Stockholms universitet

Är den kortaste vägen alltid bäst?

Josefine Karlsson

Kandidatuppsats i matematisk statistik
Bachelor Thesis in Mathematical Statistics

Kandidatuppsats 2017:8
Matematisk statistik
Juni 2017

www.math.su.se

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm

Matematisk statistik
Stockholms universitet
Kandidatuppsats **2017:8**
http://www.math.su.se/matstat

Är den kortaste vägen alltid bäst?

Josefine Karlsson*

Juni 2017

Sammanfattning

Avstängningen av en motorväg som tidigare gick igenom Sydkoreas huvudstad Seoul och avstängningen av den 42 gatan i New York har en sak gemensamt, nämligen att de sammanlagda restiderna för de som bor i området blev kortare. Med inspiration av detta kommer vi i den här uppsatsen att titta närmare på hur ett trafiknätverks struktur samt individers ageranden påverkar trafikflödet och således även de sammanlagda restiderna. Syftet med arbetet är att försöka avgöra, beroende på hur nätverket är utformat och hur individerna agerar, vilket trafikflöde som optimerar de sammanlagda restiderna. Vi kommer att gå igenom vilka ageranden som kan tänkas förekomma bland individerna och utefter det bilda stokastiska modeller som testas för ett specifikt trafiknätverk som motsvarar Österåkers kommun. Sedan försöker vi avgöra vilket trafikflöde som är att föredra i trafiknätverket med avseende på att försöka hålla nere restiderna. Vi kommer även med inspiration av Braess paradox att titta närmare på en modifikation av Österåkers kommun och jämföra hur restiderna skiljer sig för respektive modell i tranfiknätverken. Vi kommer att inse att trafikflödet och således restiderna varierar stort beroende på hur modellen, trafiknätverket och transportavstånden är utformade.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.
E-post: josefinekarlszone@gmail.com. Handledare: Maria Deijfen & Pieter Trapman.

Innehåll

1 Introduktion **4**
1.1 Bakgrund . . . 4
1.2 Problemformulering . . . 4
1.3 Makroperspektiv . . . 4
1.4 Frågeställning . . . 4

2 Teori **5**
2.1 Grafer . . . 5
2.2 Braess paradox . . . 5

3 Nätverken **6**
3.1 Allmänt . . . 6
3.2 Österåkers kommun . . . 6
3.3 Viktning av kanterna . . . 7

4 Modellen **8**
4.1 Österåkers kommun . . . 8
4.1.1 Transportmodellen . . . 9
4.1.2 Belastningsmodellen . . . 9
4.1.3 Den irrationella modellen . . . 9
4.1.4 Den approximativa modellen . . . 10
4.2 Österåkers kommun modifierad . . . 10
4.3 Modellerna över tid . . . 11

5 Simulering **12**
5.1 Programmeringsspråk & algoritmer . . . 12
5.2 Dijkstras algoritm . . . 12
5.2.1 Algoritm beskrivning . . . 12
5.2.2 Exempel . . . 12

6 Resultat **14**
6.1 Österåkers Kommun . . . 14
6.1.1 Transportmodellen . . . 14
6.1.2 Belastningsmodellen . . . 15
6.1.3 Den irrationella modellen . . . 16
6.1.4 Den approximativa modellen . . . 17
6.2 Österåkers kommun modifierad . . . 18
6.3 Modellerna över tid . . . 20
6.3.1 Österåkers kommun . . . 20
6.3.2 Österåkers kommun modifierad . . . 23
6.4 En oväsentlig jämförelse . . . 25

7 Diskussion & Slutsatser **27**
7.1 Slutsatser . . . 27
7.1.1 Trafikflödet i Österåkers kommun . . . 27
7.1.2 Restiderna vid rationella val . . . 27
7.1.3 Restiderna vid irrationella val . . . 28
7.1.4 Modifiering av nätverket . . . 29
7.2 Återkoppling till frågeställning . . . 29
7.3 Trovärdighet . . . 30
7.4 Förbättringar . . . 30

8 Appendix **32**
8.1 Österåkers kommun . . . 32
8.2 Österåkers kommun modifierad . . . 33

1 Introduktion

1.1 Bakgrund

Den här uppsatsen är inspirerad av *Braess paradox* som illustrerar att om man förbättrar ett nätverk i den bemärkelsen att man lägger till en kant, då behöver det nödvändigtvis inte innebära att framkomligheten i nätverket förbättras. Istället kan det snarare få en motsatt effekt, dvs framkomligheten försämras [7]. Av denna anledning skulle det vara intressant att genom simuleringar testa om paradoxen gäller på ett givet nätverk. Innan man kan testa något sådant så måste dock ett nätverk konstrueras och begrepp av intresse att definieras.

1.2 Problemformulering

I den här uppsatsen skall vi med utgångspunkt från ett specifikt nätverk framförallt se närmare på hur trafikflödet samt tidsavstånden ser ut och utveklas över tid. I båda fallen blir begreppet minst kostsamma väg aktuellt, vilket innebär precis som namnet antyder, den stig från en nod till en annan med minst kostnad och detta med avseende på restiden. Vi kommer även intressera oss för hur individernas sammanlagda restider ser ut beroende på trafikflödet. Vidare kommer vi att titta närmare på hur trafikflödet förändras när vi låter individerna göra rationella respektive irrationella vägval. Syftet med att studera detta är för att redogöra kring hur restiderna förändras när trafikflödet förändras. Slutligen kommer vi att redogöra för hur trafikflödet och således även restiderna förändras i samband med att nätverket förändras. Syftet med detta är att försöka redogöra för om nätverket bör utvecklas eller ej, samt om slutsatserna skiljer sig åt beroende på vilken modell vi studerar.

1.3 Makroperspektiv

Vi kommer att betrakta trafiknätverken ur ett markoperspektiv och således skapa modeller därefter. Detta eftersom syftet med att använda sig av en makromodell är att försöka avgöra hur trafikflödet och restiderna ser ut under en given tidsperiod. En modell av ett trafiknätverk ur ett makroperspektiv är ofta baserat på ganska grova antaganden. Detta på ett sådant sätt att när man skapar en modell ur ett markroperspektiv så innehåller denna ofta delmodeller som tar hänsyn till bland annat ruttval, destinationsval, färdmedelsval samt resegenerering. Men de tar dock ofta inte hänsyn till exempelvis vilket fordon resenärerna brukar eller hur interaktionen i vägskälen ser ut. [10] & [3]

1.4 Frågeställning

I den här uppsatsen kommer vi att försöka besvara följande frågor:

- Hur ser trafikflödet i nätverken ut?
- Vilken är den kortaste respektive minst kostsamma vägen?
- Hur skiljer sig restiderna åt när individerna gör rationella respektive irrationella val?
- Bör vårt ursprungliga nätverk utvecklas?

2 Teori

2.1 Grafer

En graf G är ett par (V, E) av mängder där elementen i E är delmängder till V av storlek 2 [1]. Det betyder således att V är en mängd av noder och E är en mängd av par $\{(v_i, v_j), v_i, v_j \in V\}$ som representerar kanter mellan noderna. Vidare kallas två noder v_i, v_j i en graf G för intilliggande eller grannar om det förekommer en kant mellan dessa, dvs $(v_i, v_j) \in E$ [1] & [11]. En graf illustreras ofta genom en så kallad grannmatris, även kallad förbindelsematris. Grannmatrisen A för en graf $G = (V, E)$, där $\|V\| = n$, är en $n \cdot n$-matris vars element

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{om } v_i \text{ och } v_j \text{ är grannar} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Det betyder att $A(v_i, v_j) = 1$ indexerar att det förekommer en kant mellan nod v_i och nod v_j, samt $A(v_i, v_j) = 0$ indexerar att det inte förekommer en kant mellan nod v_i och nod v_j [11]. Två grafer G_1 och G_2 sägs vara isomorfa om de antar samma matematiska struktur [1], vilket innebär att dess grannmatriser är densamma. I en graf G kallas antalet kanter som ansluter till en given nod v för graden $\delta(v)$ [1], och en graf kallas för en multigraf om det kan förekomma mer än en kant mellan ett par av noder [11]. Vidare kan en graf G vara riktad och viktad. En riktad graf $G = (V, P)$ består av en mängd V av noder och en delmängd P av pilar där varje pil är en riktad kant från en nod v_i till en nod v_j [11]. Om en graf är dubbelriktad innebär det att om v_i och v_j är två noder i en graf och det existerar en kant från v_i till v_j, då existerar det även en kant från v_j till v_i [1]. En viktad graf G är en graf där varje kant tilldelats en vikt [1], som exempelvis kan representera en kostnad eller ett avstånd. En promenad i en graf G är en sekvens av noder $v_1, v_2, ..., v_k$ sådan att v_i och v_{i+1} ligger intill, dvs är grannar för alla $i = 1, 2, .., k - 1$ [1]. Om alla noder är disjunkta i en promenad, dvs $v_i \neq v_j$ för alla $i \neq j$, då kallas promenaden för en stig. Om vi har en stig $v_1, ..., v_{k-1}$ som är sluten kallas det för en cykel [1]. Vidare kallas en graf G för sammanhängande om det finns en stig mellan varje par av alla noder i V [1].

2.2 Braess paradox

Braess paradox upptäcktes 1968 av matematikern Dietrich Braess och illustrerar att en utvidgning av ett trafiknätverk inte nödvändigtvis behöver innebära att framkomligheten förbättras, utan det kan istället få en motsatt effekt [7]. Detta kan således vara en förklaring till att framkomligheten i vissa fall försämras när nya vägar öppnar, eller omvänt förbättras när vägar stängs av, vilket exempelvis var ett fenomenen som uppkom när en motorväg togs bort i Seoul [7] eller när man stängde av den 42 gatan i New York [5]. Att ett sådant fenomen kan uppstå verkar grunda sig i att alla individer kommer att agera rationellt och självviskt, ty individerna kommer att välja det bästa av de föreliggande alternativen, oavsett vad de andra väljer [7]. Det innebär att om man utvidgar ett trafnätverk med en väg som har en väldigt låg kostsamhet, då riskerar det rationella och sjävliska beteendet hos individerna att bidra till att denna väg blir överbelastad. Utvidgningen av trafiknätverket kan i ett sådant fall möjligvis påverka de sammanlagda restiderna negativt i den bemärkelsen att de blir längre.

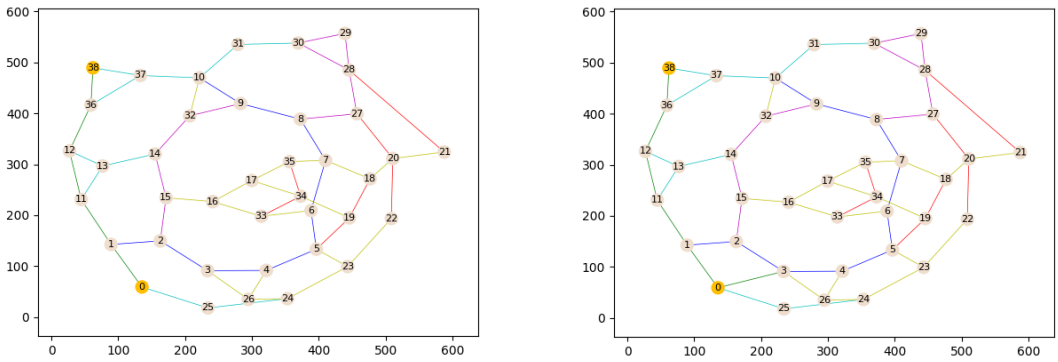
3 Nätverken

3.1 Allmänt

I den här uppsatsen är vi i allmänhet intresserade av trafiknätverk. Det innebär att en graf $G = (V, E)$ kommer att representera ett trafiknätverk, där noderna V motsvarar vägskäl och kanterna E motsvarar vägar som förbinder dessa. Eftersom vi har vår utgångspunkt ur ett makroperspektiv så kommer vi i trafiknätverket enbart att ta hänsyn till relativt stora vägar alternativt vägar som binder ihop viktiga knutpunkter. Det innebär bland annat att vi kan begränsa oss från enkelriktade gator, vilket innebär att om det existerar en kant från v_i till v_j så måste det även finnas en kant från v_j till v_i. Vidare gäller det i allmänhet för trafiknätverk att det inte är rimligt att ett vägskäl har en väg som går till sig själv, dvs för alla kanter $(v_i, v_j) \in E$ så gäller det att $i \neq j$, och att det finns en begränsad uppsättning kanter som går till varje nod, dvs graden $\delta(v)$ är begränsad.

3.2 Österåkers kommun

Med inspiration från Braess paradox så kommer vi i synnerhet att titta närmare på två specifika nätverk, nämligen ett som representerar Österåkers kommun och ett som representerar en möjlig modifikation av Österåkers kommun, se Figur 1.



(a) Österåkers kommun

(b) Modifikationen

Figur 1: Illustrerar nätverken Österåkers kommun och modifikationen av Österåkers kommun.

Österåkers Kommun är en riktad och sammanhängande multigraf, där det för varje nod v_i gäller att $\delta(v) \geq 2$, där $i = 0, 1, ..., 38$. Varje kant (v_i, v_j) har en färg som representerar dess vägtyp s och ett värde som representerar dess längd l. Vägarnas längder är uppmätta för hand i google maps och vägtypen är baserad på den maxhastighet som råder längst vägen. Vi kommer att ta hänsyn till sex stycken olika slags vägtyper, nämligen motorväg (grön) , motortrafikled (blå), landsväg (cyan), stor väg (magneta), väg (gul) och småväg (röd). Vidare motsvarar varje vägtyp ett tal $1 - 6$ och detta enligt den angivnga ordningen från ovan, dvs talet 1 motsvarar motorväg och talet 6 motsvarar småväg. I nätverken så motsvarar nod 0 (Täby) och nod 38 (Norrtälje) de så kallade nyckelnoderna, dvs individernas destinationer.

Den avgörande skillnaden mellan Österåkers kommun och det modifierade nätverket av Österåkers kommun är att vi har lagt till kanten (v_0, v_3) i det modifierade nätverket. Vi kommer senare att komma till insikt om att beslutet att lägga till just denna kant grundar sig i det höga trafikflödet i det aktuella området. Detta innebär dock att grafen för Österåkers kommun och grafen för det modifierade nätverket av Österåkers kommun inte är isomorfa. Detta ty om A_1 är grannmatrisen för grafen av Österåkers kommun och A_2 är grannmatrisen för grafen av modifikationen av Österåkers kommun så gäller det att $A_1 \neq A_2$. Vidare kommer vi i den här uppsatsen att intressera oss av *transportavståndet*, *trafikflödet* och *tidsavståndet* i nätverken, vilket vi kortfattat går igenom i följande avsnitt.

3.3 Viktning av kanterna

Vägarnas vikter kommer i utgångsläget att bestämmas från en exponentialfördelning med en parameter som beror på vägarnas längd l och vägtyp s, dvs

$$w(v_i, v_j) = exp(\lambda) \tag{1}$$

där $\lambda = f(l, s)$. Denna vikt motsvarar vad vi kommer att kalla för transportavståndet. Det innebär att transportavståndet är den tiden det tar att passera en väg utan att ta hänsyn till några yttre faktorer, så som exempelvis vägens belastning. Vidare kommer individer att bruka vägarna, och detta varierande mycket. Trafikflödet i nätverket kommer således att motsvara hur många trafikanter som brukar en väg, dvs dess belastning $b(v_i, v_j)$. Om många individer brukar en väg samtidigt kan det leda till att det uppstår köbildning. Detta påverkar tiden negativt i den bemärkelsen att det tar en längre tid att passera vägen. Baserat på detta känns det intiutivt att det tar längre tid att passera en väg om den är högt belastad, och vi bör således ta hänsyn till detta. Vi låter därför $g(b)$ vara belastningstillägget, dvs en funktion som tar hänsyn till hur stor inverkan belastningen b har på restiden. Mer konkret kan man tänka sig att tiden det tar att passera en kant beror på summan av transportavståndet $w(v_i, v_j)$ och belastningstillägget $g(b)$ enligt

$$h(v_i, v_j) = w(v_i, v_j) + g(b) \tag{2}$$

Vi kommer i fortsättningen att kalla denna tid för tidsavståndet. Sammanfattningsvis innebär det att vi med begreppet transportavståndet menar hur lång tid det tar att passera en väg utan någon belastning att ta hänsyn till och med begreppet tidsavståndet menar hur lång tid det tar att passera en väg med hänsyn till dess belastning. Om vi nu låter v_i och v_j vara två noder (vägskäl) i en graf (trafiknätverk), då kan vi kostatera att om den tid det tar att passera en väg enbart beror på transportavståndet så man kan man anta att alla kanter är dubbelriktade. Detta då det innebär att det tar lika lång tid att ta sig från v_i till v_j som från v_j till v_i i ett och samma tidssteg. Men eftersom vi även tar hänsyn till hur högt belastade vägarna är så inser vi att detta inte ett realistiskt antagande. Då det förekommer så kallade nyckelnoder så känns det rimligt att tänka sig att det generellt är ett större trafikflöde och således en större belastning i riktningen mot dessa nyckelnoder i relation till i riktningen från dessa. Det innebär att modellen måste ta hänsyn till att det förekommer olika vikter beroende på vilken nod som är ingående respektive utgående. Vi har nu gått igenom alla centrala beteckningar och en sammanfattning återges i Tabell 1.

Beteckning	**Beskrivning**
v_i	Nod/vägskäl i
(v_i, v_j)	Kant/väg från nod i till nod j
$s(v_i, v_j)$	Vägtyp mellan nod i & j
$l(v_i, v_j)$	Längd mellan nod i & j
$b(v_i, v_j)$	Belastning från nod i till nod j
$w(v_i, v_j)$	Transportavståndet från nod i till nod j
$h(v_i, v_j)$	Tidsavståndet från nod i till nod j

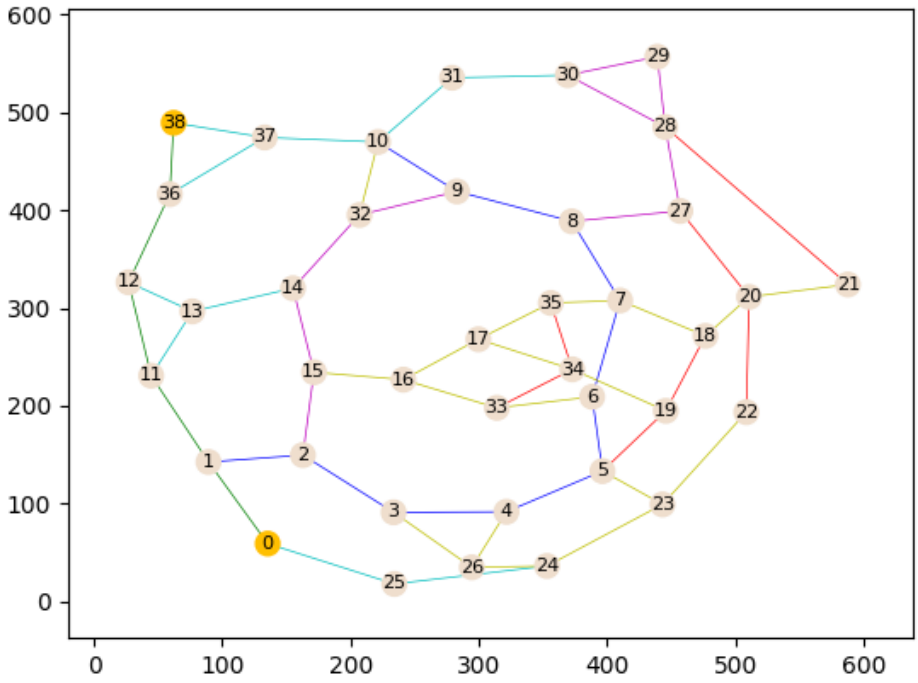
Tabell 1: Centrala beteckningar

4 Modellen

Eftersom vi är intresserade av att modellera trafiknätverk ur ett makroperspektiv så kommer våra modeller att innehålla delmodeller. En av dessa kommer att ta hänsyn till individernas ageranden och således dess ruttval. En annan kommer att ta hänsyn till individernas destinationsval. Detta på ett sådant sätt att alla individer har en given destination. Denna destination väljs slumpmässigt utifrån de två så kallade nyckelnoderna, v_0 (Täby) och v_{38} (Norrtälje), som representerar populära destinationer. Delmodellerna kommer däremot varken att ta hänsyn till färdmedelsval eller resegenerering vilket en delmodell i en makromodell vanligtvis brukar innehålla [10] & [3]. Istället har varje nod ett värde som representerar antalet boende vid respektive nod. Detta på ett sådant sätt att vi antar att det vid varje nod v_i där alla ingående (v_j, v_i) och utgående (v_i, v_j) kanter inte är av vägtypen motorväg, dvs $s(v_j, v_i) = s(v_i, v_j) \neq 1$, så är antalet boende $b_i = 10$. Omvänt så har vi antagit att det vid varje nod där minst en ingående eller utgående kant är av vägtypen motorväg så gäller det att $b_i = 0$. Baserat på våra antaganden kan vi konstatera att det bor $10 \cdot 39 - 10 \cdot 6 = 330$ individer i Österåkers kommun som är av intresse. När det gäller färdmedelsvalet så antas det att alla individer brukar en likvärdig personbil, vilket således innebär att vi exempelvis inte tar hänsyn till de individer som åker kollektivt. Vidare förväntas det av individerna i en makromodell att de är medvetna om hur exempelvis transportavståndet är bestämt före dess vägval [3]. I modellerna som förekommer är det dessutom underförstått att vi befinner oss i ett givet tidsintervall vid ett givet tidssteg t, där ett tidssteg motsvarar en given dag. Detta för att senare titta närmare på hur modellerna utvecklas över flera tidssteg.

4.1 Österåkers kommun

Vi börjar med att titta närmare på nätverket Österåkers kommun som illustreras i Figur 2, och vi kommer att redogöra för fyra stycken olika modeller som tar hänsyn till olika ageranden hos individerna. I dom två första modellerna, *transportmodellen* och *belastningsmodellen*, gör individerna rationella vägval som definieras på två olika sätt. I dom två senare modellerna, *den irrationella modellen* respektive *den approximativa modellen*, gör individerna däremot irrationella vägval som definieras på två olika sätt.



Figur 2: Österåkers kommun

Vi kunde tidigare konstatera att det är rimligt att anta att det tar olika lång tid att ta sig mellan olika vägskäl, vilket innebär att kanterna kommer att vara viktade med avseende på tid. Närmare bestämt så kommer vi anta att tiden det tar att passera en icke trafikerad väg är exponentialfördelad (enligt Ekvation 1) med en parameter λ som beror på sträckan och vägtypen enligt,

$$\lambda = f(l, s) = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{s^3} \tag{3}$$

Vi kunde tidigare konstatera att den tid det tar att ta sig mellan olika vägskäl även varierar beroende på hur tungt trafikerade vägarna är. Vi kommer att anta belastningstillägget kommer att ges enligt

$$g(b) = 0.1b \tag{4}$$

vilket innebär att för varje individ som belastar en väg läggs det till 0.1 tidsenheter. Parametern λ och belastningstillägget $g(b)$ är enbart valda på ett sådant sätt som redogörs i Ekvation 3 & Ekvation 4 för att de ska påvisa intresanta resultat.

4.1.1 Transportmodellen

Vi kommer i den här modellen utgå från det enklast förekommande agerandet, nämligen att individerna gör sina vägväl enbart baserat på transportavståndet $w(v_i, v_j)$. Det innebär att alla individer kommer att välja den minst kostsamma vägen, dvs den stig som utgör den lägsta kostnaden i form av tid, baserat på transportavståndet för att nå sin slutdestination. Vidare tänker vi oss att vid varje nod v_i bor det b_i antal individer, och vi låter dessa individer med sannolikhet $p_1 = 2/3$ ha nyckelnod v_0 (Täby) som slutdestination och med sannolikhet $1 - p_1 = 1/3$ ha nyckelnod v_{38} (Norrtälje) som sin slutdestination.

4.1.2 Belastningsmodellen

Vi kommer i den här modellen att tänka oss att vi befinner oss i tidssteget $t = 1$ och att individerna gör sina vägval baserat på transportavståndet samt hur belastningen såg ut vid det föregåendet tidssteget, dvs $t = 0$. Vi vill därför modifiera modellen på ett sådant sätt att individerna både tar hänsyn till transportavståndet $w(v_i, v_j)$ och belastningstillägget $g(b)$ hos alla kanter $(v_i, v_j) \in E$. Det innebär att alla individer kommer att välja den minst kostsamma vägen baserat på tidsavståndet $h(v_i, v_j)$ från föregående tidssteg för att nå sin slutdestination. Vidare kommer vi fortfarande låta individerna med sannolikhet $p_1 = 2/3$ ha nyckelnod v_0 som slutdestination och med sannolikhet $1 - p_1 = 1/3$ ha nyckelnod v_{38} som sin slutdestination.

4.1.3 Den irrationella modellen

I de tidigare modellerna gör individerna sitt vägval enbart baserat på bland annat vägarnas längd, vägtyp och belastning. Detta är givetvis en grov generalisering av verkligheten. Man kan tänka sig att det förekommer en hel del andra faktorer som har inverkan på en individs vägval, exempelvis lokalkännedom eller bekvämlighetsskäl. Av denna anledning så kommer vi nu att bygga vidare på belastningsmodellen så att individerna gör sina vägval något mer irrationellt. Detta på ett sådant sätt att vi nu antar att varje individ med sannolikhet $p_2 = 1/2$ kommer att välja den minst kostsamma vägen till sin slutdestination och med sannolikhet $1 - p_2 = 1/2$ den näst minst kostsamma vägen och detta med avseende på tidsavståndet $h(v_i, v_j)$ från föregående tidssteg. En sådan modifikation skulle möjligtvis vara en bättre representation av verkligheten eftersom det inte är givet att individer gör rationella val. Syftet med att definiera begreppet den näst minst kostsamma vägen är således att individerna ska sprida ut sig mer i nätverket då det inte är uppenbart att alla individer tar den snabbaste vägen för att nå sin slutdestination.

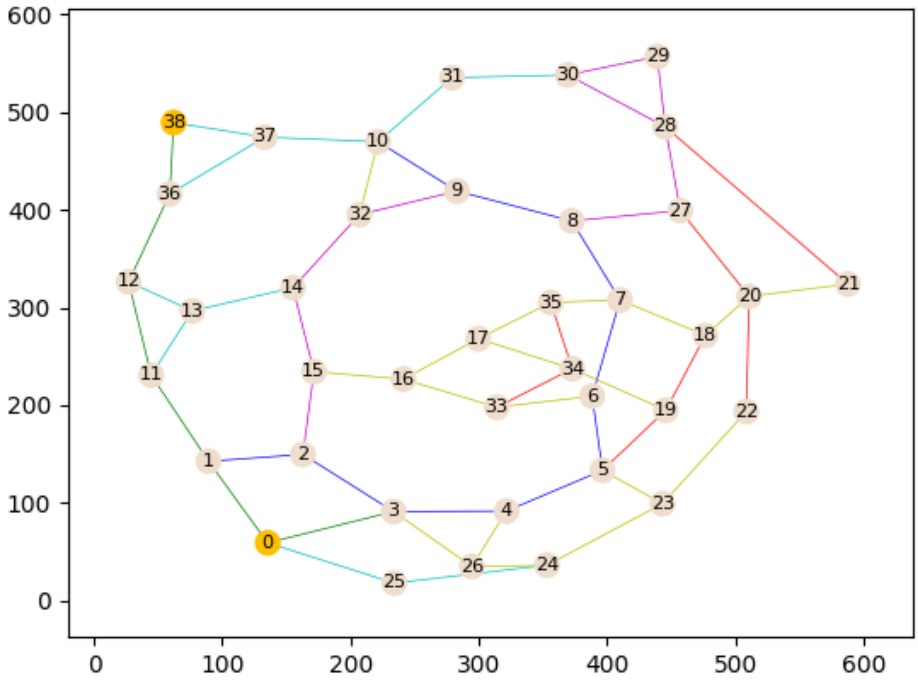
Vidare är definitionen av den näst minst kostsamma vägen är något lös. Av praktiska skäl så kommer vi till att börja med att definiera den näst minst kostsamma vägen enligt följande. Låt v_{start} vara vår startnod, och låt $(v_{start}, v_{start+1})$ vara den kant som går från startnoden till den intilliggande nod som besökts först i den minst kostsamma vägen. I valet om den näst minst kostsamma vägen kan inte denna kant besökas. Denna definition är praktisk av flera anledningar, men framförallt för att givet vårt nätverk Österåkers kommun så kommer det alltid gå att hitta en näst minst kostsam väg. Detta eftersom varje nod har minst två intilliggande noder ty $\delta(v) \geq 2$.

4.1.4 Den approximativa modellen

Som vi var inne på i föregående modell är definitionen av den näst minst kostsamma vägen något lös. Vi kommer därför i den här modellen att titta närmare på när individer gör irrationella val, fast med en annan definition av den näst minst kostsamma vägen. Låt v_{start} vara vår startnod och v_{slut} vara vår slutnod samt $v_{start} \to v_{start+1} \to ... \to v_{slut-1} \to v_{slut}$ vara den stig som utgör den minst kostsamma vägen där emellan. Då får ingen av kanterna i denna stig besökas i den näst minst kostsamma vägen. Den här modellen har dock en brist som man bör vara medveten om, nämligen att den näst minst kostsamma vägen inte alltid kommer att existera. Vi kommer i dessa fall låta individerna välja den minst kostsamma vägen. Med detta medföljer det att varje individ att med sannolikhet $p_2 \approx 1/2$ väljer den minst kostsamma vägen till sin slutdestination och med sannolikhet $1 - p_2 \approx 1/2$ den näst minst kostsamma vägen, ty den näst minst kostsamma vägen inte alltid existerar och därav även namnet den approximativa modellen. I avsnittet *Förbättringar* diskuteras det mer kring definitionen av den näst minst kostsamma vägen. Man ska dock inte glömma bort att hela syftet med att införa begreppet är att individerna skall sprida ut sig mer i nätverket. Det innebär att så länge syftet går fram är det egentligen inte så viktigt hur begreppet definieras.

4.2 Österåkers kommun modifierad

Vi skall nu med inspiration av Braess paradox lägga till en väg i nätverket Österåkers kommun, närmare bestämt vägen (v_0, v_3) och skapa det modifierade nätverket av Österåkers kommun som illustreras i Figur 3. Detta är inte någon godtycklig modifikation, utan snarare tvärt om ett väldigt strategiskt beslut. Det kommer nämligen att visa sig att trafikflödet i det aktuella området kommer att vara väldigt högt, men låt oss återkomma till detta senare.



Figur 3: Österåkers kommun modifierad

Vägen (v_0, v_3) har vägtypen $s = 1$ och i sammanhanget en väldigt kort längd l. Syftet med att titta närmare på detta nätverk är således att avgöra om vi befinner oss i en situation som beskrivs i Braess paradox. Detta för respektive modell i Österåkers kommun.

4.3 Modellerna över tid

Än så länge har vi berört vilka parametrar en individ tar hänsyn till i sitt vägval. Det har även varit underförstått att dessa val har skett vid ett givet tidssteg [1]. Vi kommer nu att utveckla modellen på ett sådant sätt att dessa val görs över flera tidssteg [2]. Detta för att försöka reda ut om resultaten även är giltiga i ett långsiktigt perspektiv. Vi låter tiden vara diskret, där varje tidssteg $t = 0, 1, 2, ..$ representerar en dag vid ett fixt tidsintervall så att alla individer gör sina vägval vid ungefär samma tidpunkt och belastar vägarna ungefär samtidigt. Det innebär att i transportmodellen gör individerna sitt vägval baserat på transportavståndet i alla tidssteg $t = 0, 1, 2, ..., m$. Däremot gäller det för belastningsmodellen, den irrationella modellen och den approximativa modellen att varje individ i basfallet $t = 0$ gör sitt vägval baserat på transportavståndet. Sedan gör individerna för tidssteg $t = 1, 2, ..$ sitt vägval baserat på tidsavståndet från föregående tidssteg $t - 1$. Av denna anledning börjar tidräkningen för dessa vid $t = 1$.

[1] För transportmodellen vid tidssteget $t = 0$ och för resterande modeller vid $t = 1$.

[2] För transportmodellen över tidsstegen $t = 0, 1, 2, ...$ och för resterande modeller över tidsstegen $t = 1, 2, 3, ...$

5 Simulering

5.1 Programmeringsspråk & algoritmer

I den här uppsatsen har vi gjort simuleringarna i programmeringsspråket python som är ett interpreterande språk [3] som är dynamiskt typat [4]. Python är även ett multiparadigm [5] programmeringsspråk då det har stöd för imperativ-, objektorienterad- och funktionell programmering [9] & [8]. Algoritmer för optimeringsproblem är ofta strukturerade på ett sådant sätt att vid varje steg görs ett eller flera val, och dessa algoritmer kan antingen anta en dynamisk eller girig struktur. Dynamisk programmering innebär att man delar upp ett problem i en rad små delproblem, löser dessa var för sig och sedan lagrar resultaten. Detta för att sedan med hjälp av dessa lösningar bygga uppåt och skapa mer omfattande delproblem för att sedan lösa dessa med hjälp av de lagrade resultaten. En girig algoritm gör alltid det val som är bäst i studen, alltså det som ur ett lokalt perspektiv är optimalt. Detta gör den steg för steg tills hela problemet är löst.

5.2 Dijkstras algoritm

En algoritm som är central i den här uppsatsen är *Dijkstras algoritm* som är påkommen av den nederländka datavetaren Edsger Dijkstra (1930 – 2002) [4]. Dijkstras algoritm används för att hitta den minst kostsamma vägen i en sammanhängande, viktad och riktad graf $G = (V, E)$, där alla kanters vikter är icke negativa, dvs $w(v_1, v_j) \geq 0$ för varje kant $(v_i, v_j) \in E$. [2]. Dijkstras algoritm betraktas som en girig algoritm. Dock är detta inte uppenbart då den även innehåller inslag som kan tolkas som dynamisk programmering [2] & [4].

5.2.1 Algoritm beskrivning

För att kunna beskriva algoritmen skall vi först redogöra för några beteckningar som är centrala i sammanhanget. Låt V vara mängden av noder och $w(v_i, v_j)$ vara vikten hos kanten (v_i, v_j). Låt vidare $u(v_i, v_j)$ vara den stig som utgör den minst kostsamma vägen från v_i till v_j och $d_i(j)$ vara kostnaden hos den minst kostsamma vägen till nod v_j med utgångspunkt i nod v_i. Vidare låter vi $p(j)$ vara den föregående noden till nod v_j vid den minst kostsamma vägen.

Låt oss nu beskriva hur man bestämmer den minst kostsamma vägen med utgångspunkt ur vår startnod v_{start} till alla andra noder. Låt mängden $T = V - v_{start}$ motsvara möjliga noder och sätt värdet av den minst kostsamma vägen för alla noder $v_i \in T$ till $d_{start}(i) = \infty$. Sätt vidare värdet av den minst kostsamma vägen för vår startnod v_{start} till 0, dvs $d_{start}(start) = 0$, då denna nod betraktas som besökt. Så länge mängden T är skild från den tomma mängden, dvs $T \neq \emptyset$ utför följande:

- Sätt v_y till den av noderna $v_i \in T$ som har värdet av den minst kostsamma vägen med utgångspunkt ur vår startnod v_{start}, dvs den nod v_i med minst värde $d_{start}(i)$.
- Ta bort v_y ur mängden av möjliga noder T, dvs $T = T - v_y$ då även denna nod nu betraktas som besökt.
- Undersök för alla $v_i \in T$ som är grannar till v_y om $d_{start}(y) + w(v_y, v_i) < d_{start}(i)$.
- Om sådant är fallet sätt $d_{start}(i) = d_{start}(y) + w(v_y, v_i)$ och $p(i) = y$.

När $T = \emptyset$ innebär det att vi har besökt alla noder $v_i \in V$ och således funnit den minst kostsamma vägen från v_{start} till alla andra noder [6].

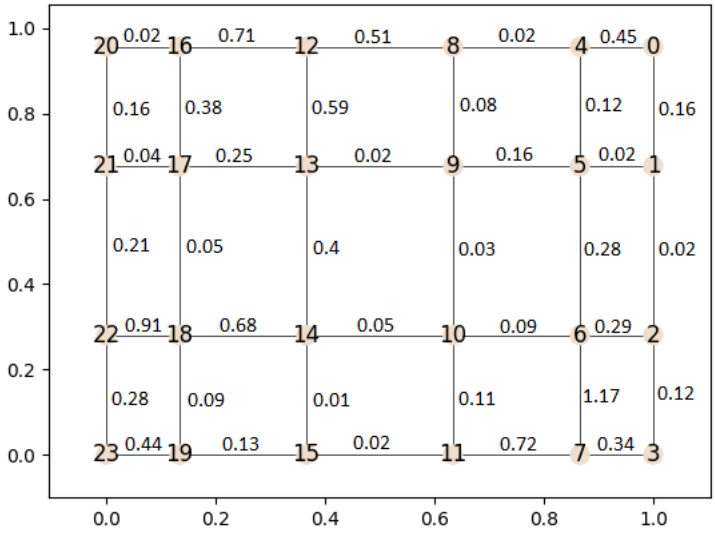
5.2.2 Exempel

Låt oss titta närmare på hur man bestämmer den minst kostsamma vägen mellan $v_{start} = v_{20}$ och $v_{slut} = v_0$ baserat på vikterna som illustreras i Figur 4.

[3] Innebär att programmet steg för steg läses in, översätts och exekveras.

[4] Innebär att variablernas typ inte behöver anges när man skapar dem.

[5] En teori kring hur program bör organiseras eller struktureras, dvs språken är utformade för att stödja ett eller flera paradigm.



Figur 4: Ett exempel på hur Dijkstras algoritm kan appliceras, där $v_{start} = 20$ och $v_{slut} = 0$.

Baserat på kanternas vikter börjar vi med att finna den minst kostsamma vägen från $v_{start} = 20$ till alla andra noder $v_1, v_2, ..., v_{23}$. Detta illustreras i Tabell 2. Det är nu enkelt att få fram den minst kostsamma vägen. Detta gör vi genom att avläsa, med utgångspunkt från $v_{slut} = 0$, steg för steg vilken nod som är den föregående noden. Vi finner att den stig som ger den minst kostsamma vägen $u(v_{20}, v_0)$ utgörs av

$$20 \to 21 \to 17 \to 13 \to 9 \to 5 \to 1 \to 0$$

Detta till en kostnad av $d_{20}(0) = 0.81$ tidsenheter, vilket även avläses i Tabell 2.

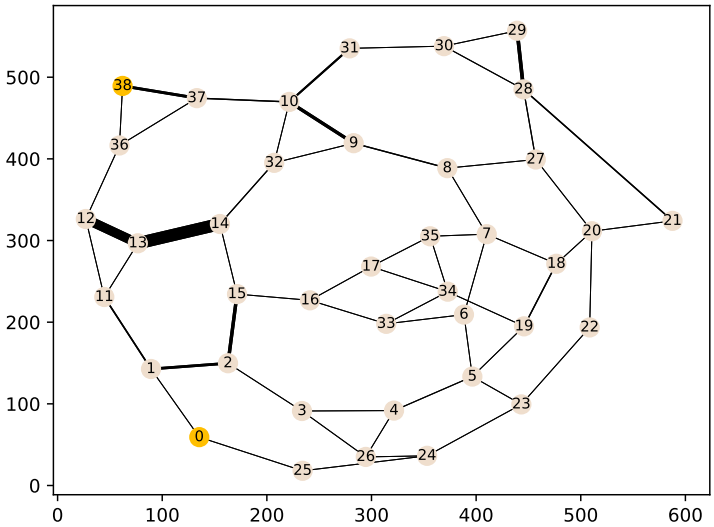
v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$d_{20}(i)$	0.81	0.65	0.67	0.79	0.57	0.63	0.59	1.13	0.55	0.47	0.5	0.49
$p(i)$	1	5	1	2	8	9	10	3	9	13	9	15
v_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$d_{20}(i)$	0.73	0.45	0.48	0.47	0.02	0.2	0.25	0.34	0	0.16	0.37	0.65
$p(i)$	16	17	15	19	20	21	17	18	-	20	21	22

Tabell 2: Ilustrerrar hur den minst kostsamma vägen bestäms med utgångspunkt från v_{20}.

6 Resultat

6.1 Österåkers Kommun

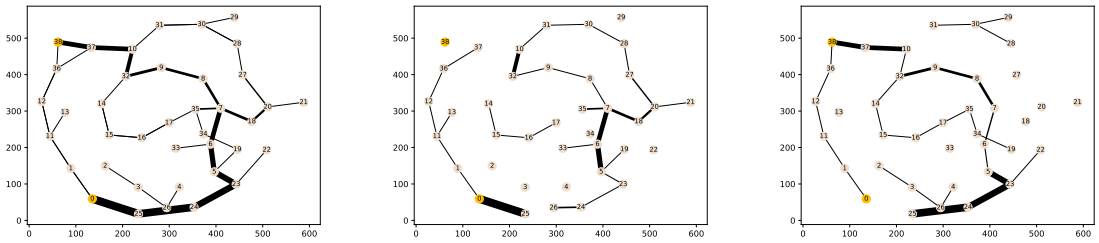
För nätverket Österåkers kommun så redogörs det enbart för en simulering per modell, även om det givetvis har gjorts flertalet. Vi börjar med att konstatera att i Figur 5 så illustreras alla vägars transportavstånd $w(v_i, v_j)$. Detta på ett sådant sätt att en väg som har ett långt transportavstånd representeras av en grov linje och vice versa. Dessa är givetvis densamma för alla modeller i Österåkers kommun.



Figur 5: Transportavstånd för Österåkers kommun.

6.1.1 Transportmodellen

I Figur 6 redogörs resultatet av trafikflödet för simuleringen av transportmodellen. I figuren framkommer det även i vilken riktning trafikflödet förekommer, dvs i minskande respektive ökande riktning. Det innebär exempelvis att vägen (v_0, v_1) representerar en ökande riktning och vägen (v_1, v_0) representerar en minskande riktning.



(a) Kanternas belastning i båda riktningarna.

(b) Kanternas belastning i minskande riktning.

(c) Kanternas belastning i ökande riktning.

Figur 6: Figur 6a är summan av belastningen i Figur 6b och Figur 6c. I Figur 6b representeras belastningen från avtagande rikting och i Figur 6c representeras belastningen i växande riktning.

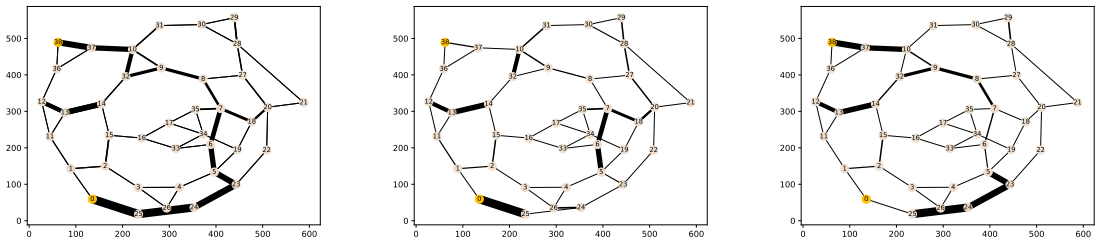
Vi kan direkt konstatera att baserat på vägarnas transportavstånd $w(v_i, v_j)$ [6] så förekommer det ett relativt tydligt möster över trafikflödet, nämligen att somliga vägar generellt är mer populära än andra ty de är högt belastade. Vilka vägar som är högt belastade är egentligen inte så intressant, eftersom det

[6] som illustrerades i Figur 5 och bestäms ifrån Ekvation 1 med en parameter λ enligt Ekvation 3

är något som varierar mellan simuleringarna. Däremot är det noterbart att vi har en blixtlåseffekt, dvs många individer ansluter till och brukar således samma vägar, vilket innebär att flödet är fixerat till somliga vägar och mer utspritt över andra. Resultatet tyder även på att det finns några relativt tydliga stigar för respektive slutdestination som har det kortaste transportavståndet för de flesta individer. Detta är gemensamt relativt andra simuleringar, även om vilka vägar som är mer populära än andra kan variera.

6.1.2 Belastningsmodellen

Resultatet för belastningsmodellen redogörs för tidsavstånden i Figur 7 & för trafikflödet i Figur 8. I figurerna framkommer det även i vilken riktning tidsavstånden och trafikflödet förekommer, dvs i minskande respektive ökande riktning. Vi kan direkt konstatera att baserat på vägarnas tidsavstånd $h(v_i, v_j)$ [7] så finns det ett relativt tydligt möster över trafikflödet hos vägarna, nämligen att somliga vägar återigen är mer populära än andra. Dessa skiljer sig dock i från de som var populära i transportmodellen och således vid föregående tidssteget $t = 0$.

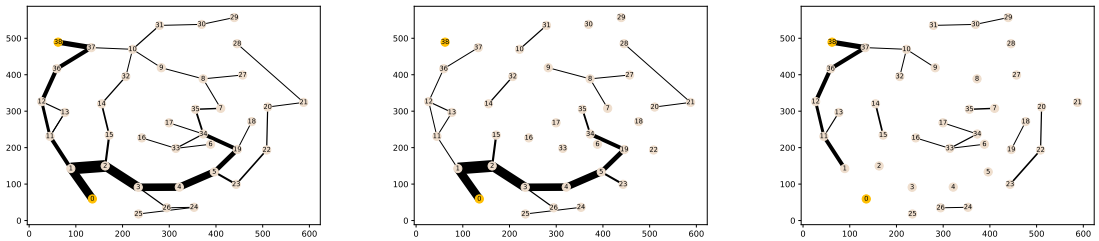


(a) Vägarnas tidsavstånd i båda riktningarna.

(b) Vägarnas tidsavstånd i minskande riktning.

(c) Vägarnas tidsavstånd i ökande riktning.

Figur 7: Figur 7a är summan av tidsavstånden i Figur 7b och Figur 7c. I Figur 7b representeras tidsavstånden i en avtagande rikting och i Figur 7c representeras tidsavstånden i en växande riktning.



(a) Vägarnas belastning i båda riktningarna.

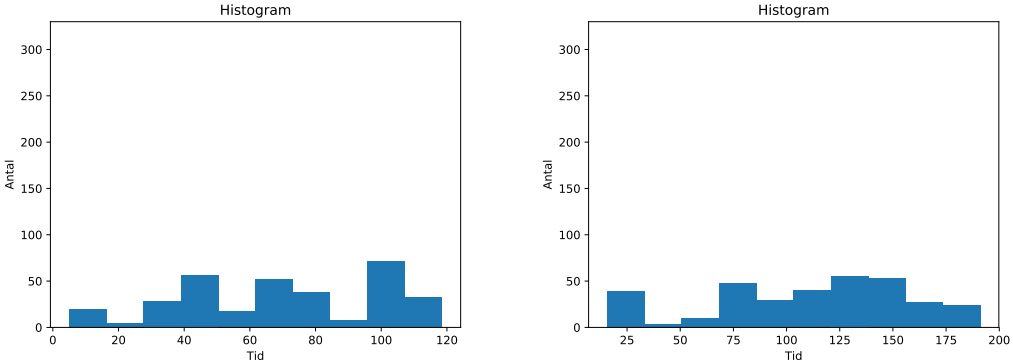
(b) Vägarnas belastning i minskande riktning.

(c) Vägarnas belastning i ökande riktning.

Figur 8: Figur 8a är summan av belastningen i Figur 8b och Figur 8c som är baserade på tidsavstånden från föregående. I Figur 8b representeras belastningen i en avtagande rikting och i Figur 8c representeras belastningen i en växande riktning.

Vi kan således konstatera att den aktuella belastningen är låg på de vägar som vid föregående tidssteg hade en hög belastning och att den aktuella belastningen är hög på de vägar med ett lågt tidsavstånd baserat från föregående tidssteg. Det innebär att individerna väljer bort den stig med det minst kostsamma transportavståndet till förmån för den stig med det minst kostsamma tidsavståndet. Det känns rimligt att indviderna tar en längre väg om denna ändå går snabbare om detta är möjligt. Problematiken är dock att det inte går snabbare för individerna eftersom alla individer gör samma rationella och själviska val. Vi ser detta i Figur 9, nämligen att individerna generellt har fått betydligt längre restider i relation till föregående tidssteg.

[7] som bestäms enligt Ekvation 2 med belastningstillägget $g(b)$ enligt Ekvation 4



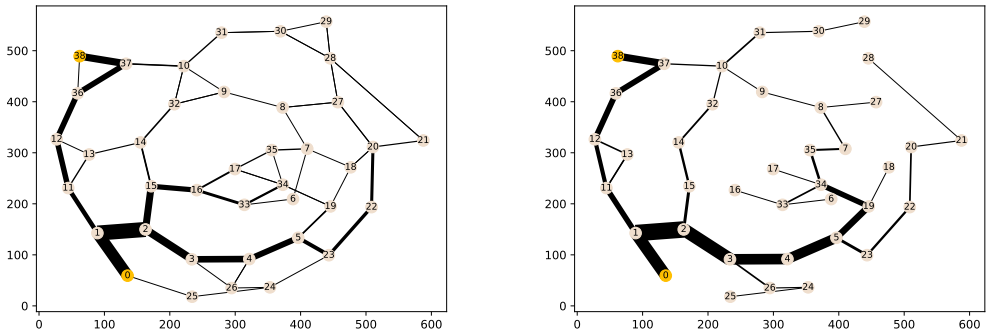
(a) Föregående restider

(b) Aktuella restider

Figur 9: Restider för transportmodellen ($t = 0$) respektive belastningsmodellen ($t = 1$).

6.1.3 Den irrationella modellen

Vi påminner oss om att den irrationella modellen är en påbyggnad av belastningsmodellen i den bemärkelsen att det inte längre är givet att individerna gör rationella val. Dock utgår de fortfarande från samma transportavstånd. Resultatet för trafikflödet i den irrationella modellen redogörs i Figur 10a, vilket tåls att jämföra med trafikflödet från belastningsmodellen som redogörs i Figur 10b.



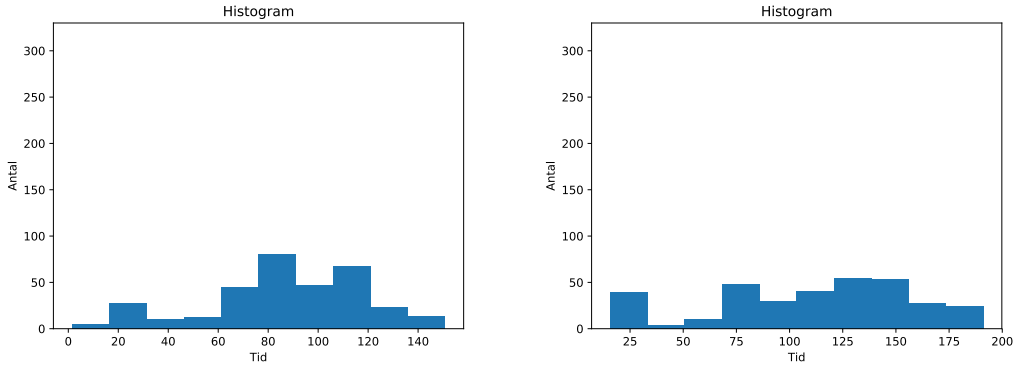
(a) Den irrationella modellen

(b) Belastningsmodellen

Figur 10: Belastningen för belastningsmodellen och den irrationella modellen.

Utifrån detta kan vi konstatera att det förekommer ytterst små skillnader mellan belastningarna från de två olika modellerna. Vi kan vidare indentifiera att det förekommer två olika typer av individer som väljer den näst minst kostsamma vägen till sin slutdestination. För den första typen är skillnaden mellan stigen som utgör den minst kostsamma vägen och den näst minst kostsamma vägen små. Ofta kan de bara ta en kort omväg för att komma in på näst intill samma stig som utgör den minst kostsamma vägen. Det som karaktäriserar dessa individer är att det i huvudsak förekommer en stig som är mycket mindre kostsam i relation till de andra eller att det finns många val kvar att göra. En annan gemensam nämnare är att de ofta kan göra många vägval i de inledande stegen. För den andra typen är det däremot en stor skillnad mellan den stig som utgör den minst kostsamma vägen och den näst minst kostsamma vägen. Det kan bero på flera olika saker. Dels kan det förekomma små tidsskillnader mellan helt skilda stigar, vilket gör att vägvalet inte spelar så stor roll. Men det kan även vara så att individen kanske bara kan göra ett fåtal val i det första steget och att det valet har en stor inverkan på den fortsatta kostnaden av färden. Ofta återstår det även enbart ett fåtal val i de kvarvarande stegen vilket gör att det inte lönar sig att hitta en väg som återansluter till den minst kostsamma vägen. Resultatet påvisar hur som helst att båda typerna av individer är verksamma i nätverket. Det som talar för den första typen av individer är att vissa vägar fortfarande är mer populära än andra, och dessa är uppenbart jämförbara mellan modellerna. Däremot är det även tydligt att trafikflödet är mer utspridd i nätverket för den irrationella modellen, vilket talar för den andra typen av individer. Låt oss vidare

titta närmare på skillnaderna mellan restiderna som illustreras i Figur 11.



(a) Irrationella modellen

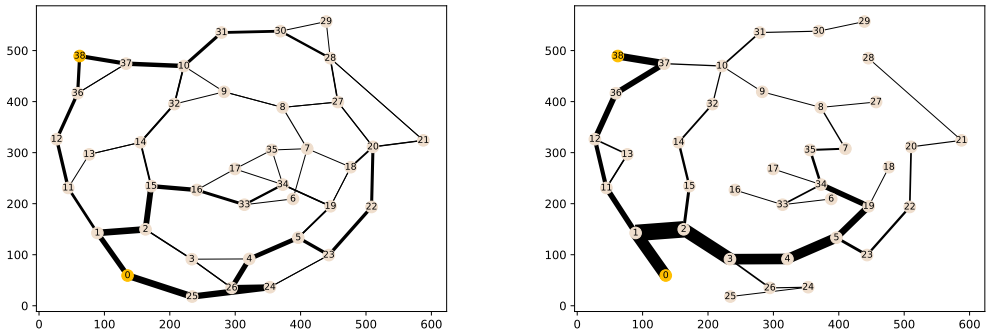
(b) Belastningsmodellen

Figur 11: Aktuella restider för belastningsmodellen och den irrationella modellen.

Här kan vi se att skillnaden blir mer märkbar. I belastningsmodellen är restiderna mer utspridda över intervallet i relation till den irrationella modellen. Det innebär att individerna i större utsräckning har olika restider i belastningsmodellen, medans restiderna är mer jämna i den irrationella modellen. Vi kan således konstatera att en del individer har fått en kortare restid och detta utan bekostnad av att andra har fått en längre restid.

6.1.4 Den approximativa modellen

Resultatet för trafikflödet i den approximativa modellen redogörs i Figur 12a, vilket även denna tåls att jämföras med trafikflödet från belastningsmodellen som redogörs i Figur 12b.

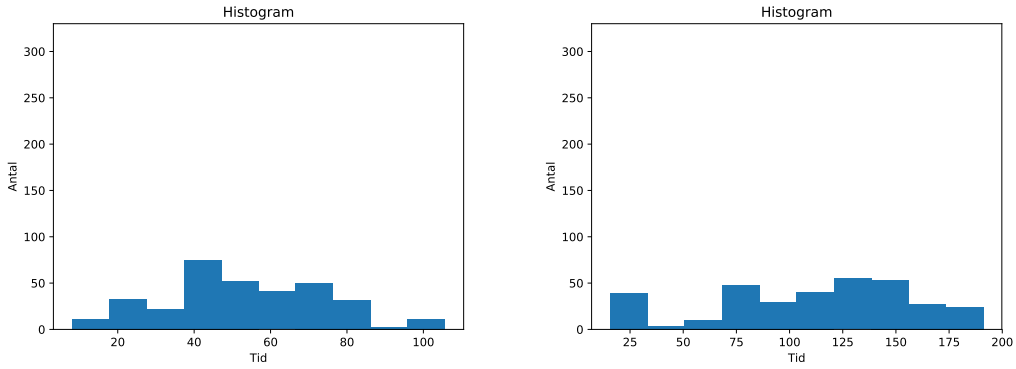


(a) Approximativa modellen

(b) Belastningsmodellen

Figur 12: Belastningen för belastningsmodellen och den approximativa modellen.

Utifrån detta kan vi nu konstatera en stor skillnad i relation till de föregående modellerna. Trafikflödet är nu mer utspritt över hela nätverket, vilket resulterar i att det är lite mer otydligt vilka vägar som är mer populära än andra. Noterbart är även att individer som väljer den stig som motsvarar den näst minst kostsamma vägen och är av den så kallade första typen, dvs då skillnaden mellan den stig som utgör den minst kostsamma respektive näst minst kostsamma vägen är små, inte kan förekomma i denna modell. Däremot bör alla individer som väljer den stig som motsvarar den näst minst kostsamma vägen vara individer av den så kallade andra typen, dvs för individer där skillnaderna mellan den stig som utgör den minst kostsamma respektive den näst minst kostsamma vägen är stor, vilket även resultatet indikerar på. Låt oss vidare titta närmare på skillnaderna mellan restiderna som illustreras i Figur 13.



(a) Approximativa modellen

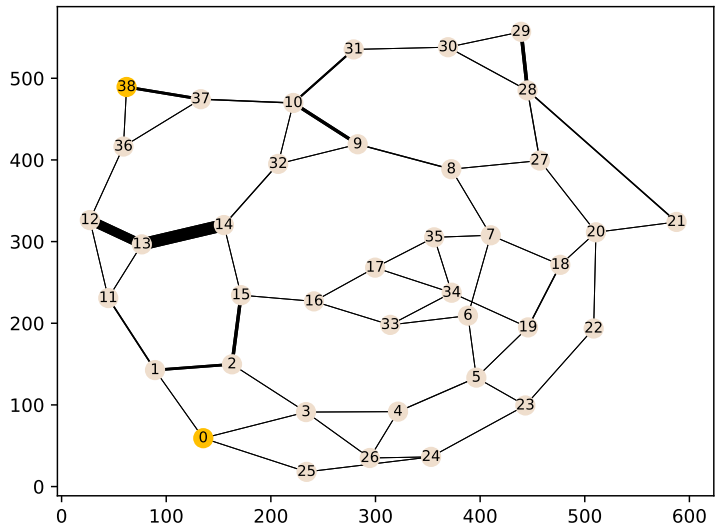
(b) Belastningsmodellen

Figur 13: Aktuella restider för belastningsmodellen och den approximativa modellen.

Här kan vi konstatera ytterliga något intressant, nämligen att restiderna dels blir väsentligt mer sammanpressade men framförallt betydligt mycket kortare. Detta även i relation till den irrationella modellen. Således kan vi även här konstatera att en del individer har fått en kortare restid utan bekostnad av att andra har fått en längre restid. Samtidigt blir restiderna betydligt kortare när alla individer som väljer den näst minst kostsamma vägen är av den andra typen.

6.2 Österåkers kommun modifierad

Vi är nu intresserade av att titta närmare på om vi befinner oss i en liknande situation som beskrivs i Braess paradox. Om sådant är fallet så kommer vi att se detta genom att mäta parametern av den sammanlagda restiden, och detta för respektive modell. I Figur 14 illustreras alla vägars transportavstånd $w(v_i, v_j)$, som även här är densamma för alla modeller i modifikationen [8].



Figur 14: Transportavstånd för det modifierade nätverket av Österåkers kommun.

Vi kan börja med att konstatera att transportavståndet för vägen (v_0, v_3) är förhållandevis litet i sammanhanget. Notera även att resultatet av trafikflödet i transportmodellen och belastningsmodellen från Österåkers kommun påvisar att det inte är en slump att vi har valt att lägga till just vägen (v_0, v_3) i modifikationen. Detta då vi såg i respektive modell att vägarna i området kring vägskälen v_0 & v_3 i

[8] Om vi bortser från vägen (v_0, v_3) så är transportavståndet hos modifikationen helt identiskt med det i Österåker

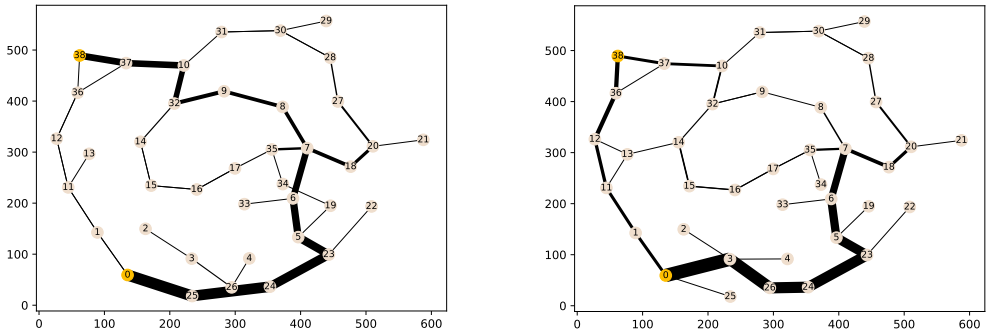
relation till många andra vägskäl i nätverket är väldigt högt belastade. En tanke med att lägga till vägen (v_0, v_3) kan således vara att försöka minska belastningen i det aktuella området.

Eftersom vi vill försöka avgöra om vi befinner oss i en sådan situation som beskrivs i Braess paradox så är vi således framförallt intresserade av att titta närmare på hur de sammanlagda restiderna skiljer sig mellan nätverken, och detta för respektive modell. Men låt oss börjar med att titta närmare på hur de sammanlagda restiderna skiljer sig mellan nätverken för transportmodellen och belastningsmodellen, vilket redogörs i Tabell 3.

	Österåkers kommun	**Österåkers kommun modifierad**
Transportmodellen	23062	28758
Belastningsmodellen	36489	26339

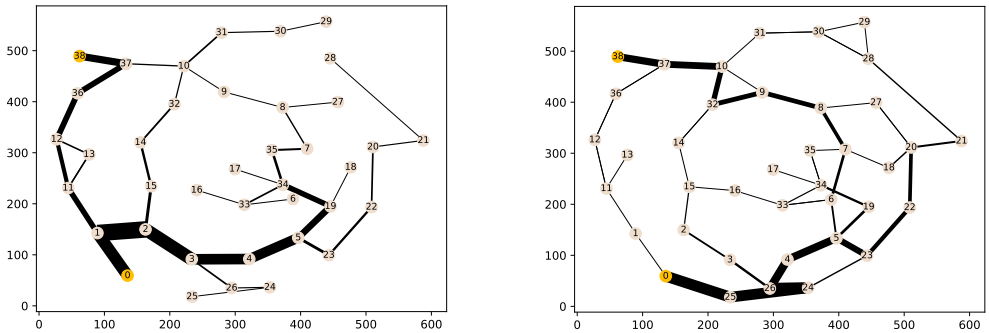
Tabell 3: Den sammanlagda restiden i nätverken Österåkers kommun och Österåkers kommun modifierad för transportmodellen och belastningsmodellen vid $t = 0$ respektive $t = 1$.

Vi kan direkt konstatera att de sammanlagda restiderna är kortare i transportmodellen för Österåkers kommun respektive kortare i belastningsmodellen för modifikationen av Österåkers kommun. För att förstå varför vi får ett sådant utslag måste vi titta närmare på hur trafikflödet ser ut för respektive nätverk och modell. Låt oss därför jämföra trafikflödet i transportmodellen, vilket illustreras i Figur 15 samt trafikflödet i belastningsmodellen, vilket illustreras i Figur 16.



(a) Österåker (b) Modifikationen

Figur 15: Belastningen i transportmodellen för Österåkers kommun och dess modifikation.



(a) Österåker (b) Modifikationen

Figur 16: Belastningen i belastningsmodellen för Österåkers kommun och dess modifikation.

Det som framförallt skiljer nätverken åt i transportmodellen är att de belastade vägarna är mer gemensamma i modifikationen av Österåkers kommun. Detta eftersom det lönar sig för de individer som

i modifikationen har nyckelnoden v_{38} som slutdestination att passera nyckelnoden v_0 på vägen. Detta till skillnad från i nätverket Österåkers kommun, där individer med utgångspunkt ur samma nod ofta tar olika stigar till respektive nyckelnod. Således är trafikflödet något mer fixerat i modifikationen, vilket grundar sig i att vissa vägar är mer belastade. Detta på bekostnad av att andra vägar som i Österåkers kommun var högt belastade inte är det i lika stor utsträckning i modifikationen. Om vi i stället tittar närmare på trafikflödet i belastningsmodellen så kan vi konstatera det omvända, nämligen att trafikflödet är mer fixerat i Österåkers kommun i relation till modifikationen. Konsensus är således att desto mer fixerat trafikflödet är, desto mer tenderar de sammanlagda restiderna att skena iväg, vilket således förklarar resultatet av de sammanlagda restiderna i Tabell 3. Däremot kan vi ännu inte dra några generella slutsatser kring de sammanlagda restiderna vid rationella vägval. Vidare är vi även intresserade av att titta närmare på hur de sammanlagda restiderna skiljer sig mellan nätverken i den irrationella repsektive approximativa modellen, vilket redogörs i Tabell 4.

	Österåkers kommun	**Österåkers kommun modifierad**
Irrationella	28617	19905
Approximativa	17677	16391

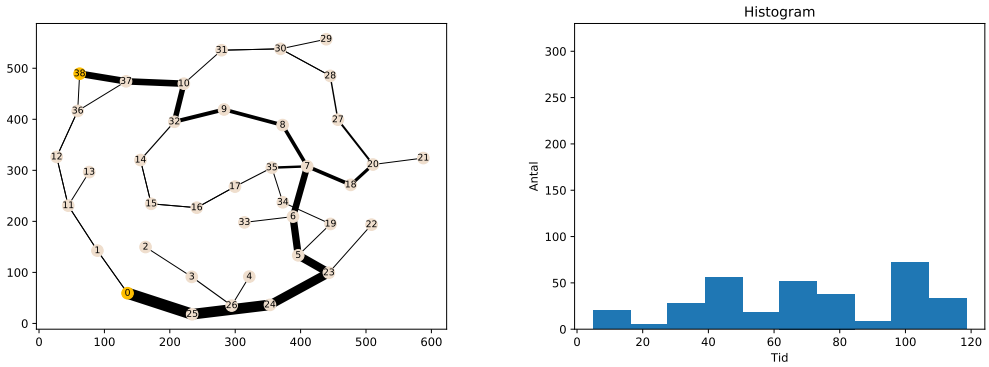
Tabell 4: Den sammanlagda restiden i nätverken Österåkers kommun och Österåkers kommun modifierad för den irrationella & approximativa modellen vid $t = 1$.

Utifrån detta kan vi konstatera att de sammanlagda restiderna i den irrationella modellen är betydligt mycket kortare för modifikationen i relation till Österåkers kommun. Detta faktum gäller även för den approximativa modellen, även om skillnaden är betydligt mindre. Slutsatsen är således att när vi betraktar modellerna i ett givet tidssteg så genererar irrationella vägval en kortare sammanlagd restid för det modifierade nätverket av Österåkers kommun.

6.3 Modellerna över tid

6.3.1 Österåkers kommun

Eftersom individerna i transportmodellen enbart tar hänsyn till transportavståndet i sitt vägval så kommer trafikflödet och således även restiderna att vara densamma i varje tidssteg, nämligen på ett sådant sätt som illustreras i Figur 17 vilket är en sammanställning av Figur 6a & Figur 9a.

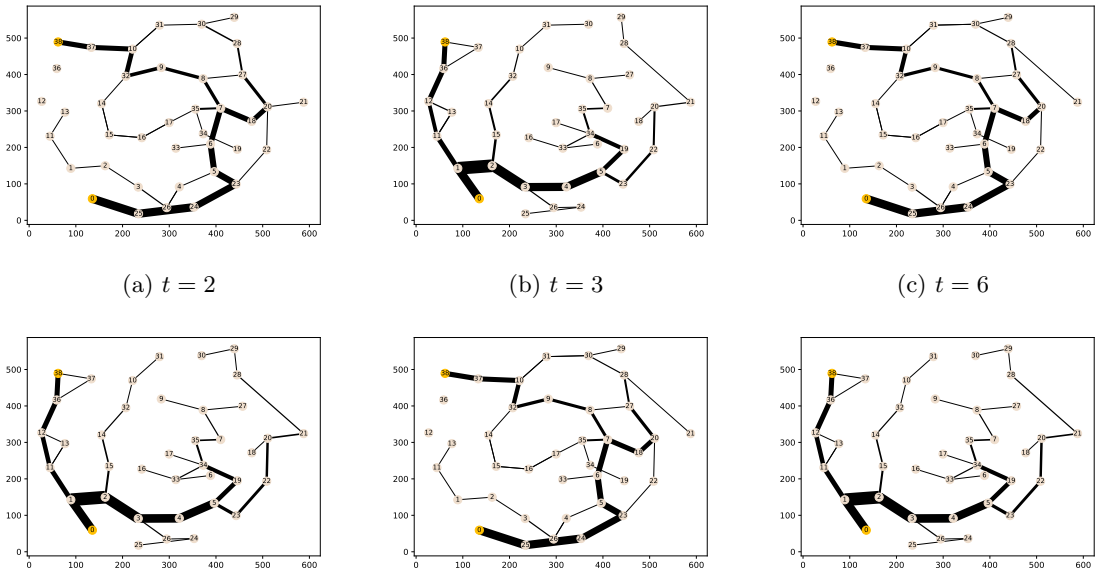


(a) Belastning

(b) Restider

Figur 17: Belastning och restider för transportmodellen vid $t = 0, 1, 2, ...$

Det innebär att i transportmodellen för Österåkers kommun kommer individerna i varje tidssteg ha den sammanlagda restiden 23062 tidsenheter, vilket vi klargjorde i Tabell 3. Vidare redogörs i Figur 18 resultaten för trafikflödet i belastningsmodellen. Vi kan konstatera att trafikflödet vid jämna respektive udda tidssteg påminner väldigt mycket om varandra. Om trafikflödet är helt identisk skulle det innebära att restiderna är densamma i alla tidssteg.

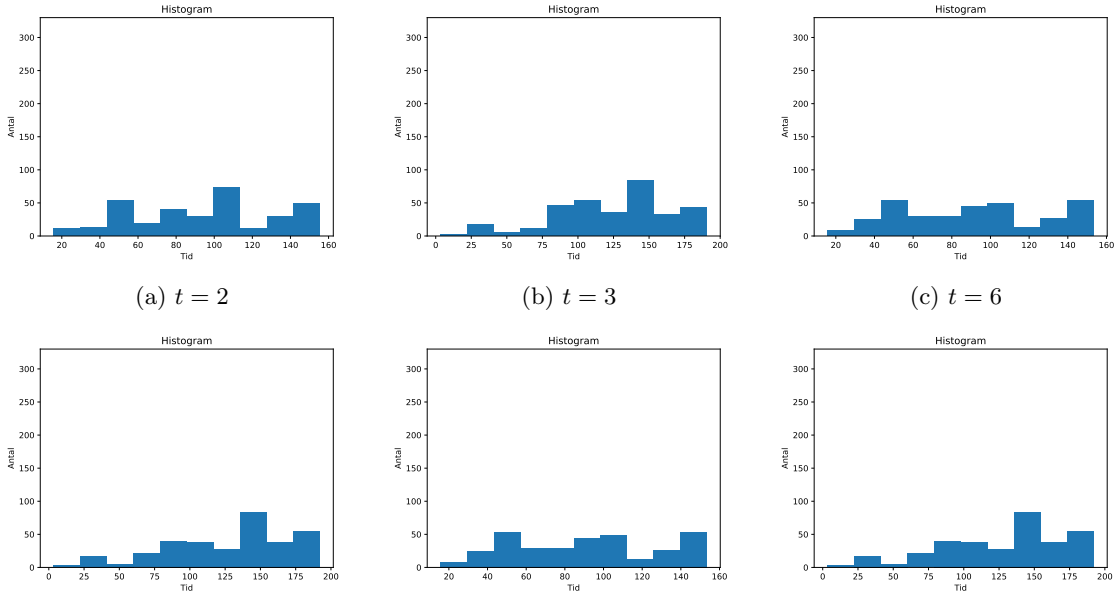


(a) $t = 2$ (b) $t = 3$ (c) $t = 6$

(d) $t = 7$ (e) $t = 8$ (f) $t = 9$

Figur 18: Belastningen i givna tidssteg för belastningsmodellen.

Låt oss därför titta närmare på om sådant är fallet genom att studera restiderna som illustreras i Figur 19. Utifrån dessa kan vi dra samma slutsatser som för trafikflödet, nämligen att restiderna är ganska lika i jämna respektive udda tidssteg, men inte identiska. Detta bekräftas även i Tabell 5. Däremot kan vi konstatera att med tiden så stabiliserar sig trafikflödet och således även restiderna. Noterbart är även att restiderna i jämna tidssteg generellt är betydligt kortare än i udda tidssteg. Detta eftersom de flesta individerna i jämna tidssteg tar den stig som har kortast transportavstånd och således är deras första hands val.



(a) $t = 2$ (b) $t = 3$ (c) $t = 6$

(d) $t = 7$ (e) $t = 28$ (f) $t = 29$

Figur 19: Restiderna i givna tidssteg för belastningsmodellen.

Tidssteg (t)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Restider	36489	30681	40670	30977	42096	29754	42174	29754
Tidssteg(t)	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
Restider	29754	42174	29754	42174	29754	42174	29754	42174

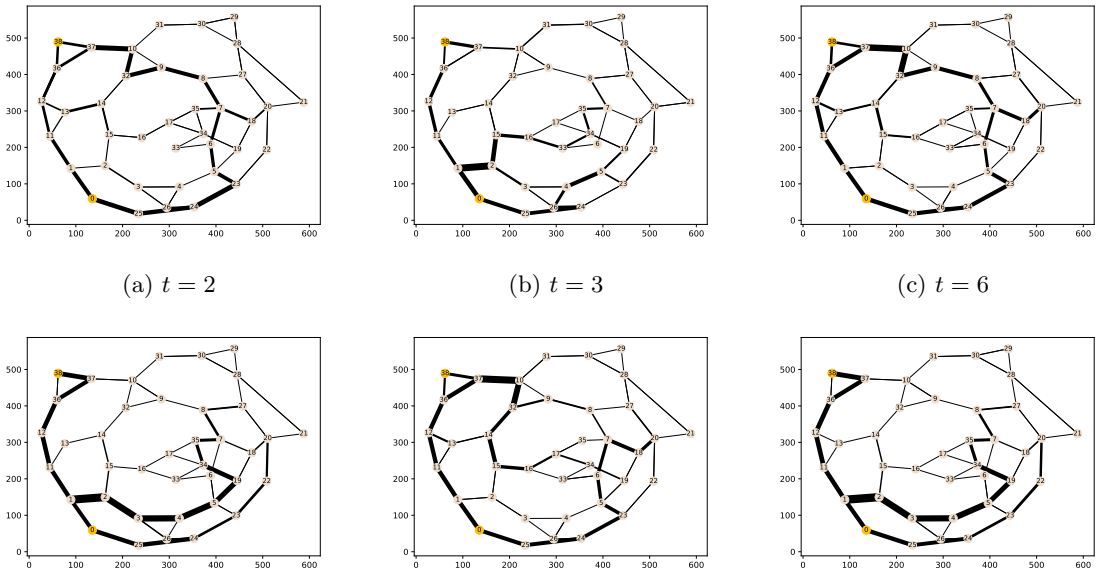
Tabell 5: De sammanlagda restiderna i belastningsmodellen för Österåkers kommun.

Vidare nöjder vi oss med att för den irrationella modellen enbart studera de sammanlagda resterna över tid, vilket redogörs i Tabell 6 [9]. Vi avstår från att redogöra för trafikflödet samt de inviduella restiderna över tid eftersom dessa resultat dels kommer att påminna om resultaten i belastningsmodellen, men även till stor del om de resultat som framkom i ett givet tidssteg. Således tillför de inget mer än att möjligtvis påvisa att resultaten i den irrationella modellen är en direkt följd av resultaten i belastningsmodellen. Detta i bemärkelsen att både trafikflödet och restidernas struktur påminner om det i belastningsmodellen på ett sådant sätt att det förekommer stora likheter i jämna respektive udda tidssteg. Däremot kommer trafikflödet i alla tidssteg, precis som vi såg vid ett givet tidssteg, att vara något mer utspritt vilket bidrar till att restiderna blir mer jämna mellan individer.

Tidssteg (t)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Restider	28617	27929	32431	26976	35478	28211	39042	26866
Tidssteg(t)	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
Restider	27299	39037	26760	40292	25952	40706	26812	38056

Tabell 6: De sammanlagda restiderna i den irrationella modellen för Österåkers kommun.

Med utgångspunkt ur detta kan vi se att det gäller för alla tidssteg att somliga individer har fått kortare restider utan bekostnad av att andra har fått längre restider. Noterbart är även att de sammanlagda restiderna, och således även belastingen, inte verkar stabilisera sig vilket de gjorde i belastningsmodellen. Låt oss gå vidare med att titta närmare på resultatet av trafikflödet över tid för den approximativa modellen, vilket illustreras i Figur 20. Här kan vi inte identifiera något tydligt mönster över trafikflödet och således belastningen i jämna respektive udda tidssteg. Faktum är att belastningen hela tiden utvecklas, även om det är små förändringar för varje jämnt respektive udda tidssteg. Dessa små förändringar ger ändå upphov till stora förändringar om man betrakar belastningen över en längre tid. Konsensus är således att det inte går att avgöra hur trafikflödet utvecklas över tid trots vetskap om hur det såg ut i det inledande skedet.



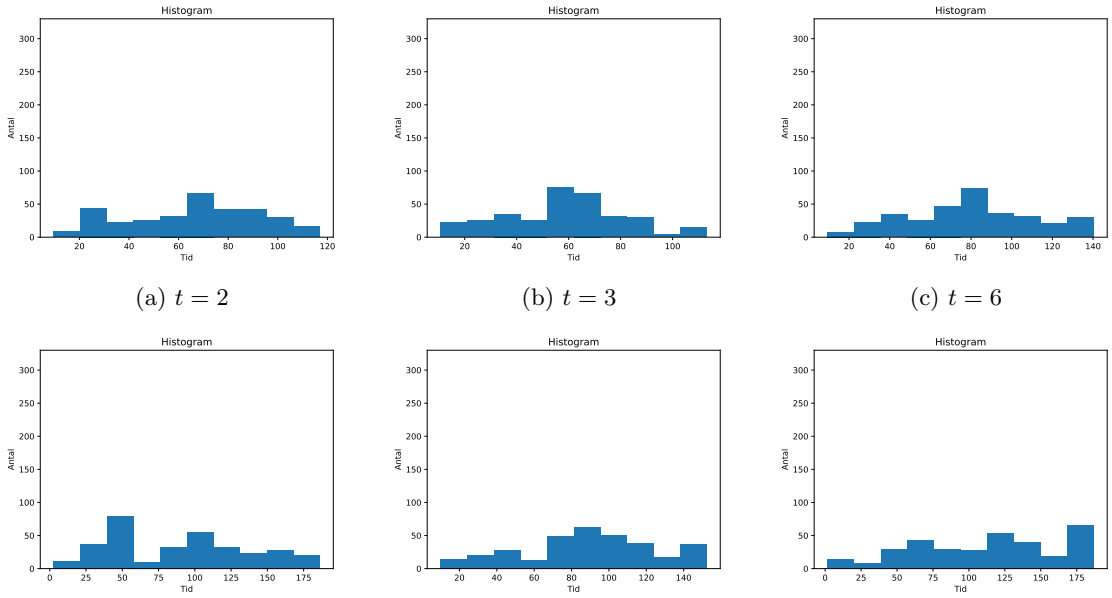
(a) $t = 2$ (b) $t = 3$ (c) $t = 6$

(d) $t = 7$ (e) $t = 8$ (f) $t = 9$

Figur 20: Belastningen i givna tidssteg för den approximativa modellen.

[9] Fullständiga resultat finnes under avsnittet *Österåkers kommun* i Appendix.

Att det inte går att avgöra hur trafikflödet utvecklas över tid medför även att det inte går att avgöra hur restiderna utvecklas över tid, vilket illustreras och bekräftas i Figur 21. Vi observerar att restiderna både ökar och minskar över tid och detta utan något tydligt mönster mellan jämna och udda tidssteg.



(a) $t = 2$ (b) $t = 3$ (c) $t = 6$

(d) $t = 7$ (e) $t = 28$ (f) $t = 29$

Figur 21: Restiderna i givna tidssteg för den approximativa modellen.

Detta faktum förydligas i Tabell 7 där det redogörs för en jämförelse mellan de sammanlagda restiderna i belastningsmodellen och den approximativa modellen. Utifrån detta kan vi även konstatera att det för samtliga tidssteg som det redogörs för så gäller det att de sammanlagda restiderna är kortare i den approximativa modellen i relation till belastningsmodellen. Då det även visade sig att den irrationella modellen genererade kortare sammanlagda restider i relation till belastningsmodellen så kan vi konstatera att de sammanlagda restiderna förkortas när somliga individer gör irrationella vägval. Men då den approximativa modellen även genererar kortare restider än den irrationella modellen så indikerar detta på att framförallt irrationella vägval på ett sådant sätt som definieras i den approximativa modellen är att föredra med avseende på att hålla nere restiderna.

Tidssteg (t)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Belastningsmodellen	36489	30681	40670	30977	42096	29754	42174	29754
Approximativa modellen	17677	21603	19290	22525	25587	26066	29792	26465
Tidssteg(t)	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
Belastningsmodellen	29754	42174	29754	42174	29754	42174	29754	42174
Approximativa modellen	24193	33261	25327	40608	22898	41764	29419	36496

Tabell 7: De sammanlagda restiderna för belastningsmodellen och den approximativa modellen.

6.3.2 Österåkers kommun modifierad

Med inspiration av Braess paradox är vi här intresserade av hur de sammanlagda restiderna i Österåkers kommun skiljer sig från de i modifikationen av Österåkers kommun för respektive modell och detta över tid. Av denna anledning redogös det inte här för trafikflödet för modifikationen över tid [10]. Dessutom ger dessa resultat inte upphov till några märkbart intressanta resultat, ty de påvisar just det vi redan redogjort för i Österåkers kommun. Låt oss istället börja med att jämföra hur de sammanlagda restiderna skiljer sig mellan nätverken över tid för transportmodellen, vilket redogörs i Tabell 8. Det kommer inte direkt som någon överraskning att det visar sig att de sammanlagda restiderna över tid är betydligt kortare för Österåkers kommun i relation till modifikationen. Detta eftersom de sammanlagda restiderna är helt identiska i alla tidssteg då trafikflödet inte förändras något över tid.

[10] Fullständiga resultat finnes under avsnittet *Österåkers kommun modifierad* i Appendix

Tidssteg	0	1	2	3	26	27	28	29	TOT
Österåkers kommun	23062	23062	23062	23062	23062	23062	23062	23062	691860
Modifikationen	28758	28758	28758	28758	28758	28758	28758	28758	862740

Tabell 8: De sammanlagda restiderna för transportmodellen i ett givet tidsteg samt efter alla tidssteg i Österåkers kommun och modifikationen av Österåkers kommun.

Lägg dock märke till att restiderna i transportmodellen inte bör jämföras med restiderna i den irrationella samt approximatva modellen. Detta eftersom både den irrationella och approximativa modellen har sitt ursprung ur belastningsmodellen vilket innebär att en direkt jämförelse inte skulle vara lämplig, och det är något som vi återkommer till i avsnittet *En oväsentlig jämförelse*. Låt oss istället gå vidare med att titta närmare på hur de sammanlagda restiderna ser ut i respektive nätverk och hur de skiljer sig över tid, vilket redogörs i Tabell 9.

Tidssteg (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	
Österåker	36489	30681	40670	30977	42096	29754	42174	29754	
Modifikationen	26339	51545	25624	56791	25271	56936	25284	56936	
Tidssteg(t)	22	23	24	25	26	27	28	29	TOT
Österåker	29754	42174	29754	42174	29754	42174	29754	42174	1067111
Modifikationen	56936	25284	56936	25284	56936	25284	56936	25284	1200968

Tabell 9: De sammanlagda restiderna för belastningsmodellen i ett givet tidsteg samt efter alla tidssteg i Österåkers kommun och modifikationen av Österåkers kommun.

Urifrån detta kan vi dock notera något intressant, nämligen att det varierar beroende på i vilket tidssteg vi befinner oss i hur skillnaderna mellan de sammanlagda restiderna ser ut. I jämna tidssteg är de sammanlagda restiderna generellt kortare för Österåkers kommun, medans de generellt är kortare i udda tidssteg för modifikationen av Österåkers kommun. Vidare kan vi konstatera att den totala sammanlagda restiden över tid är kortare i Österåkers kommnun, vilket även påvisades i transportmodellen. I klarspråk betyder det att under förutsättning att individerna gör rationella val, då förlängs restiderna över tid i samband med att vi utvidgar nätvetket på ett sådant sätt som är aktuellt i modifikationen. En annan intressant observation är att de totala sammanlagda restiderna i belastningsmodellen är betydligt mycket längre än de i transportmodellen. Det här resultatet är intressant eftersom det skiljer sig från resultatet från när vi i jämförde modellerna i ett givet tidssteg. Vi kunde då med utgångspunkt ur Tabell 3, där vi jämförde modellerna i ett givet tidssteg, konstatera att de sammanlagda restiderna för modifikationen av Österåkers kommun var kortare i belastningsmodellen i relation till transportmodellen. Vi får således ett annat utslag när vi studerar modellerna över tid, vilket påvisar intresset av att studera modellerna över tid. Det betyder att under förutsättning att individerna gör rationella val över tid så tjänar de på att göra sitt stigval enbart baserat på transportavståndet $w(v_i, v_j)$ och hålla fast vid detta val över tid. Omvänt så bör de således inte ta hänsyn till hur tidsavståndet $h(v_i, v_j)$ såg ut vid föregående tidssteg.

Låt oss gå vidare med att titta närmare på och jämföra de sammanlagda restiderna över tid mellan nätverken för den irrationella modellen, vilket illustreras i Tabell 10.

Tidssteg (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	
Österåker	28617	27929	32431	26976	35478	28211	39042	26866	
Modifikationen	19905	55320	22879	51779	24559	51292	25239	48867	
Tidssteg(t)	22	23	24	25	26	27	28	29	TOT
Österåker	27299	39037	26760	40292	25952	40706	26812	38056	974156
Modifikationen	48917	25545	46167	26580	46675	26104	46929	26138	1083786

Tabell 10: De sammanlagda restiderna för den irrationella modellen i ett givet tidsteg samt efter alla tidssteg i Österåkers kommun och modifikationen av Österåkers kommun.

Även här gäller det att Österåkers kommun har kortare restider i jämna tidssteg medans modifikationen av Österåkers kommun har kortare restider i udda tidssteg. Samtidigt är den totala sammanlagda restiden över tid även här kortare för Österåkers kommun, även om skillnaden här är något mindre än för belastningsmodellen. Eftersom vi tidigare kunde konstatera att resultaten i den irrationella modellen

är en direkt följd av de i belastningsmodellen så är detta resultat inte särskilt överranskande. Däremot skiljer sig även detta resultat ifrån det vi kunde observera när vi studerade modellen i ett givet tidssteg. Låt oss slutligen titta närmare på hur de sammanlagda restiderna i den approximativa modellen skiljer sig mellan nätverken och hur de utvecklas över tid, vilket redogörs i Tabell 11.

Tidssteg (t)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
Österåker	17677	21603	19290	22525	25587	26066	29792	26465	
Modifikationen	16391	19272	21998	20840	27095	23187	26595	24130	
Tidssteg(t)	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**TOT**
Österåker	24193	33261	25327	40608	22898	41764	29419	36496	833664
Modifikationen	19917	27013	19430	23191	22035	24924	23953	24623	690781

Tabell 11: De sammanlagda restiderna för den approximativa modellen i ett givet tidsteg samt efter alla tidssteg i Österåkers kommun och modifikationen av Österåkers kommun.

Här kan vi konstatera något annat, nämligen att de sammanlagda restiderna till en början påminner väldigt mycket om varandra i jämna respektive udda tidssteg samt mellan nätverken, men att de med tiden utvecklas på olika sätt. De sammanlagda restiderna i Österåkers kommun blir längre, medans de i modifikationen håller sig på ungefär samma nivå och således blir skillnaderna mellan nätverken större över tid. Detta resulterar i att de totala sammanlagda restiderna över tid blir kortare för modifikationen av Österåkers kommun. Samtidigt är restiderna generellt något kortare för båda nätverken i relation till belastningsmodellen, men faktiskt även den irrationella modellen. Detta indikerar återigen på att de sammanlagda restiderna blir kortare när somliga individer gör irrationella vägval, och framförallt på ett sådant sätt som definieras i den approximativa modellen.

6.4 En oväsentlig jämförelse

Detta avsnitt avser enbart att kort redogöra för varför det är olämpligt att jämföra restiderna i transportmodellen med restiderna i den irrationella respektive approximativa modellen, samtidigt som en jämförelse med belastningsmodellen är relevant. Av denna anledning kommer resultaten i detta avsnitt inte att användas framöver. I Tabell 12 redogörs en sammanställning av de totala sammanlagda restiderna över tid för respektive modell och nätverk. Den observanta läsaren kan utifrån detta notera att för Österåkers kommun så påvisar resultaten att den totala sammanlagda restiderna över tid är betydligt kortare i transportmodellen än vad den är i belastningsmodellen samt den irrationella respektive approximativa modellen.

	Österåker	**Modifikationen**
Transportmodellen	691860	862740
Belastningsmodellen	1067111	1200968
Irrationella modellen	974156	1083786
Approximativa modellen	833664	690781

Tabell 12: Sammanställning av de totala sammanlagda restiderna över tid för respektive modell och nätverk.

Vi påminner oss om att det som karaktäriserar transportmodellen är att individerna enbart gör sitt vägval baserat på transportavståndet $w(v_i, v_j)$, medans individerna i resterande modeller även tar hänsyn till tidsavståndet $h(v_i, v_j)$ från föregående tidssteg. Eftersom detta är den enda skillnaden mellan transportmodellen och belastningsmodellen så är en jämförelse mellan dessa relevant. Men då man även justerar på individernas ageranden och således dess ruttval i den irrationella respektive approximativa modellen så är det två faktorer som skiljer dessa modeller ifrån transportmodellen och därför är en direkt jämförelse mellan dessa inte lämplig. Om man däremot skulle justera den irrationella och approximativa modellen på ett sådant sätt att de istället för att ha sitt ursprung ur belastningsmodellen har det ifrån transportmodellen skulle en jämförelse vara möjlig. Om sådant hade varit fallet så skulle således även dessa modeller enbart ta hänsyn till transportavståndet $w(v_i, v_j)$ vilket hade gett oss den totala sammanlagda restiden över tid som illustreras i Tabell 13 [11].

[11] Observera att i ett sådant fall vore transportmodellen och belastningsmodellen helt identiska.

	Österåker	Modifikationen
Transportmodellen	691860	862740
Irrationella modellen	651660	857430
Approximativa modellen	535410	619470

Tabell 13: Sammanställning av de totala sammanlagda restiderna över tid för respektive modell och nätverk om de enbart tar hänsyn till transportavståndet $w(v_i, v_j)$ och således inte tar hänsyn till tidsavståndet $h(v_i, v_j)$ från föregående tidssteg.

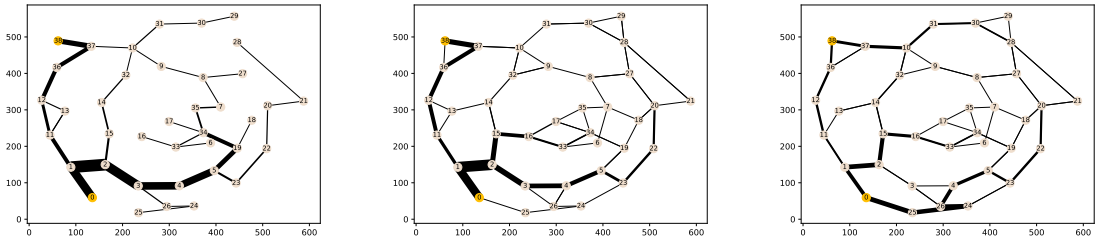
Utifrån detta kan vi konstatera att allt återigen är i sin ordning, nämligen att irrationella vägval genererar kortare restider än rationella vägval. Den enda skillnaden från dessa resultat i relation till de vi redan studerat är att den approximativa modellen här genererar kortare restider för Österåkers kommun istället för dess modifikation. Lägg dock återigen märke till att resultaten i detta avsnitt är en kommentar till att vi inte bör jämföra resultaten i transportmodellen med de i den irrationella respektive approximativa modellen. Fortsättningsvis kommer vi att återgå till att anta att dessa har sitt ursprung ur belastningsmodellen och således enbart jämföra resultaten däremellan.

7 Diskussion & Slutsatser

7.1 Slutsatser

7.1.1 Trafikflödet i Österåkers kommun

Vi konstaterade med utgångspunkt ur transportmodellen att vissa vägar generellt är mer eftertraktade än andra. Detta visade sig även vara fallet i både belastningsmodellen och den irrationella modellen, även om vägarna i sig kunde variera. I transportmodellen är trafikflödet och således även restiderna konstanta över tid, medans vi i belastningsmodellen [12] kunde se ett tydligt mönster över trafikflödet i jämna respektive udda tidssteg när simuleringen skedde över tid. Vi kunde således se ett tydligt mönster där belastningen hoppar mellan två olika populära stigar beroende på vilket tidssteg vi befinner oss i. I den approximativa modellen är trafikflödet i nätverket mer utspritt och vi kan inte identifiera något tydligt mönster över tid. Detta trots vetskap om hur trafikflödet ser ut i det inledande skedet. Vi kunde vidare se att det förekommer ytterst små skillnader mellan trafikflödet i belastningsmodellen och den irrationella modellen, samtidigt som det förekommer stora skillnader i relation till den approximativa modellen.



(a) Belastningsmodellen (b) Den irrationella modellen (c) Den approximativa modellen

Figur 22: Sammanställning av belastningen i belastningsmodellen, den irrationella modellen och den approximativa modellen för Österåkers kommun vid $t = 1$.

I den irrationella modellen kunde vi konstatera att detta beror på att det framförallt förekommer två olika typer av individer som väljer den näst minst kostsamma vägen till sin slutdestination. För den första typen är skillnaden mellan stigen som utgör den minst kostsamma vägen och den näst minst kostsamma vägen små. Ofta kan de bara ta en kort omväg för att komma in på näst intill samma stig som utgör den minst kostsamma vägen. För den andra typen är det däremot en stor skillnad mellan den stig som utgör den minst kostsamma vägen och den näst minst kostsamma vägen. I den approximativa modellen förekommer dock enbart individer av den så kallade andra typen bland de som väljer den näst minst kostsamma vägen, vilket resulterar i att trafikflödet blir mer utspritt över nätvetket.

7.1.2 Restiderna vid rationella val

Vi kunde med utgångspunkt ur Tabell 3, där vi studerade de sammanlagda restiderna i ett givet tidssted för transportmodellen och belastningsmodellen, konstatera att för Österåkers kommun så gäller det att de sammanlagda restiderna i transportmodellen är betydligt kortare än de i belastningsmodellen, medans det omvända gäller för modifikationen av Österåkers kommun. Vi kan identifiera att resultaten avspeglar hur transportavståndet bestäms samt hur trafikflödet såg ut i föregående tidssteg respektive hur det ser ut i det aktuella tidssteget. I transportmodellen väljer individerna den stig som har det kortaste transportavståndet $w(v_i, v_j)$, och således är denna stig deras första hands val. Det betyder att om det inte hade existerat någon trafik hade denna stig givitvis även varit den minst kostsamma. Dock är vägarna i den stig som leder till respektive slutdestination ofta gemensamma för individerna. Det innebär att om belastningen blir allt för hög så kan man i vissa fall tjäna på att ta en annan stig, vilket således var fallet i modifikationen men inte i Österåkers kommun vid ett givet tidssteg. Allt tyder på att detta grundar sig i att vägarna i individernas stigval är mer gemensamma i transportmodellen för modifikationen av Österåkers kommun medans det omvända gäller för belastningsmodellen, nämligen att individernas vägar är mer gemensamma i Österåkers

[12] och således även i den irrationella modellen ty dessa resultat är en direkt följd av utfallet i belastningsmodellen

kommun (se Figur 15 & Figur 16). Detta kan således vara en förklaring till varför det skiljer sig mellan nätverken vilken modell som genererar det kortaste sammanlagda restiderna i ett givet tidssteg.

Vi kunde senare utifrån Tabell 9, där vi studerade de sammanlagda resterna över tid i belastningsmodellen, konstatera att det för belastningsmodellen i Österåkers kommun gäller att de sammanlagda restiderna i jämna tidssteg är betydligt kortare än de i udda tidssteg samt att det omvända gäller för modifikationen av Österåkers kommun. Resultaten över tid kan tolkas på samma sätt som för transportmodellen och belastningsmodellen, där slutsatserna kring transportmodellen representerar resultaten i jämna tidssteg och slutsatserna kring belasningsmodellen representerar resultaten i udda tidssteg. Det mest anmärkningsvärda är dock att resultaten kring vilken modell som är att föredra med avseende på att hålla nere restiderna skiljer sig från varandra när vi betraktar transportmodellen och belastningsmodellen för nätverken i ett givet tidssteg (Tabell 3) respektive över tid (Tabell 8 & Tabell 9). När vi studerar modellerna över tid tyder resultaten på att individerna enbart bör göra sitt vägval baserat på transportavståndet $w(v_i, v_j)$ och således strunda i hur tidsavståndet $h(v_i, v_j)$ såg ut vid föregående tidssteg. Detta resultat påvisar även en intressant aspekt kring värdet att göra en långsiktig analys.

7.1.3 Restiderna vid irrationella val

Vi kunde genom att jämföra de sammanlagda resterna över tid för belastningsmodellen, den irrationella modellen och den approximativa modellen [13] konstatera att de sammanlagda restiderna både var kortare och mer jämna i de modellerna där individerna gör irrationella vägval. En sammanställning av resultaten redogörs i Tabell 14. Det innebär att en del individer har fått en kortare restid och detta ofta utan bekostnad av att andra har fått en längre restid. Att detta sker återspeglar att individerna av den andra typen, dvs för individer där skillnaden mellan den stig som utgör den minst kostsamma vägen och den näst minst kostsamma vägen är stor, väljer en väg som i det föregående steget betraktas som mer kostsam och att detta framförallt ger upphov till två positiva utslag.

- För det första så får de individer som har en gemensam eller delvis gemensam stig som utgör den minst kostsamma vägen som dessa en kortare restid. Detta eftersom belastningen blir mindre då individer av den andra typen väljer en helt annan stig. Konsensus är att i allmänhet så blir belastningen på de populära vägarna något mindre.
- För det andra kommer några av de individer som är av den andra typen välja en stig som är mindre belastad än den stig som utgör den minst kostsamma vägen. Om belastningen är tillräckligt låg kan det i vissa fall tjäna på att ta den stig som utgör den näst minst kostsamma vägen från föregående eftersom de på förhand inte är medvetna om belastningen i det aktuella tidssteget.

Men att den andra typen av individer väljer en väg som i det föregående steget betraktas som mer kostsam kan även ge upphov till att restiderna blir längre om belastningen på den näst minst kostsamma vägen inte är tillräckligt låg. Detta verkar dock vara ett recessivt utslag. Slutsatsen blir således att den stig som upplevs som minst kostsam inte alltid är det, detta framförallt i ett större sammanhang. Samtidigt riskerar individer av den första typen, dvs individer där skillnaden mellan stigen som utgör den minst kostsamma vägen och den näst minst kostsamma vägen är liten, att få samma kostsamhet som den stig som utgör den minst kostsamma vägen plus kostsamheten för den omväg de behöver ta för att ansluta till den givna stigen. En förklaring till varför restiderna dock inte blir längre är att trots att dessa individer tar en omväg så är belastningen nu mer utspridd, vilket är en följd av att det existerar individer av den andra typen. Det bidrar således till att individerna av den första typen ändå får kortare restider. Detta kan således även vara en förklaring till att de sammanlagda restiderna i den approximativa modellen är kortare än de i den irrationella modellen.

	Belastningsmodellen	**Irrationella modellen**	**Approximativa modellen**
Österåkers kommun	1067111	974156	833664
Modifikationen	1200968	1083786	690781

Tabell 14: Sammanställning av de totala sammanlagda restiderna över tid för respektive modell och nätverk.

[13] Observera att resultaten i transportmodellen inte är lämpliga med avseende på att jämföra rationella och irrationella vägval, vilket vi redogjorde för i avsnittet *En oväsentlig jämförelse*.

Dock måste ett varningen finger lyftas här då utslaget enbart är aktuellt när individer med sannolikhet $p_2 = 1/2$ väljer den minst kostsamma vägen och med sannolikhet $1 - p_2 = 1/2$ en näst minst kostsamma vägen till sin slutdestination. Om alla individer hade gjort irrationella val så hade vi varit i samma situation som om ingen hade gjort irrationella val. Hur som helst så påvisar ändå resultaten att då alla individer agerar rationellt och självviskt så blir restiderna längre. När däremot somliga individer agerar irrationellt så förkortas restiderna markant. Detta påvisar att vi befinner oss i en situation där alla skulle få det bättre om inte alla agerade självviskt.

7.1.4 Modifiering av nätverket

Vi kunde med utgångspunkt ur Tabell 3 & Tabell 8, där vi redogör för de sammanlagda restiderna i ett givet tidssteg respektive över tid i transportmodellen, konstatera att för denna modell så gäller det att den totala sammanlagda restiden är kortare i Österåkers kommun i relation till dess modifikation, vilket således betyder att restiderna har förlängts i samband med att vi har utvidgat nätverket på ett sådant sätt som har gjorts i modifikationen av Österåkers kommun. Vidare kunde liknande observationer göras och således liknande slutsatser dras för både belastningsmodellen och den irrationella modellen över tid (se Tabell 9 & Tabell 10), men dock inte vid ett givet tidssteg (se Tabell 3 & Tabell 4). Däremot kunde vi med utgångspunkt ur Tabell 4 & Tabell 11, där vi redogör för de sammanlagda restiderna i ett givet tidssteg respektive över tid i den approximativa modellen, konstatera att det modifierade nätverket av Österåkers kommun har de kortaste totala sammanlagda restiderna. Baserat på resultaten i den aktuella simuleringen för transportmodellen så bör man inte utveckla nätverket på ett sådant sätt som är gjort i modifikationen. Om man däremot befinner sig i en sådan situation som beskrivs i belastningsmodellen samt den irrationella modellen så bör man verkligen ifrågasätta om man skall utveckla nätverket på ett sådant sätt som är gjort i modifikationen. Man kan dock tänka sig att en långsiktig lösning är mer aktuellt vilket i sådant fall talar till Österåkers kommuns fördel. Samtidigt indikerar resultaten i den approximativa modellen på att man bör utvidga nätverket. Med utgångspunkt ur teorin kring Braess paradox känns resultatet rimligt eftersom paradoxen grundade sig i att alla individer gör rationella och självviska val, vilket individerna exempelvis gör i transportmodellen men inte i den approximativa modellen. Det är dock möjligt att om transportavståndet sett ut på ett annat sätt, eller om man hade gjort en annan modifikation av nätverket, att vi hade fått ett annat utslag.

7.2 Återkoppling till frågeställning

Låt oss nu återkoppla till vår frågeställning genom att besvara dessa.

- Hur ser trafikflödet i nätverken ut?

I transportmodellen, belastningsmodellen och den irrationella modellen är vissa vägar generellt mer eftertraktade än andra. Trafikflödet i transportmodellen är konstant över tid, medans det i belastningsmodellen och den irrationella modellen följer ett tydligt mönster i udda respektive jämna tidssteg. Hur trafikflödet ser ut beror vidare till stor del hur transportavståndet ser ut, men även vilken modell vi använder oss av. I den approximativa modellen förekommer det dock inget tydligt mönster över trafikflödet i nätverket, oavsett hur transportavståndet ser ut.

- Vilken är den kortaste respektive minst kostsamma vägen?

Den kortaste vägen mellan två noder är alltid den stig med det kortaste transportavståndet. Beroende på hur trafikflödet ser ut varierar det om denna stig även är den minst kostsamma eller ej.

- Hur skiljer sig restiderna åt när individerna gör rationella respektive irrationella val?

Restiderna blir betydligt kortare för samtliga individer om några individer gör irrationella vägval och andra rationella vägval på ett sådant sätt som definieras i den irrationella modellen, men framförallt om det görs på ett sådant sätt som definieras i den approximativa modellen.

- Bör vårt ursprungliga nätverk utvecklas?

Under förutsättning att individerna gör rationella och självviska val över tid bör nätverket Österåkers kommun inte utvecklas på ett sådant sätt som görs i det modifierade nätverket av Österåkers kommun. Om individerna däremot agerar irrationellt över tid är slutsatsen dock inte lika självklart. Om individerna agerar utefter den irrationella modellen så är de sammanlagda restiderna fortfarande till

förmån för vårt ursprungliga nätverk, vilket innebär att vi inte bör utvidga nätverket. Om de däremot agerar på ett sådant sätt som det redogörs för i den approximativa modellen så bör nätverket utvidgas. Dock är detta en fråga, liksom många andra, där svaret skiljer sig mellan simuleringarna. Konsensus är således att beroende på hur situationen ser ut bör olika val göras.

7.3 Trovärdighet

I nätverket Österåkers kommun tar vi enbart hänsyn till relativt stora vägar och vägar som binder ihop viktiga knutpunkter. Detta eftersom nätverket är så pass komplext att det inte är rimligt att ta hänsyn till alla möjliga vägar, samtidigt som det är praktiskt att utesluta exempelvis enkelriktade gator. Detta särskilt med avseende på att nätverket är manuellt uppbyggt. Men faktum är att denna kvantitativa metod kan göra att viktiga aspekter och resultat går förlorade. Vidare låter vi tiden vara diskret, där varje tidssteg $i = 0, 1, 2, ..., n$ representerar en dag vid ett fixt tidsintervall. Det finns en del fördelar med detta, framförallt programmerings relaterade, men det är inte särskilt realistiskt antagande. Detta är problematiskt av flera anledningar. För det första kan trafikflödet variera inom tidsintervallet, men även mellan dagar. Det är exempelvis inte rimligt att anta att det är lika många trafikanter ute på vägarna en veckodag som en helgdag. För det andra tar vi inte hänsyn till att trafikanterna möjligtvis inte hinner fram till sitt mål i tid. Exempelvis kanske inte det givna tidsintervallet räcker för trafikanterna att nå sitt mål. Men den största bristen med detta antagande är att det förutsätter att alla trafikanter hela tiden interagerar med varandra. Detta är inte realistisk eftersom vägarna har olika vikter och således har flera trafikanter olika långa restider. Vidare kan fråga sig om resultaten i simuleringarna är allmänna. Alltså, om vi tittar närmare på flera simuleringar baserat på samma förutsättningar, men där transportavstånden $w(v_i, v_j)$ i nätverken ser annorlunda ut, kommer vi då att få samma resultat? Faktum är att sådant är inte alltid fallet. Resultaten kan variera kraftigt beroende på hur nätverket ser ut och transportavstånden bestäms. Den gemensamma nämnaren är dock att om trafikflödet är mer koncentrerat i nätverket så skenar lätt de sammanlagda restiderna iväg.

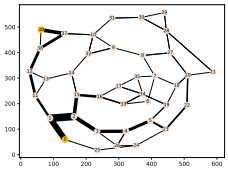
7.4 Förbättringar

Att vi studerar modellerna ur ett makroperspektiv är väldigt praktiskt, dock utgörs modeller ur ett markroperspektiv av ganska grova antaganden. Att modellens begränsningar kan bidra till vilseledande resultat är dock något som man alltid bör vara medveten om. Man bör därför alltid förhålla sig till flera oberoende källor innan man kan dra några direkta slutsatser. För att ändå göra resultaten så tillförlitliga som möjligt bör man försöka utveckla modellen ytterligare. Detta genom att bland annat ta hänsyn till färdmedelsval och resegenerering, vilket vi inte ha gjort. Man hade även kunnat göra flera förbättringar med avseende på det modifierade nätverket. Bland annat skulle man kunna titta närmare på hur resutatet skiljer sig beroende på hur nätverket modifieras. Men framförallt är en brist i modifikationen att den tillagda vägen tar hänsyn till belastningen i nätverket. Enligt Braess paradox bör det inte göra det. Sannolikt hade resultaten sett annorlunda ut om modifikationen var utformad på ett sådant sätt. Samtidigt motsvarar den aktuella modifikationen en mer realistisk situation. Det hade även varit intressant att titta närmare på fler irrationella beteenden, exempelvis att individerna slumpmässigt väljer mellan tre eller fyra stycken stigar i varje tidssteg.

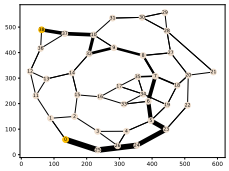
Avslutningsvis kan man fundera över om de två definitionerna av den näst minst kostsamma vägen verkligen är representativa. Den definition som återges i den irrationella modellen är högst tveksam. Men eftersom resultaten från simuleringarna ändå påvisar intressanta ageranden, nämligen det som förekommer hos den första respektive andra typen av individer, så kvarstår modellen. Dock är detta även en av förklaringarna till att vi inte lägger en lika stor tyngd i resultaten som påvisas i den irrationella modellen. När det gäller den definition som återges i den approximativa modellen så är denna definition något bättre, framförallt ur ett programmeringsmässigt perspektiv, men fortfarande tveksam. Ett alternativ sätt att definiera den näst minst kostsamma vägen på hade varit att lista alla tidsavstånd för alla individer i alla tidssteg. Men på grund av den höga tidskomplexiteten som detta hade medfört, ty man måste lägga ihop alla kombinationer av vägar och jämföra dessa, så avstår vi ändå från en sådan definition. Detta trots att denna definition av den näst minst kostsamma vägen nog hade varit den mest korrekta med avseende på de berörda alternativen. Desstutom ska man inte glömma bort att hela syftet med att individerna slumpmässigt tar en av två alternativa vägar är att se hur restiderna förändras när individerna sprider ut sig mer över hela nätverket. Detta gör individerna både i den irrationella och approximativa modellen vilket innebär att syftet med att definiera den näst minst kostsamma vägen ändå går fram.

8 Appendix

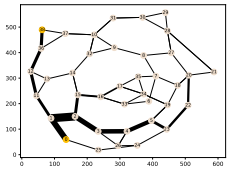
8.1 Österåkers kommun



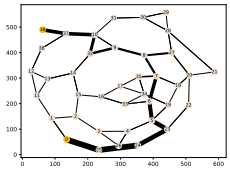
(a) $t = 1$



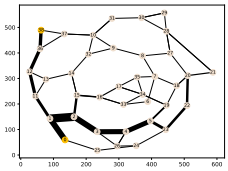
(b) $t = 2$



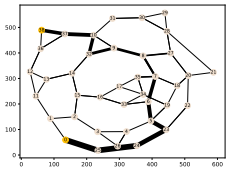
(c) $t = 3$



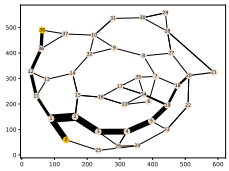
(d) $t = 4$



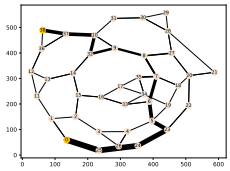
(e) $t = 5$



(f) $t = 6$

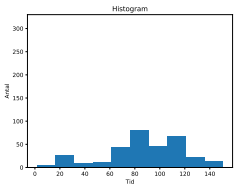


(g) $t = 7$

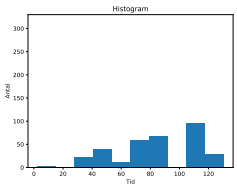


(h) $t = 8$

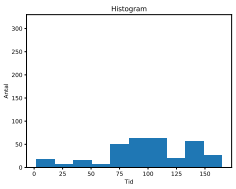
Figur 23: Belastningen i ett givet tidssteg för den irrationella modellen i Österåkers kommun.



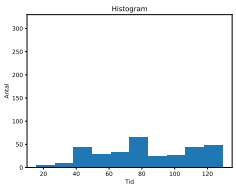
(a) $t = 1$



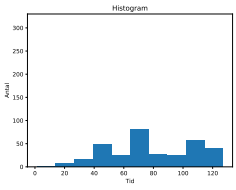
(b) $t = 2$



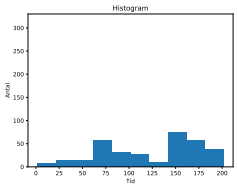
(c) $t = 3$



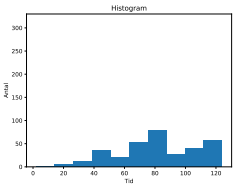
(d) $t = 4$



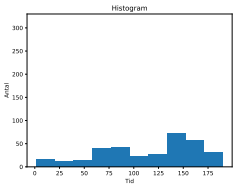
(e) $t = 26$



(f) $t = 27$



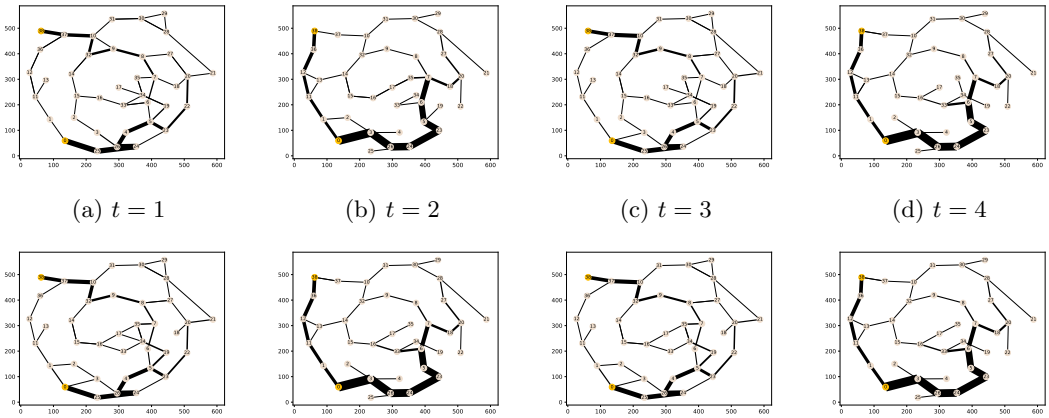
(g) $t = 28$



(h) $t = 29$

Figur 24: Restiderna i ett givet tidssteg för den irrationella modellen i Österåkers kommun.

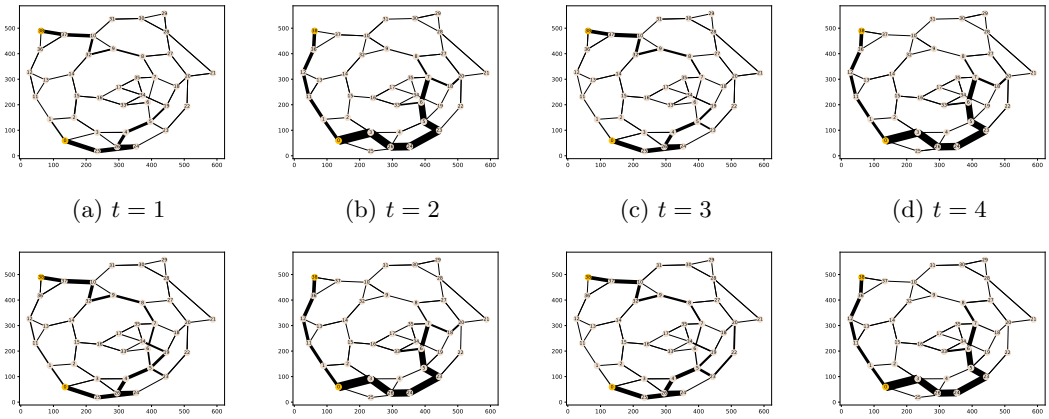
8.2 Österåkers kommun modifierad



(a) $t = 1$ (b) $t = 2$ (c) $t = 3$ (d) $t = 4$

(e) $t = 5$ (f) $t = 6$ (g) $t = 7$ (h) $t = 8$

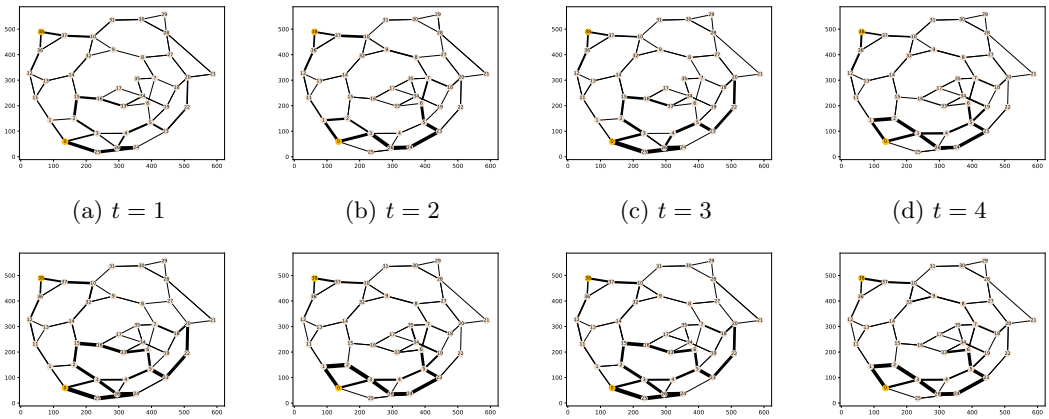
Figur 25: Belastningen i ett givet tidssteg för belastningsmodellen i modifikationen.



(a) $t = 1$ (b) $t = 2$ (c) $t = 3$ (d) $t = 4$

(e) $t = 5$ (f) $t = 6$ (g) $t = 7$ (h) $t = 8$

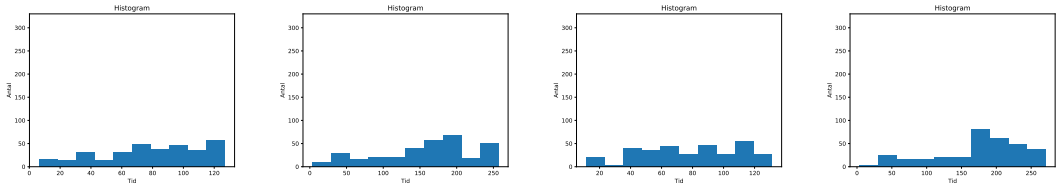
Figur 26: Belastningen i ett givet tidssteg för den irrationella modellen i modifikationen.



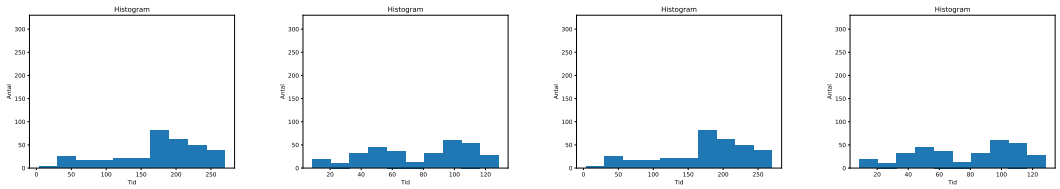
(a) $t = 1$ (b) $t = 2$ (c) $t = 3$ (d) $t = 4$

(e) $t = 5$ (f) $t = 6$ (g) $t = 7$ (h) $t = 8$

Figur 27: Belastningen i ett givet tidssteg för den approximativa modellen i modifikationen.

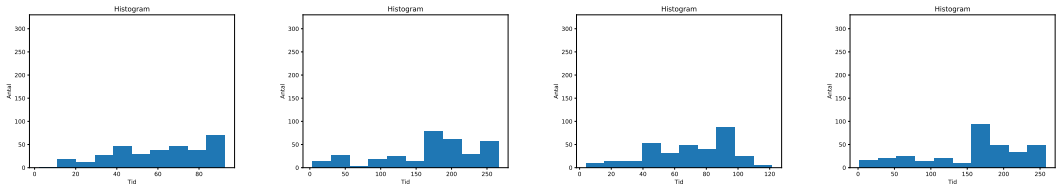


(a) $t = 1$ (b) $t = 2$ (c) $t = 3$ (d) $t = 4$

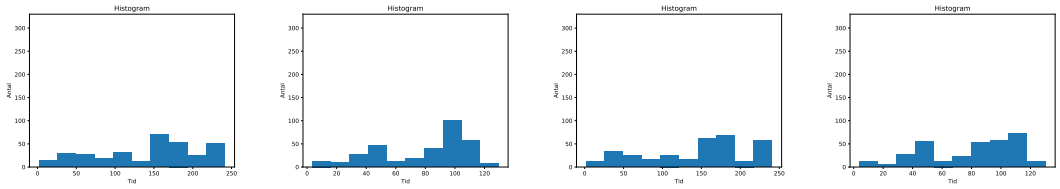


(e) $t = 26$ (f) $t = 27$ (g) $t = 28$ (h) $t = 29$

Figur 28: Restiderna i givna tidssteg för belastningsmodellen i modifikationen.

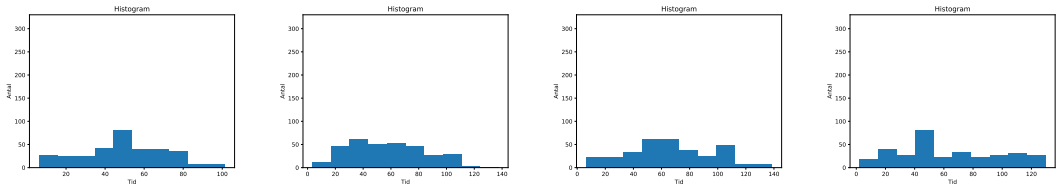


(a) $t = 1$ (b) $t = 2$ (c) $t = 3$ (d) $t = 4$

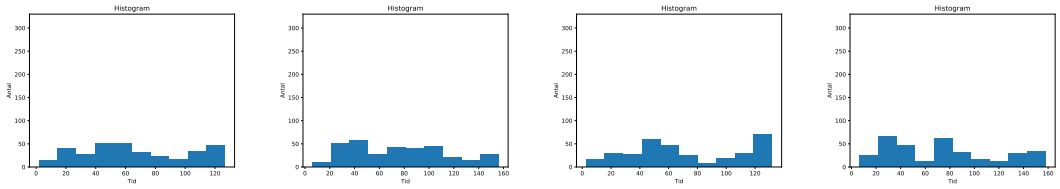


(e) $t = 26$ (f) $t = 27$ (g) $t = 28$ (h) $t = 29$

Figur 29: Restiderna i givna tidssteg för den irrationella modellen i modifikationen.



(a) $t = 1$ (b) $t = 2$ (c) $t = 3$ (d) $t = 4$



(e) $t = 26$ (f) $t = 27$ (g) $t = 28$ (h) $t = 29$

Figur 30: Restiderna i givna tidssteg för den approximativa modellen i modifikationen.

Referenser

[1] Biggs,L. N. *Discrete mathematics.* second edition, Oxford University Press

[2] Cormen,C. T., Leiserson,E. C., Rivest,L. R. & Stein. C. (2009) *Introduction to algorithms.* third Edition. The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England

[3] Ekström. J. (2005). *Trafikplanering under explicita miljö- och energikrav* (Masteruppsats). Utgivningssort: Institutionen för teknik och naturvetenskap, Linköpings universitet. Tillgänglig: https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:21390/FULLTEXT01.pdf

[4] Kleinberg. J & Tardos. E. (2006) *Algorithm design.* Cornell university. Pearson Education

[5] Kolata. G. (1990, 25 December). *What if They Closed 42d Street and Nobody Noticed?.* Dagstidning. Hämtad 2017-04-22 från http://www.nytimes.com/1990/12/25/health/what-if-they-closed-42d-street-and-nobody-noticed.html

[6] Kungliga tekniska högskolan (KTH). *Föreläsning 10 - Grafer, Dijkstra och Prim.* Hämtad 2017-04-17, från https://www.kth.se/social/upload/530374e3f2765479509291bf/F10GrafDijkstraPrim.pdf

[7] Maillé. P. & Tuffin. B. (2014) *Telecommunication network economics.* first edition, Cambridge University Press

[8] *Programming paradigm.* (11 April 2017). I Wikipedia. Hämtad 2017-04-17, från https://en.wikipedia.org/wiki/Programming_paradigm

[9] *Python (programming language).* (17 April 2017). I Wikipedia. Hämtad 2017-04-17, från //en.wikipedia.org/wiki/Python_(programming_language)

[10] Trafikverket. (2014). *Handbok för kapacitetsanalys med hjälp av simulering.* TRV2013/79994.

[11] Åbo Akademin. (2017). *Grafteori.* Hämtad 2017-03-15, från http://web.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/algebrab/kapitel1nyast.pdf