöver ta hänsyn till. En möjlig förbättring skulle vara att ha utfört backtestingarna för respektive modell många gånger och komma fram till ett medelvärde för antalet överträdelser och utföra ett binomial test på det medelvärdet. Det finns också flera olika sätt att utföra backtesting på (som förklarades under avsnittet *Backtesting*). Skulle det ha gjorts flera varianter av backtesting för respektive modell och alla skulle ge liknande resultat, så skulle slutsatsen stärkas.

Referenser

Litteratur

- Berk, J. B., & DeMarzo, P. M. (2011). *Corporatefinance: the core*. 2 edition. Global edition.
- Hull, John. (2010). *Risk management and Financial institutions*. Global edition Pearson.
- Makridakis, S., Wheelwright, S. C., & Hyndman R. J. *Forecasting: methods and applications*. 1998. John Wiley & Sons.
- Tsay, Ruey. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. Upplaga 3. New Jersey. John Wiley & Sons.
- Tsay, Ruey. (2005). *Analysis of Financial Time Series*. Upplaga 2. New Jersey. John Wiley & Sons.
- Cryer, Jonathan & Chan, Kung–Sik. (2008). *Time Series Analysis: With applications in R*. Upplaga 2. NY. Springer Science+Business Media LLC.
- Chair, A. S. o.a., 2003. *Volatility Modeling Using the Student's t Distribution*. Blacksburg, Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Alm S. H. & Britton T. (2008). *Stokastik – Sannolikhetsteori och statistikteori med tillämpningar*. Upplaga 1. Sverige: Liber.
- Blanco C., Oks M. (2004). *Backtesting VaR Models: Quantitative and Qualitative Tests*. The Risk Desk”, Vol. IV, No. 1.
- Hult H. m.fl. (2012). *Risk and Portfolio Analysis, Principles and Methods*. Springer–Verlag New York Inc.

Artiklar

- Markowitz, H. (1952). *Portfolio selection*. The journal of finance, 7(1), 77-91.
- Blanco, C. & Oks, M. (2004). *Backtesting VaR models: Quantitative and qualitative tests*. *Financial Engineering Associates, Risk Desk*, 1(4).
- Karlsson, K.G. (2002). *Validation of modelled cloudiness using satellite-estimated cloud climatologies*.

Elektroniska källor

- <http://www.aktuarieforeningen.se/filer/2004Tidsserier.pdf>
- http://www.ams.stonybrook.edu/~yiyang/research/computational_finance/Parameter_Estimation_of_GARCH_Model.pdf
- http://www.graphpad.com/guides/prism/6/statistics/index.htm?stat_binomial.htm
- <https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/rugarch.pdf>
- <https://cran.r-project.org/web/packages/moments/moments.pdf>

A Appendix 1–Statistisk teori

A.1 T-test

Låt $r = (r_1, \dots, r_N)$ vara ett stickprov från en normalfördelning med väntevärde μ och standardavvikelse σ . Vi kan testa hypotesen:

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$

mot alternativhypotesen:

$$\mu \neq \mu_0,$$

med följande teststatistika:

$$T = \frac{\bar{r} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} \sim t(N-1), \quad (19)$$

som är student t -fördelad med $(N-1)$ frihetsgrader, där n är antal observationer. Vi förkastar nollhypotesen om $|T| > t_{\alpha/2}(N-1)$, där $t_{\alpha/2}(n-1)$ är $\alpha/2$ -kvantilen för student t -fördelningen (Alm & Britton, 2008) och α är signifikansnivån.

A.2 Skevhet och Kurtosis

Skevhets och kurtosis används oftast för att summera den asymmetriska utsträckningen och svansens tjocklek. Låt r_1, r_2, \dots, r_N vara ett stickprov från r med N observationer med väntevärde μ och varians σ^2 (Tsay, 2010, s. 9).

Stickprovets skevhet definieras som:

$$\hat{s} = \frac{1}{(N-1)\hat{\sigma}^3} \sum_{i=1}^N (r_i - \hat{\mu})^3, \quad (20)$$

och stickprovets kurtosis definieras som:

$$\hat{k} = \frac{1}{(N-1)\hat{\sigma}^4} \sum_{i=1}^N (r_i - \hat{\mu})^4. \quad (21)$$

$k(r) - 3$ brukar kallas den lyckade kurtosis, för att en standardnormalfördelning har $k(r) = 3$. En fördelning som har positiv kurtosis säger man har tunga svansar för de lägger mer massa på svansarna än vad en standardnormalfördelning gör och de har en hög smal topp kring medelvärde. De tunga svansarna innebär att sannolikheten ökar för osannolika händelser. Det motiverar att använda andra fördelningar än den gaussiska fördelningen, alltså normalfördelningen. Det betyder att ett slumpmässigt urval tenderar att ha mer extrema värden. En sådan fördelning kallas för en leptokurtisk fördelning, vilket är vanligt vid finansiell analys. En fördelning med negativ kurtosis har tunna/korta svansar. En sådan fördelning brukar kallas för en platykurtisk fördelning.

A.3 QQ-plott

Vi kan anta oberoende och likafördelade slumpvariabler R_1, R_2, \dots, R_N som har observationerna r_1, r_2, \dots, r_N , där N är antalet observationer. Det bestämda stickprovet för datan är $r_{1,N} \geq r_{2,N} \geq \dots \geq r_{N,N}$. Punkterna i QQ-plotten är då paren:

$$(F^{-1}(\frac{N-k+1}{N-1}), r_{k,N}), \quad (22)$$

där $F^{-1}(\cdot)$ är kvantilen för referensfördelningen, $r_{k,N}$ är den empiriska kvantilen och $k = 1, \dots, N$.

En QQ-plott är ett användbart verktyg för att testa fördelningsantagande, de jämför de empiriska mot de teoretiska kvantilerna för en given fördelning. Om det är så att de empiriska och teoretiska stämmer överens, illustreras det grafiskt med en rät linje ($x = y$) (Karlsson, 2002, s. 38).

A.4 Autokorrelationsfunktion (ACF)

Om en tidsserien $\{r_t\}$ inte är stationär så har tidsserien en trend. Att tidsserien har en trend betyder att det finns ett linjärt samband mellan variabeln vid tidpunkt t och samma variabler k perioder innan. Det kallas för autokorrelation då variabeln korrelerar med sig själv vid olika tidpunkter (Makridakis, Wheelweight & Hyndman, 1998, s. 38).

Lag- k autokorrelationen definieras som nedan:

$$\rho_k = \frac{Cov(r_t, r_{t-k})}{\sqrt{Var(r_t)}\sqrt{Var(r_{t-k})}} = Corr(r_t, r_{t-k}) \neq 0, \quad (23)$$

där $\rho_0 = 1$ och $\rho_k \in [-1, 1]$.

A.5 Ljung-Box test

Ljung-Box testet är ett sätt att testa signifikansen av autokorrelationskoefficienten. Teststatistikan för Ljung-Box testet definieras som:

$$Q(m) = N(N+2) \sum_{l=1}^m \frac{\hat{\rho}_l^2}{N-l}, \quad (24)$$

där N är antal observationer och $\hat{\rho}$ är korrelationskoefficienten.

Nollhypotesen definieras som:

$$H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0,$$

som testas mot alternativhypotesen:

$$H_a : \rho_i \neq 0, \text{ för iaf något } i \in \{1, \dots, m\}.$$

$Q(m)$ är asymptotiskt χ^2 -fördelad slumpvariabel med m frihetsgrader, där m också står för hur många lag vi tar hänsyn till i testet. m brukar bestämmas bra genom $\ln(N)$. Förkasta nollhypotesen om $Q(m) > \chi_\alpha^2$, där χ_α^2 är $100(1-\alpha)$ kvantilen av χ^2 -fördelningen. Om man kollar på p-värdet så förkastar man nollhypotesen om p-värdet är mindre än eller lika med α (signifikansnivån).

A.6 Normalfördelning

En normalfördelad variabler antar ofta värden som ligger nära medelvärdet och mycket sällan värden som har en stor avvikelse.

Täthetsfunktionen ser ut som följande för normalfördelningen:

$$f_r(r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (25)$$

Följande gäller för normalfördelningen:

$$E(r) = \mu, \quad \text{Var}(r) = \sigma^2, \\ s(r) = 0 \quad \text{och} \quad k(r) = 3.$$

A.7 Student t-fördelning

År 1987 föreslog Bollerslev att normalfördelningsantagandet för finansiell data kunde ändras till ett antagande om student t-fördelning. Man kan med den fördelningen bättre beskriva betingad heteroskedasticitet i sitt datamaterial. Student t-fördelningen är en leptokurtisk fördelning (Chair, 2003).

Student t-fördelningen har följande täthetsfunktion (Karlsson, 2002, s. 27):

$$f_r(r; m) = \frac{\Gamma[(m+1)/2]}{\sqrt{m\pi}\Gamma[m/2](1 + \frac{r^2}{m})^{(m+1)/2}}, \quad (26)$$

där $m > 2$ och är antal frihetsgrader, $\Gamma[\cdot]$ är en gammafunktion.

Följande gäller för student t-fördelningen:

$$E(r) = 0, \text{ när } m \geq 2, \quad \text{Var}(r) = \frac{m}{m-2}, \text{ när } m \geq 3, \\ s(r) = 0 \text{ och } k(r) = \frac{6}{m-4}.$$

A.8 Maximum likelihood-skattning

Givet en tidsserie r_1, r_2, \dots, r_N av N oberoende och likafördelade observationer som kommer från en fördelning $f(r)$ med okända parameterar θ , då är den sammansatta täthetsfunktionen:

$$f(r_1, r_2, \dots, r_N | \theta) = f(r_1 | \theta) \times f(r_2 | \theta) \times \dots \times f(r_N | \theta). \quad (27)$$

Genom att betrakta de observerade värdena r_1, r_2, \dots, r_N att vara fixa parametrar av denna funktion, medan θ är funktionens okända parameter och tillåter den variera fritt, då blir likelihood funktionen som nedan:

$$L(\theta | r_1, r_2, \dots, r_N) = f(r_1, r_2, \dots, r_N | \theta) = \prod_{i=1}^N f(r_i | \theta). \quad (28)$$

I praktiken är det mycket lättare att arbeta med log-likelihood funktionen:

$$\ln L(\theta | r_1, r_2, \dots, r_N) = \sum_{i=1}^N \ln f(r_i | \theta). \quad (29)$$

Om a_t tillhör normalfördelningen och har standardiserade feltermen som är i.i.d. normalfördelade och de okända parametrarna $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ ser log-likelihoodfunktionen ut som följande:

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \log(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{r_t^2}{\sigma_t^2}. \quad (30)$$

Funktionen maximeras numeriskt med avseende på α_0, α_1 och β_1 , som är GARCH-modellernas parametrar.

Om a_t beskrivs bättre av en student t-fördelning och att vi antar att de standardiserad feltermerna också gör det och att de är i.i.d. så skattas parametrarna istället med avseende på student t-fördelningen (Karlsson, 2002, s. 26). De okända parametrarna $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ skattas då på följande vis:

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = \sum_{i=1}^N \left[\log \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) - \log \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{1}{2} \log(\pi(v-2)) - \frac{1}{2} \log \sigma_t^2 - \left(\frac{v+1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{r_t^2}{\sigma_t^2(v-2)}\right) \right]. \quad (31)$$

Funktionen maximeras även här numeriskt med avseende på α_0, α_1 och β_1 , som är GARCH-modellernas parametrar. Man kan skatta student t-fördelningens frihetsgrader för feltermerna m.h.a. maximum likelihood-skattningen genom att lägga till m som en parameter till θ , vilket är antal frihetsgrader i student t-fördelningen.

A.9 AIC och BIC

Det finns flera informationskriterier som är användbara som mått när man gör modellanpassningar som är baserade på likelihood funktionen. "Akaike information criterion", som förkortas med AIC (Akaike, 1973) och "Schwarz-Bayesian information criterion", som förkortas med BIC, är två av dem och definieras nedan:

$$AIC = \frac{-2}{N} \ln(L) + \frac{2}{N} n, \quad (32)$$

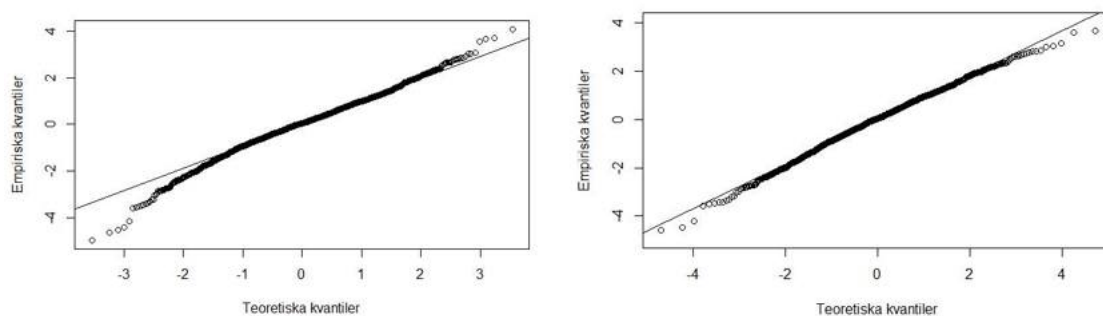
$$BIC = \frac{-2}{N} \ln(L) + \frac{\ln(N)}{N} n, \quad (33)$$

där n är antal parametrar, N är stickprovets storlek och L är likelihoodfunktionen som utvärderas från maximum-likelihoodskattningen (Tsay, 2010, s.48).

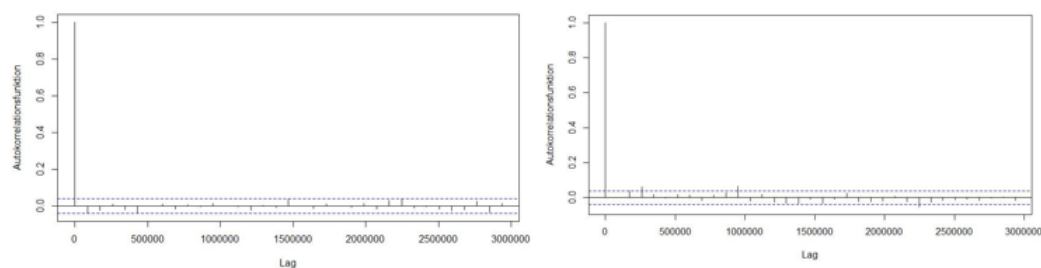
A Appendix 2–Figurer och tabeller

Modell	Fördelningsantagande	Residualer	P-värde
GARCH(1, 1)	Student t	ϵ_t	0.6007
		ϵ_t^2	0.3344
	Normal	ϵ_t	0.5965
		ϵ_t^2	0.4402
IGARCH(1, 1)	Student t	ϵ_t	0.6056
		ϵ_t^2	0.297
	Normal	ϵ_t	0.6151
		ϵ_t^2	0.3808

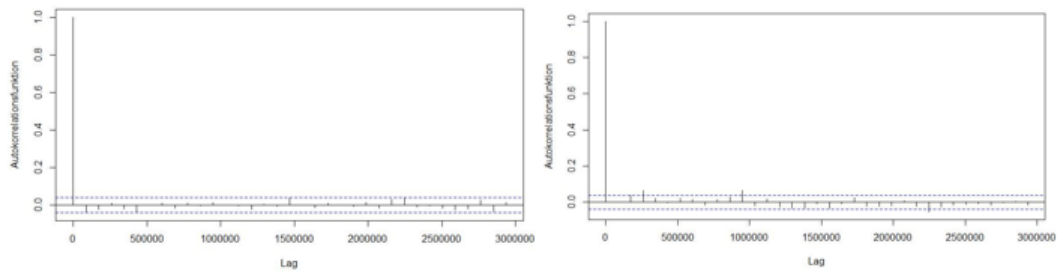
Tabell 8. Tabell över Ljung–Box testet, som defineras med (24), för ϵ_t och ϵ_t^2 . Frihetsgraderna (m) är sju för alla tester.



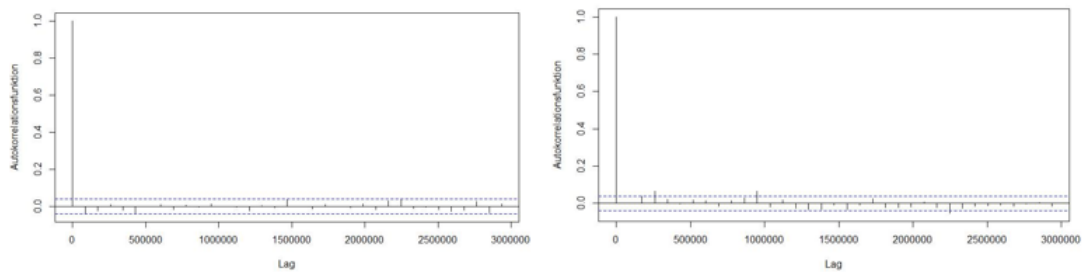
Figur 9. QQ-plottar, där punkterna beräknas med hjälp av definition (22), för ϵ_t i IGARCH(1, 1)-modellen. Anpassat med normalfördelningsantagande med standardnormal kvantiler som referenslinje (vänster). Anpassat med student t-fördelningsantagande med standard student t kvantiler med 9.3575 frihetsgrader (enligt tabell 5) som referenslinje (höger).



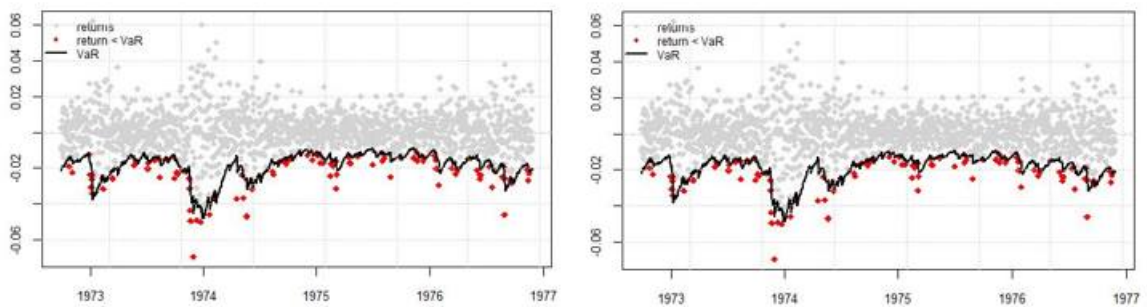
Figur 10. ACF-plott för ϵ_t (vänster) och för ϵ_t^2 (höger) för GARCH(1, 1) med student t-fördelningsantagande, anpassat för hela tidsperioden. ACF defineras med (23).



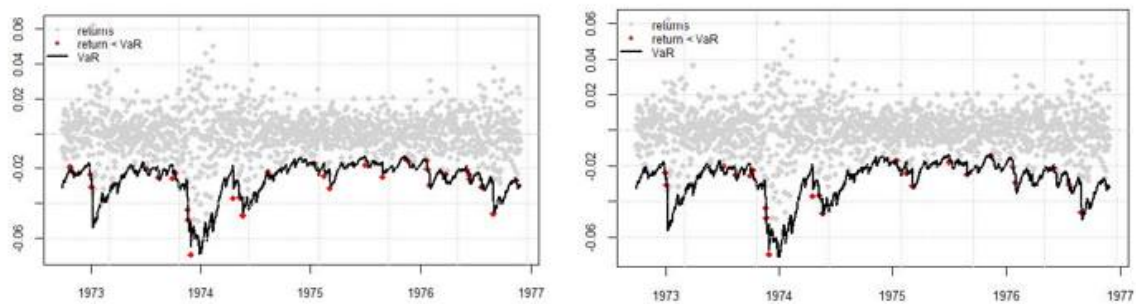
Figur 11. ACF-plott för ϵ_t (vänster) och för ϵ_t^2 (höger) för IGARCH(1, 1) med normalfördelningsantagande, anpassat för hela tidsperioden. ACF defineras med (23).



Figur 12. ACF-plott för ϵ_t (vänster) och för ϵ_t^2 (höger) för IGARCH(1, 1) med student t -fördelningsantagande, anpassat för hela tidsperioden. ACF defineras med (23).



Figur 13. Backtesting från IGARCH(1, 1) med normalfördelningsantagande (vänster) och student t -fördelningsantagande (höger) med en 95%:ig konfidensnivå.



Figur 14. Backtesting från IGARCH(1, 1) med normalfördelningsantagande (vänster) och student t -fördelningsantagande (höger) med en 99%:ig konfidensnivå.

Namn	Förkortning
ABB Ltd	ABB
Alfa Laval AB	ALFA
Assa Abloy AB ser. B	ASSA B
AstraZeneca PLC	AZN
Atlas Copco AB ser. A	ATCO A
Atlas Copco AB ser. B	ATCO B
Boliden AB	BOL
Electrolux AB ser. B	ELUX B
Ericsson Telefonab L M ser.	ERIC B
Fingerprint Cards AB ser. B	FING B
Getinge AB ser. B	GETI B
Hennes & Mauritz AB H & M ser.	HM B
Investor AB ser. B	INVE B
Kinnevik Investment AB ser. B	KINV B
Lundin Petroleum AB	LUPE
Nokia Oyj	NOKI SEK
Nordea Bank AB	NDA SEK
Sandvik AB	SAND
SCA B	SCA B
SEB A	SEB A
Securitas AB ser. B	SECU B
Skanska AB ser. B	SKA B
SKF AB ser. B	SKF B
Ssab AB ser. A	SSAB A
Swedbank AB ser. A	SWED A
Swedish Match AB	SWMA
Svenska Handelsbanken ser. A	SHB A
Tele2 AB ser. B	TEL2 B
TELIA COMPANY	TLSN
Volvo AB ser. B	VOLV B

Tabell 9. Tabell över alla bolagen som ingår i OMXS30.