



Stockholms
universitet

Value at Risk-estimering & jämförelse av volatilitetsmodellerna ARCH(p) & GARCH(1,1)

Jacob Sand

Kandidatuppsats 2016:25
Matematisk statistik
Augusti 2016

www.math.su.se

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm

Value at Risk-estimering & jämförelse av volatilitetsmodellerna ARCH(p) & GARCH(1,1)

Jacob Sand*

Augusti 2016

Sammanfattning

Med de justerade stängningspriserna för aktien AstraZeneca under en given tidsperiod som utgångspunkt beräknas logavkastningarna, vilka lägger grund för arbetets analys. Därefter anpassas data till ARCH(p) respektive GARCH(1,1), för två olika fördelningsantaganden. Fortsättningsvis skattas de dagliga Value at Risk-värdena på konfidensnivån 95%, där utvärdering av de fyra olika modellanpassningarna utförs med hjälp av ett överträdelsebaserat test, som sedan evalueras med ett binomialtest. Slutsatsen av jämförelsen blev att båda modellerna, oavsett fördelningsantagande, presterade likvärdigt. Dock kan en GARCH(1,1) anses vara ett mer passande val för studerad data då den har färre parametrar.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.
E-post: jacobmsand@gmail.com. Handledare: Filip Lindskog.

Abstract

Throughout this thesis the adjusted closing price of the stock AstraZeneca, for a given time period, plays a central role. Firstly the log return is being calculated for the data, which is later fitted to an ARCH(p) and GARCH(1,1) model given two different distribution assumptions. Since the main purpose is to compare how well the mentioned models can forecast next coming day's risk, daily Value at Risk is used as risk measure and calculated on a 95% confidence level. With back testing the obtained models were then evaluated by a violation-based test, where a binomial test determined which model performed best for the selected data. Finally, after comparing the models it was found that all models performed similarly, regardless of distribution assumptions. However, a GARCH(1,1) model may be considered as more preferable due to the fact that it has less parameters.

Innehåll

1	Inledning	4
2	Mål och Syfte	5
2.1	Syfte	5
2.2	Programvara	5
3	Teoretisk bakgrund	6
3.1	Avkastningsserier	6
3.2	Tidsseriermodeller	6
3.3	Autokorrelationsfunktion (ACF) och Partiell ACF (PACF)	7
3.4	Autoregressiva modellen (AR)	8
3.5	ARCH-modellen	8
3.6	GARCH-modellen	9
3.7	Standardiserade residualer	9
3.8	Value at risk (VaR)	9
3.9	Back-testing av VaR	10
4	Genomförande	12
4.1	Dataanalys	12
4.2	Modellanpassning	16
4.2.1	ARCH	16
4.2.2	GARCH	18
5	Resultat	21
5.1	Back-testing	21
6	Slutsats	23
7	Appendix	25
7.1	T-test	25
7.2	Binomialtest	25
7.3	Ljung-Boxtest	25
7.4	Skevhet och kurtosis	26
7.5	Maximum Likelihoodestimering MLE	26
7.6	Figurer	27

1 Inledning

Det är av både privata och institutionella intressen det finns skäl till att prediktera uppgång, såväl som nedgång, på börsen för att kunna ta ställning till eventuell underliggande risk.

Value at Risk (VaR) har sedan början på 1990-talet blivit ett mått som flitigt används för att mäta risk på finansiella marknader. Man använder VaR för prediktion av den maximala förlusten som kan inträffa under normala marknadsförhållanden, givet att det existerar någon form av struktur i prissättningen av en finansiell tillgång. Fenomenet av en sådan prissättning går under benämningen volatilitetsklustring, vilket är vanligt förekommande för avkastningsdata.

Volatilitetsklustring innebär att likartande förändringar följs av varandra, exempelvis att stora nedgångar följs av stora nedgångar och små nedgångar följs av små nedgångar. Efter att detta fenomen observerats har flertalet modeller tagits fram, just i syftet att kunna modellera den underliggande strukturen hos volatiliteten. Dagens utbud av modeller är stort, men de modeller som kan anses användas i störst utsträckning är ARCH (Robert F. Engle, 1982) och GARCH (Tim Bollerslev, 1986).

2 Mål och Syfte

I detta arbete kommer avkastningsdata från läkemedelsbolaget AstraZeneca som ingår i OMX30, ett index från Stockholmsbörsen, att användas. Data-materialet kan hämtas från [4]. Tanken är att modellera volatilitetsklustringen för att på så vis kunna prediktera risken, en dag framåt i tiden, med hjälp av riskmättet Value at Risk (VaR). Estimeringen av VaR kommer att baseras på modellerna ARCH(p) och GARCH(1,1), där valet av GARCH(1,1) motiveras med att dess parameterbestämning kan vara krånglig, medan standardmodellen (GARCH(1,1)) huvudsakligen är tillräcklig.

2.1 Syfte

Syftet med detta kandidatarbete är att göra en jämförelse i hur väl modellerna ARCH och GARCH kan användas för att estimerar VaR. Att undersöka hurpass väl modellerna är lämpliga för vald data, samt att utreda hur resultaten skiljer sig åt.

2.2 Programvara

Programvaran som använts för analys i detta arbete är R, ett mycket använt program för statistisk analys. R är gratis och kan enkelt laddas ner från följande länk:

<https://cran.r-project.org>

Istället för att skriva vissa algoritmer självständigt har vissa färdiga paket använts, närmare bestämt *rugarch* (Alexios Ghalahos) och *fGarch* (Diethelm Wuertz and Yohan Chalabi).

3 Teoretisk bakgrund

Denna sektion har till syfte att redogöra för vilka teoretiska verktyg och formler som kommer vara användbara för arbetets analyser. Då syftet med arbetet är att jämföra VaR-estimering för volatilitetsmodellerna ARCH och GARCH kommer teori anknuten till detta behandlas här. Övrig teori som också anses vara viktig för en god analys behandlas i *Appendix*.

3.1 Avkastningsserier

Låt P_t vara det dagliga stängningspriset för en aktie vid tiden t . Den enkla bruttoavkastningen mellan period $t - 1$ och t är då definierad som

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1. \quad (1)$$

Tar man den naturliga logaritmen av den relativa avkastningen fås logavkastningen som betecknas r_t . Definitionen följer nedan:

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right). \quad (2)$$

3.2 Tidsseriermodeller

Om vi låter $\{r_t\}$ vara en tidsserie som beskriver avkastningen hos, exempelvis, en aktie, definieras avkastningen $\{r_t\}$ vid tidpunkten t som

$$\{r_t\} = \mu_t + a_t, \quad (3)$$

där μ_t är det betingade väntevärdet och a_t är feltermen med betingad varians σ_t^2 . Mer exakt är då att

$$\mu_t = E[r_t | F_{t-1}] \quad (4)$$

och

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | F_{t-1}) = E[(a_t)^2 | F_{t-1}] \quad (5)$$

(ty $E[a_t | F_{t-1}]^2 = 0$) där F_{t-1} är informationen tillgänglig i tidpunkten $t - 1$. [1].

För att analysen i detta arbete skall kunna utföras krävs det att tidsserien är svagt stationär. Om en tidsserie r_t är svagt stationär ska väntevärdet av r_t , samt kovariansen mellan r_t och r_{t-l} vara tidsirrelevanta, för något godtyckligt heltal l . Detta kan specificeras som [1] :

$$E[r_t] = \mu, \quad (6)$$

och

$$Cov(r_t, r_{t-l}) = \gamma_l, \quad (7)$$

där μ är en konstant och γ_l enbart beror av l . Ekvationerna ovan säger alltså att en svagt stationär tidsserie beter sig likartat, oberoende av vilken tidsperiod som observeras [2].

3.3 Autokorrelationsfunktion (ACF) och Partiell ACF (PACF)

Med hjälp av autokorrelationsfunktionen (ACF) för en svagt stationär tidsserie $\{r_t\}_{t=1}^T$ bestäms dess seriella korrelation. Givet att en sådan existerar bestäms autokorrelationskoefficienten mellan r_t och r_{t-l} av funktionen. Denna brukar kallas för lag- l . Ett vanligt sätt att definiera korrelationskoefficienten mellan två stokastiska variabler X och Y är

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}. \quad (8)$$

Givet Ekv.(8) och om man utnyttjar antagandet om att tidsserien är svagt stationär, dvs, $Var(r_t) = Var(r_{t-l})$ fås autokorrelationens skattning av lag- l av

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^T (r_t - \bar{r}) - (r_{t-l} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}. \quad (9)$$

För att bestämma ordningen på en $AR(p)$ -modell används i huvudsak den partiella autokorrelationsfunktionen (PACF), vilken är en funktion av dess ACF [1]. Vi tittar närmare på en definition av PACF för att bestämma ordningen p hos en $AR(p)$ -modell.

Vi låter avkastningen $\{r_t\}$ beskrivas av följande AR -modeller:

$$r_t = \phi_{0,1} + \phi_{1,1} + e_{1t}$$

⋮

$$r_t = \phi_{0,3} + \phi_{1,3} + \phi_{2,3} + \phi_{3,3} + e_{3t}$$

⋮

där $\phi_{0,j}$ är en konstant, $\phi_{i,j}$ koefficient till r_{t-i} samt $\{e_{jt}\}$ feltermen för en AR(j)-modell (Se avsnitt 3.4). Modellerna ovan är i formen av en multipel linjär regression där parametrarna, exempelvis, skattas med minstakvadratmetoden. Skattningen $\hat{\phi}_{1,1}$ kan ses som en estimering av lag-1 för PACF tillhörande r_t . Skattningen $\hat{\phi}_{1,1}$ tolkas som hur mycket r_{t-1} bidrar till nästa steg, r_t . Därav bör lag- p för en modell av ordning p ej vara lika med noll, medan skattningen $\hat{\phi}_{j,j}$ bör vara nära noll för alla $j > p$. [1].

3.4 Autoregressiva modellen (AR)

En autoregressiv modell (AR) är när man utför regression på tidigare observerade värden från samma tidsserie. Det är alltså en representation av en slumpmässig process som används i avsikt för att beskriva beroendet av den studerade variabeln och dess tidigare antagna värden. Då daglig avkastning tenderar att visa, någon, serie av autokorrelation används alltså AR-modellen till att modellera det beroendet och för att förutsäga/bestämma det betingade väntevärdet.

En AR-modell som beror på sina r föregående observationer kallas för en AR-modell av ordning r och definieras matematiskt, i enighet med [1] som,

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^j \phi_i r_{t-i} + a_t \quad (10)$$

där ϕ_0 är en konstant, $\phi_i (i = 1, \dots, j)$ koefficienter, samt a_t en serie *iid*-variabler med $\mu_a = 0$ samt homogen σ_a^2 .

3.5 ARCH-modellen

Den autoregressiva betingade heteroskedasticitetmodellen (ARCH) används vid modellering av finansiell avkastningsdata som visar tendenser till volatilitetskluster över tiden. Den betingade variansen uttrycks som en linjär funktion av de föregående kvadrerade residualerna. Den generella definitionen av ARCH-modellen av ordning p , kan skrivas som i [1]

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 \quad (11)$$

där $\{\epsilon_t\}$ är en serie *iid*-variabler med väntevärde 0 och varians lika med 1, $\alpha_0 > 0$ och $\alpha_i > 0$ för $i > 0$. Koefficienterna α_i måste också följa några regularitetsvillkor för att försäkra att den obetingade variansen för α_i är ändlig.

3.6 GARCH-modellen

Oftast behöver avkastningsdata många p för att anpassas till en ARCH-modell, och på den grunden introducerades den generaliserade ARCH-modellen, GARCH. I enighet med ARCH är även GARCH ett viktat medelvärde av föregående kvadrerade residualer. GARCH har visats sig vara en effektiv modell för att prediktera den betingade variansen och definieras som i [1]

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (12)$$

där $\{\epsilon_t\}$ är en serie oberoende och likafördelade variabler med $E[\epsilon_t] = 0$ och $Var(\epsilon_t) = 1$. Samt att $\alpha_i > 0$ och $\beta_j > 0$ och $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_j) < 1$.

3.7 Standardiserade residualer

För att utreda huruvida en modell lyckats fånga upp strukturen i data bör modellens standardiserade residualer samt dess kvadrat att studeras, då dessa ska vara en serie oberoende och likafördelade stokastiska variabler. De standardiserade residualerna definieras som

$$\tilde{a}_t = \frac{a_t}{\sigma_t}. \quad (13)$$

Föreligger det korrelation hos Ekv. (13) bör modellering av väntevärdesstrukturen revideras. Kvadraten av de standardiserade residualerna \tilde{a}_t^2 talar i sin tur om hur väl modellen fångat upp strukturen hos den kvadrerade feltermen a_t^2 . I fallet där detta inte kan ses bör också modellen revideras tills man ser att strukturen är uppfångad. Se [1].

3.8 Value at risk (VaR)

Value at risk är definierat som den maximala förlusten under en given tidsperiod med normala marknadsförhållanden, alternativt den minimala förlusten under extrema marknadsförhållanden. VaR möjliggör att uttrycka framtida vinster eller förluster hos en finansiell tillgång.

Matematiskt, givet konfidensnivån $\alpha \in (0, 1)$ fås VaR för en portfölj, eller aktie, med förlust L och konfidensnivå α av det minsta l , sådant att sannolikheten att förlusten L överskrider l inte är större än $1 - \alpha$. En generell definition av VaR är

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(L) &= \inf\{l \in \mathfrak{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{l \in \mathfrak{R} : F_L(l) \geq \alpha\} \end{aligned} \quad (14)$$

där F_L är förlustfördelningen för L . Konventionellt används värden på α som $\alpha = 0.95$ eller $\alpha = 0.99$.

Om det exempelvis är en aktie som har en daglig 1% VaR på 10.000 kronor, betyder det att aktien med en sannolikhet på 1% minskar i värde med minst 10.000 kronor över en dag. En förlust på 10.000 kronor, eller mer, på aktien förväntas alltså inträffa på 1 av 100 dagar. Detta på grund av 0.01 sannolikhet.

Vidare, i detta arbete, motsvarar förlustfördelningen fördelningen av de negativa avkastningarna. Då analysen baseras på icke-negativa avkastningar innebär det att om VaR på, exempelvis, nivån 99 % ges av 1%-kvantilen för de negativa avkastningarna ges motsvarande kvantil för de icke-negativa avkastningarna av 99%-kvantilen.

Slutligen, då arbetet fokuserar på att prediktera VaR en dag framåt i tiden, givet information från föregående dag, kan vi skriva den betingade prediktionen av VaR som

$$- \hat{VaR}_{t+1|F_t}^\alpha = \mu_{t+1} + \epsilon_\alpha \sigma_{t+1} \quad (15)$$

där F_t är information tillgänglig i tidpunkten t samt ϵ_α är α -kvantilen för de standardiserade residualerna. Se [2].

3.9 Back-testing av VaR

En metod för att utvärdera en estimeringsprocess är back-testing. Proceduren går till genom att man för varje dag jämför den estimerade risken med det faktiska utfallet, vilket resulterar i, med VaR som riksmått, ett överträdelsebaserat test som kan beskrivas som följer.

Låt intervalllet $[1, T]$ beteckna tidsintervallet för given avkastningsdata, där T är antalet observationer. Sedan delas intervallet in i delintervall, där varje delintervall utgör ett test. Delintervallet $[1, t]$ utnyttjas för att estimeras risken i tidpunkten $t + 1$, intervallet $[2, t + 1]$ för tidpunkten $t + 2$. Denna intervallindelningsstruktur följs succesivt fram till den sista uppdelningen $[T - t, t - 1]$ för att estimeras risken i tidpunkten T [2].

Att en överträdelse sker innebär, givet att vi vid tidpunkt t låter VaR_α^t vara α -kvantilen hos den betingade förlustfunktionen $F_{X_{t+1}|F_t}$, där F_t är informationen tillgänglig i tiden T , att $\{L_{t+1} > VaR_\alpha^t\}$. Vidare, om överträdelsen betecknas av indikatorvariabeln $I_{t+1} = I_{X_{t+1} > VaR_\alpha^t}$, och om förlusten L anses vara kontinuerlig, har vi att väntevärdet blir

$$E[I_{t+1} | \mathcal{F}_t] = P(L_{t+1} > VaR_\alpha^t | \mathcal{F}_t) = 1 - \alpha. \quad (16)$$

I_{t+1} är alltså en Bernoullifördelad variabel med parameter $1 - \alpha$. Och då man vid back-testing summerar alla överträdelser, som i övrigt är oberoende och likafördelade, ser vi att summan Y av dessa bildar en binomialfördelning [2] ty

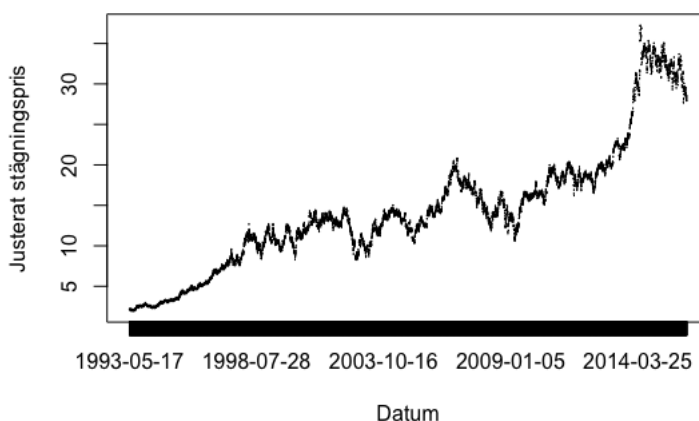
$$Y = \sum_{i=t+1}^T I_i \sim \text{Bin}(T - (t + 1), 1 - p). \quad (17)$$

Återstående efter att back-testing utförts är att jämföra om resultatet stämmer överens med det förväntade antalet överträdelser, och givet binomialfördelningen kan detta verifieras med hjälp av ett binomialtest. Se *Appendix* för en detaljerad beskrivning.

4 Genomförande

I denna sektion behandlas analys och modellering av data. Inledningsvis kommer en deskriptiv dataanalys att genomföras, för att sedan övergå till själva modelleringen.

Data som använts i detta arbete består av ett dataset över den dagliga enkla avkastningen från läkemedelsbolaget AstraZeneca över perioden 1993 – 05 – 17–2016 – 03 – 22, givande ett totalt antal av 5759 dagliga avkastningar.

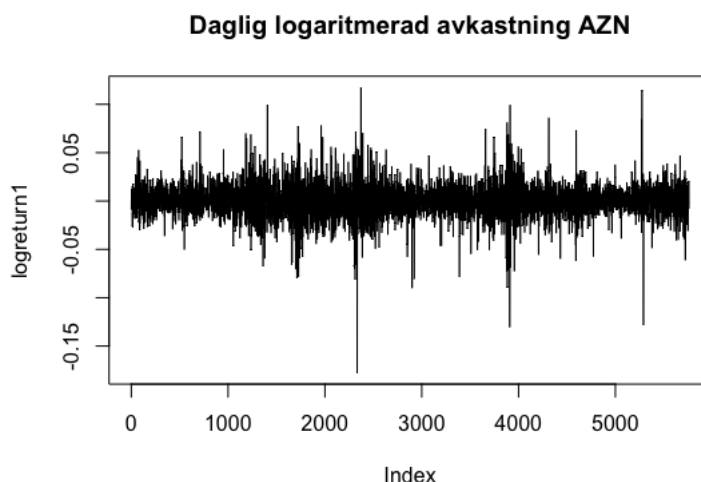


Figur 1. De justerade stängningspriserna plottade mot datum för hela tidsperioden.

4.1 Dataanalys

Innan data kan anpassas till de önskade modellerna bör vissa egenskaper hos data kontrolleras, som exempelvis volatilitetsklustring, att volatiliteten utvecklas över tiden på ett kontinuerligt sätt och att volatiliteten är stationär, d.v.s att den rör sig kring ett medelvärde som är konstant över tiden.

Ett första steg är att logaritmera den enkla dagliga avkastningen, vilket resulterar i 5759 observationer. Anledningen till detta är att tidsserien då anses vara svagt stationär [2].



Figur 2. Logaritmerad daglig enkel avkastning som beräknats enligt (2) plottad mot hela tidsperioden.

Av *Figur 2* kan vi tyda att avkastningsseriens varians inte är konstant, vilket indikerar att det förekommer heteroskedasticitet. Det går också att tyda tendenser till volatilitetsklustring, att det förekommer perioder av hög volatilitet följt av perioder med lägre. Dessutom kan det observeras att det är svårt från figuren att tyda huruvida μ_t kan antagas vara skilt från noll, eller ej, då avkastningen rör sig runt nollan över hela tidsperioden.

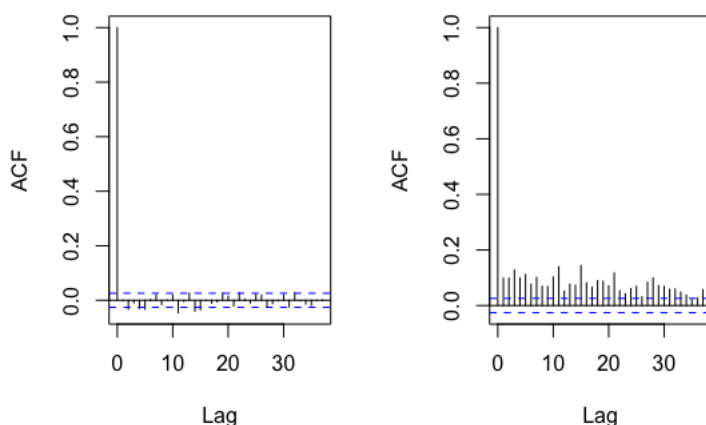
Därför, för att säkerställa huruvida μ_t är signifikant skilt från noll eller ej utförs ett t-test. För testet har vi att teststatistikan är student t-fördelad med 5658 frihetsgrader, se mer detaljer i *Appendix*. Utfallet gav följande resultat, där konvergens mot normalfördelning utnyttjats på grund av det höga antalet frihetsgrader:

$$T = 2.0118 > 1.960 = t_{0.025}(5658).$$

Vi ser alltså att vi ej kan acceptera $H_0 : \mu_t = 0$. Detta ger oss två möjligheter, att antingen acceptera H_0 ändå, på grund av att T utföll såpass nära det teoretiska värdet (p -värde för testet blev 0.04429), eller att modellera den underliggande väntevärdesstrukturen. En modellering av väntevärdesstrukturen skulle innebära att vi får anpassa, exempelvis, en AR-modell till data innan vi anpassar ARCH och GARCH. Av simplicitet kommer vi att välja det första, då en enklare modell är att föredra.

Då vi önskar att beskriva volatiliteten i Ekv. (3), skall a_t lösas ut, vilket vi gör genom att specificera ekvationen för μ_t . För det ändamålet bör det undersökas huruvida det förekommer någon form av seriell korrelation hos

avkastningsdata. Ett bra verktyg för detta är att bestämma avkastningarnas ACF för ett tillräckligt antal lags. Genom att plotta ACF tillsammans med utmålade konfidenslinjer går det att avgöra om korrelation förekommer, detta ifall 5% av staplarna befinner sig utanför konfidenslinjerna.



Figur 3. Till vänster ACF för avkastningsdatan $\{r_t\}$ och $\{r_t^2\}$ till höger. De blå streckade linjerna är 95%-iga konfidenslinjer.

Det kan med blotta ögat vara svårt att bedömma från *Figur 3* huruvida 5% av staplarna befinner sig utanför konfidenslinjerna, eller ej. Av den anledningen utförs ett kompletterande Ljung-Boxtest där teststatistikan utföll $Q(9) = 21.426$ med ett motsvarande p -värde på 0.01089, vilket talar för att vi förkastar H_0 : ingen autokorrelation, på signifikansnivån 5%. Mer om Ljung-Boxtestet i *Appendix*

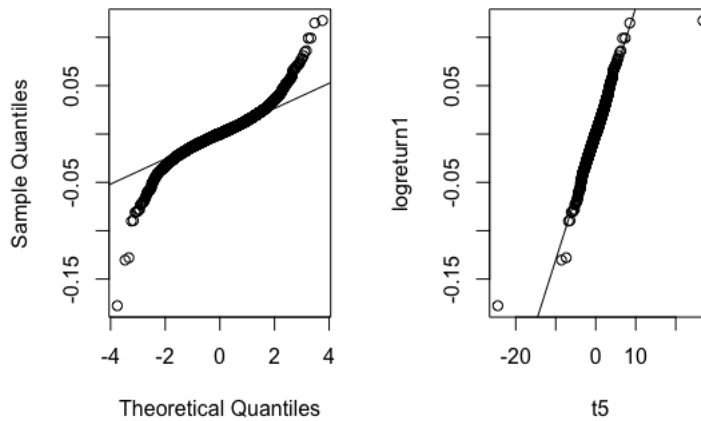
Till höger i *Figur 3* återfinns ACF för $\{r_t^2\}$, vilken kan användas för att undersöka om det förekommer betingad heteroskedasticitet, som även går under namnet ARCH-effekt [1]. Principen är den samma, går 5% av staplarna över de utmålade konfidenslinjerna förekommer betingad heteroskedasticitet. Från *Figur 3* syns det tydligt att det så gör, därav utförs inget Ljung-Boxtest.

Ett sista steg innan påbörjandet av modellering är att undersöka den underliggande fördelningen hos avkastningen, då detta måste specificeras vid parameterskattningen. Ett mycket användbart verktyg för detta är QQ-plotten. Låt X_1, \dots, X_n vara oberoende och likafördelade slumpvariabler med tillhörande observationer x_1, \dots, x_n , där n är antalet observationer. Ordningen av stickprovet är $x_{1,n} \geq \dots \geq x_{n,n}$. Punkterna i QQ-plotten är paren:

$$(F^{-1}(\frac{n-k+1}{n-1}), x_{k,n}), \quad (18)$$

där $F^{-1}(\cdot)$ är kvantiler för referensfördelningen, $x_{k,n}$ kvantiler för den empiriska fördelningen, där $k = 1, \dots, n$.

En QQ-plott jämför alltså de empiriska kvantilerna mot de teoretiska. Visar det sig att dessa stämmer överens sammanfaller de approximativt som en rät linje.



Figur 4. Det logaritmerade avkastningsdata plottad mot teoretiska kvantiler för, till vänster, normal QQ-plott och, till höger, student t-fördelning med 5 frihetsgrader.

Vi kan tyda från *Figur 4* att r_t förklaras bäst av en t-fördelning med 5 frihetsgrader, då vi ser att svansarna för avkastningen är tyngre än de för normalfördelningen. Att den underliggande fördelningen förklaras bäst av just 5 frihetsgrader konstaterades efter att jämförelse med annat antal frihetsgrader gjorts.

I praktiken är dock normalfördelningsantagande frekvent förekommande, och då fördelningen för avkastningen inte avvikit allt för mycket kommer även en jämförelse mot normalfördelningen att göras, detta då vi inte kan fastställa helt vilken den underliggande fördelningen är.

Nedan, i *Tabell 1*, följer även några korta basfakta om r_t . Skevhet och kurtosis förklaras mer genomgående i *Appendix*.

Data	Medel	Sd	Kurtosis	Skevhet
AstraZeneca (r_t)	0.000446	0.016835	6.885223	-0.1696891

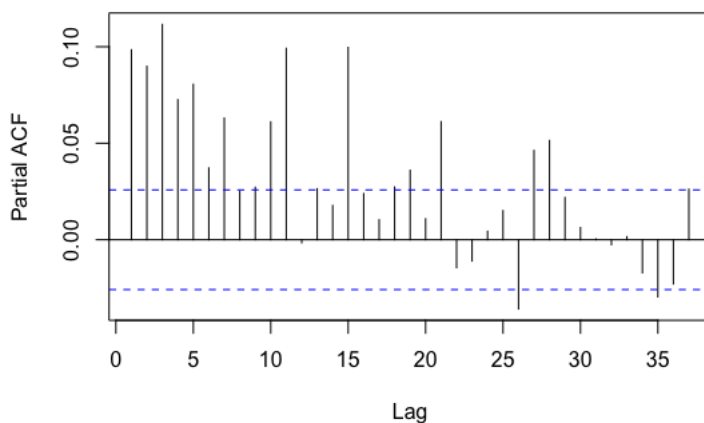
Tabell 1: Deskriptiv statistik för den logaritmerade avkastningen.

4.2 Modellanpassning

Det framgår inledningsvis av arbetet att volatiliteten hos avkastningsdata skall modelleras med ARCH(p) och GARCH(1,1). Först kommer ordningen av ARCH(p) att bestämmas med hjälp av PACF, se avsnitt 3.3. Därefter kommer parametrarna för respektive modeller att skattas med maximum likelihoodestimering (MLE), se *Appendix*.

4.2.1 ARCH

Som diskuterades i teoridelen så bestäms ordningen p hos en ARCH(p) med hjälp utav dess partiella autokorrelationsfunktion för den kvadrerade avkastningen. Den valda ordningen bör motsvara lag p , där lag p är skilt från noll. Dessutom ska lag $\geq p + 1$ vara approximativt lika med noll. Det betyder således för vår data, vilket kan tydas från *Figur 5*, att ordningen på ARCH-modellen ska vara 11, då det är det tolfte strecket som är det första strecket som tydligast är nära noll.



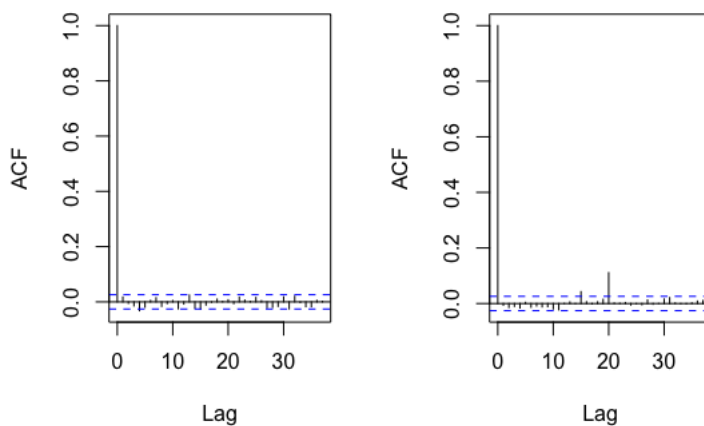
Figur 5. PACF för den kvadrerade avkastningen.

Efter att en ARCH(11) anpassats till avkastningsdata skattades dess parametrar, med hjälp av maximum likelihoodmetoden både för normal- och t-fördelningen. Det visade sig dock att modellen kunde reduceras till en ARCH(7) då resterande parametrar var insignifikanta på en 95%-ig konfidensnivå, vilket konstaterades med hjälp utav ett t-test. I *Tabell 2* visas skattningen av parametrarna som visade sig vara signifikanta. Antalet frihetsgrader, betecknat df i tabellen, skattades i R med hjälp av maximumlikelihoodmetoden.

Parameter	Normalfördelning	t-fördelning (df=5.1)
θ	0.0001	0.0001
α_1	0.0851	0.1080
α_2	0.1093	0.1302
α_3	0.1042	0.1020
α_4	0.0849	0.0700
α_5	0.1021	0.0856
α_6	0.0679	0.0657
α_7	0.0742	0.0519

Tabell 2. Parameterskattningar för ARCH(7) för normal- respektive t-fördelningsantagande. θ är interceptet.

För att utvärdera huruvida den anpassade modellen fångat upp den underliggande strukturen hos data studeras de standardiserade residualerna. Dessa ska då i sin tur vara en sekvens oberoende och likafördelade variabler. Som tidigare, i rapporten, utnyttjas ACF för att studera detta.



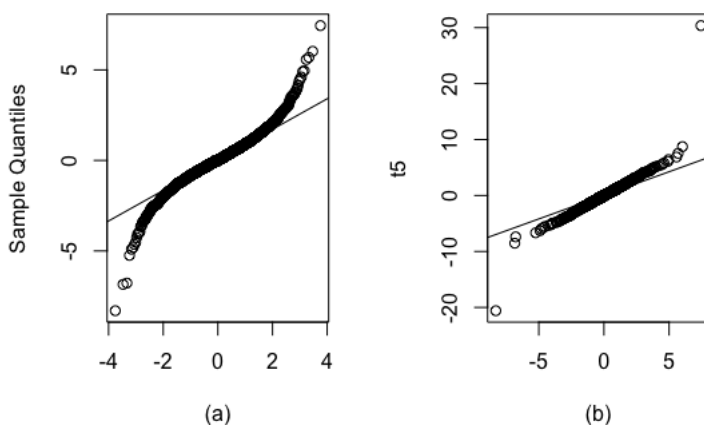
Figur 6. Till vänster, ACF för \tilde{a}_t . Till höger, ACF för \tilde{a}_t^2 . Båda plottarna är från ARCH(7)-modellen med normalfördelningsantagande.

Från *Figur 6* verkar det som modellen fångat upp strukturen i data, motsvarande figur för t-fördelningen återfinns i *Appendix*. Men för säkerhetens skull utförs, även här, ett kompletterande Ljung-Boxtest. För båda fördelningsantagandena utföll teststatistikan $Q(m)$ med följande värden

Fördelning	$Q(9)$	p -värde
Normal \tilde{a}_t	14.874	0.09446
Normal \tilde{a}_t^2	12.769	0.1733
t-förd. \tilde{a}_t	14.503	0.1055
t-förd. \tilde{a}_t^2	11.374	0.251

Tabell 3. Visar värden för Ljung-Boxstatistikan för \tilde{a}_t och \tilde{a}_t^2 från ARCH(7) med respektive p -värde för de olika fördelningsantagandena.

Av resultatet från Ljung-Boxtestet kan vi konstatera att modellen fångat upp den underliggande strukturen från avkastningsdatan. Återstående är då att studera fördelningen hos de standardiserade residualerna, vilket görs med QQ-plottar. Då vi är intresserade av att prediktera risken hos aktien är huvudfokus på hur punkterna i den nedre delen av svansen följer linjen, då ju bättre passning, desto bättre prediktion förväntas kunna göras.



Figur 7. (a) QQ-plot för \tilde{a}_t mot normalfördelningen och (b) QQ-plot för \tilde{a}_t mot t-fördelningen med 5 frihetsgrader. Båda plottarna är från ARCH(7) med normalfördelningsantagande.

Vi ser från *Figur 7* att de standardiserade residualerna följer t-fördelningen betydligt bättre än normalfördelningen. Detta resultat stämmer även bra överens med de standardiserade residualerna från ARCH(7) med t-fördelningsantagande, dess plott utlämnas därav från denna sektion och återfinns i *Appendix*.

4.2.2 GARCH

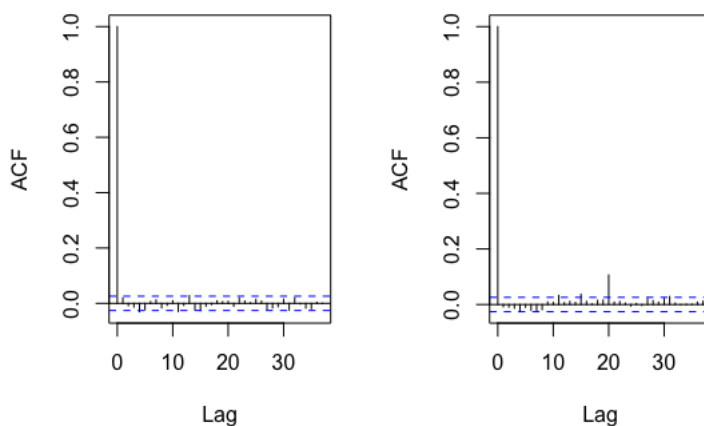
Som nämndes inledningsvis är antalet parametrar för en GARCH-modell oftast krångligt att bestämma. Därav valdes volatiliteten att modelleras med en GARCH(1,1)-modell baserat på normalfördelnings- och t-fördelningsantaganden.

Parameterskattningarna för respektive fördelningsantagande återfinns i *Tabell 4* nedan.

Fördelning	θ	α	β
Normal	0.00004	0.056484	0.92866
t-förd. (df=5.5)	0.00002	0.048288	0.94231

Tabell 4. Parameterskattningar enligt MLE för GARCH(1,1) under normal- och t-fördelningsantagande. θ är interceptet.

Ett modellkrav för GARCH(1,1) är att $\alpha + \beta < 1$, vilket vi ser är uppfyllt för båda fördelningsantagandena. Vidare återstår att analysera modellens standardiserade residualer för att se hur väl modellen fångat upp den underliggande strukturen hos avkastningsdata. Antalet frihetsgrader för t-fördelningen skattades även här med maximumlikelihood-metoden.



Figur 8. Till vänster, ACF för \tilde{a}_t . Till höger, ACF för \tilde{a}_t^2 . Båda plottarna är från GARCH(1,1)-modellen med normalfördelningsantagande.

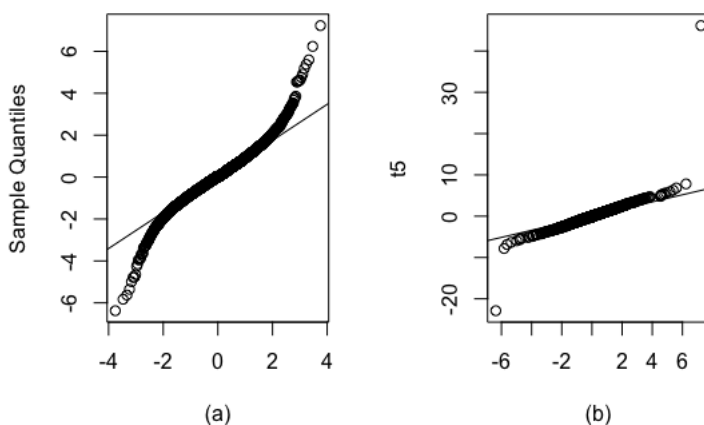
Som kan tydas från *Figur 8* syns någon överträdelse, framför allt hos \tilde{a}_t^2 . Samma slutsats kan också dras från modellen med t-fördelningsantagande, vars plott återfinns i *Appendix*. Från Ljung-Boxtestet observerades följande värden som presenteras i tabellen nedan:

Fördelning	$Q(9)$	p -värde
Normal \tilde{a}_t	13.445	0.1435
Normal \tilde{a}_t^2	18.407	0.03074
t-förd. \tilde{a}_t	12.996	0.1628
t-förd. \tilde{a}_t^2	23.02	0.006152

Tabell 5. Visar värden för Ljung-Boxstatistikan för \tilde{a}_t och \tilde{a}_t^2 från GARCH(1,1) med respektive p -värde för de olika fördelningsantagandena.

Vi observerar från *Tabell 5* att modellen inte riktigt lyckats modellera den betingade heteroskedaciteten, Detta kan resultera i att modellen inte kommer utföra bra i back-testingen senare. Vi väljer trots allt att gå vidare med modellen då, för båda fördelningsantagandena, det är huvudsakligen, för lags > 10 överträdelserna sker. Lags av lägre ordning tenderar nämligen att ha större inverkan på modellen, och är därav av större betydelse. Att μ_t inte kunde påvisas vara signifikant skilt från noll tycks inte haft någon större inverkan, detta då Ljung-Boxtesten var signifikanta för \tilde{a}_t .

Innan vi kan påbörja back-testingen ska vi först undersöka den underliggande fördelningen hos \tilde{a}_t . Vi plottar som tidigare mot både normal- och t-fördelningen i QQ-plottar.



Figur 9. (a) QQ-plot för \tilde{a}_t mot normalfördelningen och (b) QQ-plot för \tilde{a}_t mot t-fördelningen med 5.5 frihetsgrader. Båda plottarna är från GARCH(1,1) med normalfördelningsantagande.

Vi ser i *Figur 9* vad som konstaterades för ARCH(7)-modellen, nämligen att \tilde{a}_t följer t-fördelningen betydligt bättre än normalfördelningen. QQ-plotten för GARCH-modellen med t-fördelningsantagande återfinns i *Appendix*.

5 Resultat

I denna sektion kommer resultaten av analysen att presenteras, följt av en diskussion där slutsatser om hur de olika modellerna presterade.

5.1 Back-testing

För att kunna utföra back-testing delar vi in avkastningsdatan i två delar, där de 500 första observationerna kommer att utnyttjas i ett rullande fönster för att prediktera risken en dag framåt. Därefter jämförs varje prediktion med respektive utfall, de 5259 kvarvarande observationerna. I testet estimeras VaR på en 95%-ig nivå, det vill säga att sannolikheten att den faktiska förlusten inte överskrider prediktionen är 95%. Vi förväntar oss alltså att 5% av utfallen kommer överskrida prediktionen, därav kan alltså estimaten ses som ett 95%-igt ensidigt konfidensintervall.

För att avgöra huruvida resultatet av back-testing är signifikant jämförs om antalet observerade överträdelser överensstämmer med förväntade antalet överträdelser, och givet binomialfördelningen tillämpas ett binomialtest för att verifiera detta. Se *Appendix* för mer information.

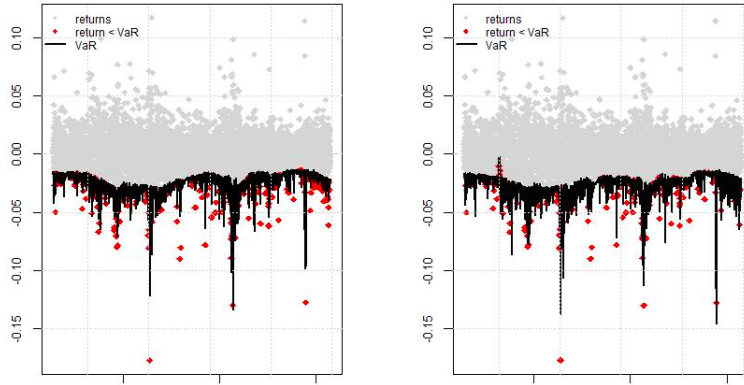
I *Tabell 6* nedan återfinns resultatet från back-testingen från samtliga modeller.

Fördelning	Modell	Förväntade övertr.	Övert.(%)	p -värde
Normal	ARCH(7)	262.9	243 (4.6%)	0.2172
t-förd.	ARCH(7)	262.9	286 (5.4%)	0.1455
Normal.	GARCH(1,1)	262.9	249 (4.7%)	0.393
t-förd.	GARCH(1,1)	262.9	275 (5.2%)	0.4476

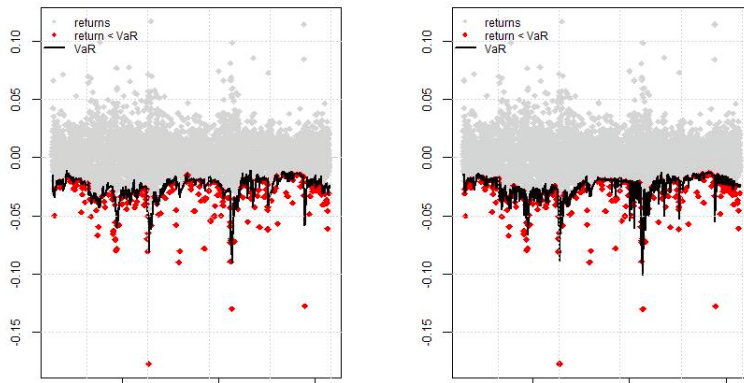
Tabell 6. Resultaten från back-testingen för samtliga modeller. p -värdena som presenteras är erhållna från binomialtestet.

De p -värden som presenteras i *Tabell 6* motsvarar hur sannolika de observerade utfallen är, givet att en överträdelse ses som ett lyckat utfall för en binomialfördelning med p -värde 0.05.

Grafiskt kan vi också se resultatet av back-testingen i figurerna nedan.



Figur 10. Visar grafiskt resultatet från back-testingen av ARCH-modellen. Till vänster, t-fördelningsantagandet och till höger, normalfördelningsantagandet.



Figur 11. Visar grafiskt resultatet från back-testingen av GARCH-modellen. Till vänster, normalfördelningsantagandet och till höger, t-fördelningsantagandet.

6 Slutsats

Även om μ_t kunde påvisas vara signifikant skillt från noll verkar inte en ytterligare modellering av väntevärdesstrukturen inte ha behövts, detta då samtliga modeller presterade bra i back-testingen.

För både avkastningsdata, samt residualerna från ARCH(7)- och GARCH(1,1)-modellerna, har vi kunnat tyda från QQ-plotarna att den underliggande fördelningen förklaras bättre av t-fördelningen än normalfördelningen. Av de erhållna p -värden från back-testingen kunde vi konstatera att samtliga modeller klarat testet, då alla p -värden var större än 0.05. Samtliga modeller estimerar alltså VaR bra, oavsett fördelningsantagande, då vi inte ser några tendenser till överestimering av risken då det procentuella antalet överträdelser ligger väldigt nära det förväntade. Dock kunde vi se att normalfördelningen för ARCH-modellen gav ett relativt bättre resultat, medan för GARCH-modellen gav t-fördelningen ett som närt bättre resultat, oavsett vad som konstanterades inledningsvis.

En potentiell förklaring till att modellerna presterat bra kan vara den studerade aktien inte verkar ha påverkats lika mycket, relativt till andra aktier, utav finanskrisen som inträffade 2008, vilket kan tydas från *Figur 1*. Ytterligare en verifieringsmetod är att simulera data från en ARCH(7)-, respektive GARCH(1,1)-modell och jämföra antalet överträdelser från dessa modeller.

Då båda modellerna presterade relativt lika kan det vara svårt att avgöra vilken modell som anses vara mest lämplig. Av simplicitetsskäl kan, i detta fall, en GARCH(1,1) anses vara mest lämpad för vald data, antingen med normal- eller t-fördelningsantagande. Detta då modellen visats prestera bra, trots överträdelserna hos ACF för det kvadrerade standardiserade residualerna. Och huvudsakligen motiveras det med att det är färre parametrar som behöver skattas och dess p -värden från back-testingen visade sig vara något mer signifikanta än de för ARCH(7).

Det skulle vara intressant att undersöka hur modellerna skulle prestera om väntevärdesstrukturen modellerats för data innan anpassningen till ARCH, respektive GARCH skedde. Då vi också kunde konstatera att GARCH-modellen inte fångade upp volatilitetsstrukturen helt, skulle en annan parameterkombination också vara av intresse.

Referenser

- [1] Tsay, R. S., Analysis of financial time series, John Wiley Sons, Inc, Tredje upplagan., 2010.
- [2] McNeil, A. J.; Frey, R.; Embrechts, P., Quantitative Risk Management, Princeton University Press, Reviderad upplaga., 2015.
- [3] Alm, S. E.; Britton, T., Stokastisk - Sannolikhetsteori och statistikteori med tillämpningar, Liber AB, Första upplagan., 2008.
- [4] <https://finance.yahoo.com>
- [5] GraphPad: *The binomial test* <http://www.graphpad.com/guides/prism/6/statistics/index.htm?stat%20binomial.htm>
- [6] F. Bijma, M.C.M. de Gunst., Syllabus for Statistical Data Analysis, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, VU University Amsterdam, version 26 January 2015.

7 Appendix

7.1 T-test

Låt $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ vara ett stickprov realiserat från en normalfördelning $N(\mu, \sigma^2)$. Viss vi vill göra inferens på μ där σ^2 är okänt utnyttjar vi t -statistikan, vars teststorhet under $H_0: \mu = \mu_0$, med alternativhypotes $H_A: \mu \neq \mu_0$ är

$$T = \frac{\bar{\mathbf{X}} - \mu_0}{S(\mathbf{X})/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad (19)$$

där $S(\mathbf{X})$ är stickprovsvariansen och n stickprovsstorleken. Statistikan är t -fördelad med $n-1$ frihetsgrader och H_0 förkastas om $|T| < t_{\alpha/2}(n-1)$, där α är konfidensnivån. [3]

7.2 Binomialtest

Vilket konstaterades i avsnitt 3.11 följer alltså antalet överträdelser en binomialfördelning, där sannolikheten, givet $Y \sim Bin(n, p)$, där n är antalet observationer och p sannolikheten för överträdelse, att k överträdelser inträffar definieras som

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (20)$$

Hypoteserna för binomialtestet kan antingen vara en- eller tvåsidiga. Fokus i denna rapport kommer dock enbart att ligga på tvåsidiga hypoteser, då riskerna varken skall under- eller överkastas. De definieras som följer:

$$H_0 : p = 1 - \alpha \quad H_A : p \neq 1 - \alpha, \quad (21)$$

där α är signifikansnivån. Vid utvärdering av binomialtesten genom rapporten kommer p -värden betraktas, där höga p -värden indikerar en bra modell, medan p -värden lägre än 0.05 respektive 0.01 svarar mot att H_0 förkastas. [5] och [6].

7.3 Ljung-Boxtest

Ljung-Box test används för att testa signifikansen av autokorrelationskoefficienten. Teststatistikan för Ljung-Box test definieras som [1]

$$Q(m) = N(N+2) \sum_{l=1}^m \frac{\hat{\rho}_l^2}{N-l}, \quad (22)$$

där N är antalet observationer, m antalet lag som testas och $\hat{\rho}_k$ autokorrelationskoefficienten vid lag m . Nollhypotesen för testet uttrycks $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$, där $Q(m)$ följer, under H_0 , en asymptotisk $\chi^2(m)$ -fördelning (m frihetsgrader).

Vilket m som används för testet bestäms oftast genom att ta den naturliga logaritmen av antalet observationer. Nollhypotesen förkastas om $Q(m) > \chi_\alpha^2(m)$, där α är signifikansnivån.

7.4 Skevhet och kurtosis

Låt x_1, \dots, x_N vara ett stickprov från X med N observationer. Då är stickprovets skevhet \hat{S} och kurtosis \hat{K} definierat som enligt [1]

$$\hat{S} = \frac{1}{(N-1)\hat{\sigma}^3} \sum_{n=1}^N (x_n - \hat{\mu})^3 \quad (23)$$

$$\hat{K} = \frac{1}{(N-1)\hat{\sigma}^4} \sum_{n=1}^N (x_n - \hat{\mu})^4 \quad (24)$$

där $\hat{\mu}$ är stickprovets väntevärde samt $\hat{\sigma}^2$ variansen. Referensmässigt säger man att skevhet för ett normalfördelat stickprov är 0 och kurtosis 3. Har ett stickprov kurtosis högre än 3 kallas detta leptokurtosis, och förklaras eventuellt bättre av en t-fördelning.

7.5 Maximum Likelihoodestimering MLE

Idén bakom denna metod är att skatta parametrarna som maximerar sannolikheten av de observerade värdena. Givet normalfördelningsantagande för ϵ_t , har en ARCH(m)-modell likelihoodfunktionen definierad som [1]

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_T | \boldsymbol{\alpha}) &= f(a_T | F_{T-1})f(a_{T-1} | F_{T-2}) \dots f(a_{m+1} | F_m)f(a_1, \dots, a_m | \boldsymbol{\alpha}) \\ &= \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \times f(a_1, \dots, a_m | \boldsymbol{\alpha}) \end{aligned} \quad (25)$$

där $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_m)'$ och $f(a_1, \dots, a_m | \boldsymbol{\alpha})$ är det sammansatta täthetsfunktionen för a_1, \dots, a_m . De sökta parametrarna är $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ och $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1} + \dots + \alpha_m a_{t-m}$. Då den exakta formen av $f(a_1, \dots, a_m | \boldsymbol{\alpha})$, oftast, är komplicerad utelämnas den. Framför allt då stickprovsstorleken är tillräckligt stor. Den resulterande likelihoodfunktionen blir således

$$f(a_{m+1}, \dots, a_T \mid \boldsymbol{\alpha}, a_1, \dots, a_m) = \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right). \quad (26)$$

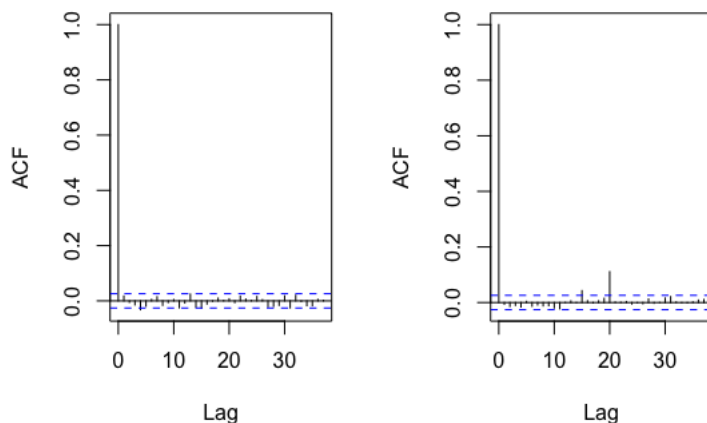
För att skatta parametrarna maximeras likelihoodfunktionen genom att utnyttja de partiella derivatorna. Då det är ekvivalent att maximera den betingade likelihoodfunktionen och dess logaritm föredras, normalt sett, det sistnämnda då den är mer hanterbar. Den betingade log-likelihoodfunktionen skrivs som

$$l(a_{m+1}, \dots, a_T \mid \boldsymbol{\alpha}, a_1, \dots, a_m) = - \sum_{t=m+1}^T \left[\frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) + \frac{1}{2} \frac{a_t^2}{\sigma_t^2} \right] \quad (27)$$

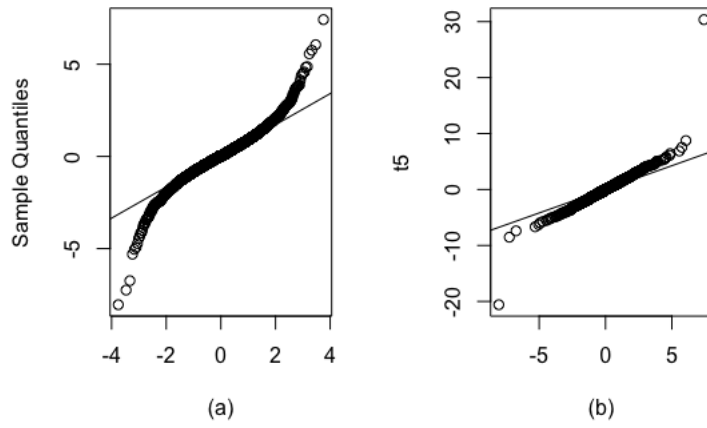
$l(a_{m+1}, \dots, a_T \mid \boldsymbol{\alpha}, a_1, \dots, a_m)$ deriveras sedan med hänsyn till $\boldsymbol{\alpha}$. De partiella derivatorna sätts därefter lika med noll, vilket leder till ett ekvationssystem som löses med hänsyn till $\boldsymbol{\alpha}$. [1]

Principen för parameterskattning hos GARCH(1,1)-modellen är densamma, då samma metod används. [1]

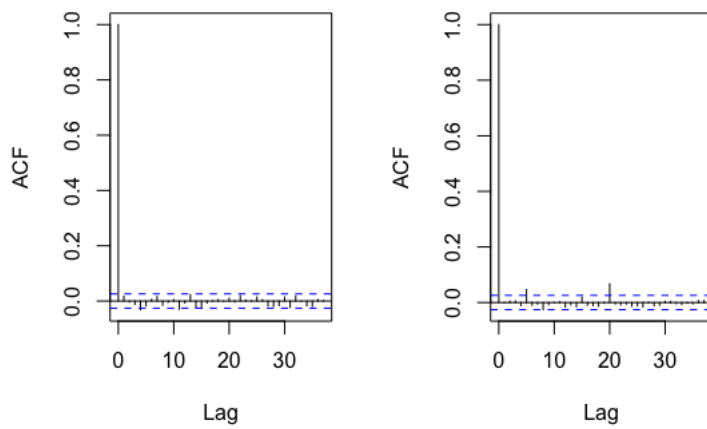
7.6 Figurer



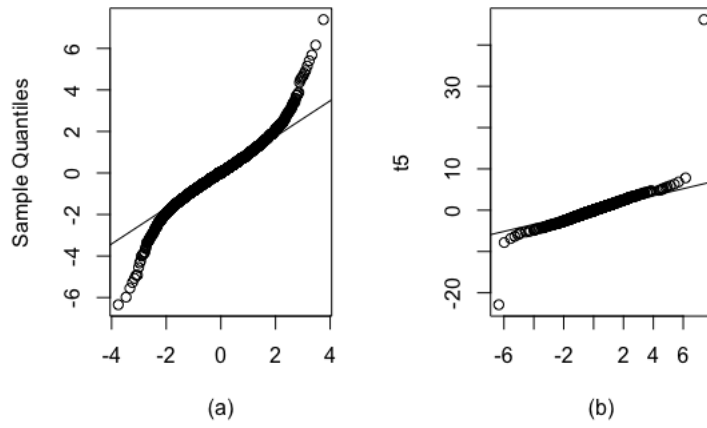
Figur A1. ACF för de standardiserade residualerna för ARCH-modellen med t-fördelningsantagande



Figur A2. QQ-plott med (vänster) normalfördelningen och (höger) t-fördelningen för de standardiserade residualerna från ARCH-modellen.



Figur A3. ACF för de standardiserade residualerna för GARCH-modellen med t-fördelningsantagande



Figur A4. QQ-plott med (vänster) normalfördelningen och (höger) t-fördelningen för de standardiserade residualerna från GARCH-modellen.