



Stockholms
universitet

Beräkning av pensionsskuld med deterministisk och stokastisk ränta

Magnus Weiderling

Masteruppsats 2017:1
Försäkringsmatematik
Mars 2017

www.math.su.se

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm

Beräkning av pensionsskuld med deterministisk och stokastisk ränta

Magnus Weiderling*

Mars 2017

Sammanfattning

Syftet med uppsatsen är att studera hur pensionsskulder beräknas och hur beräkningarna påverkas av de antaganden som görs avseende livslängd och ränta. I huvudsak på två sätt, dels genom att beräkna egna kommutationsfunktioner och dels genom att studera egenskaperna hos en stokastisk räntemodell. Den försäkringsmatematiska frågeställningen är därför hur man bör gå till väga för att beräkna en pensionsskuld enligt vissa givna antaganden. Vilket antagande som är det mest sanna är här sekundärt eftersom det viktiga är att följa de antaganden som en viss myndighet eller ett visst försäkringsbolag använder. Behovet uppstår när man vill jämföra två tjänstepensionsplaner med varandra eller retroaktivt kopiera en pensionsplan för en viss individ. Livslängdsantagandet i den här studien utgår från 2006 års dödlighetsundersökning (DUS [7]). För att kunna nyttja fördelarna med så kallade kommutationsfunktioner men inte vara begränsad av ett i vissa fall väl högt ränteantagande beräknas egna kommutationsfunktioner. Där framkommer att förväntad livslängd efter 65 år för en individ född på 1970-talet är omkring 23 år. Detta tillsammans med den årliga ränta som bedömts rimlig i nuvarande marknad om 2% ger ett så kallat delningstal på 18,34 för 65-åringar. De egna kommutationsfunktionerna har fått namnet MM16. Ränteantagandet behandlas dels deterministiskt och dels utifrån en stokastisk modell vid namn Hull-White. En del studier görs kring hur olika räntor förhåller sig till varandra och varför arbitragefrihet är ett vanligt antagande. Ingående data i räntemodellen Hull-White är spoträntor med olika löptider. Upprepade simuleringar har gjorts och resulterat i en mängd korträntor. Väntevärde och varians beräknas för dessa vid olika tidpunkter. Därefter visas schematiskt hur de olika ränteantagandena påverkar pensionsskuldens storlek. Nära förknippat med pensionsskulder är pensionsprognoser. Beroende på typ av försäkring kan pensionen vara given på förhand eller så har den viss variation. I de fall en prognos behöver göras har Pensionsmyndigheten tagit fram en instruktion som de kallar Prognosstandard som fått stort genomslag i branschen.

Nyckelord: Försäkringsmatematik, Aktuarie, Pensionsskuld, Livslängd, Ränta, Kommutationsfunktioner, M90, Delningstal, Hull-White.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.
E-post: magnus.weiderling@gmail.com. Handledare: Mathias Lindholm.

Abstract

English title: *Calculation of Pension Benefit Obligations - with deterministic and stochastic interest rate.*

This paper deals with the calculation of pension liabilities, in particular the mortality and interest rate assumptions that the calculations are based on. First by calculating new commutation functions och second by study the properties of the stochastic interest rate model Hull-White.

The studied mathematical question is therefor how to calculate a benefit according with given assumptions. Which assumptions is closest to the true value is a secondary question since the important part is to do the calculations in the same way as a certain authority or a certain insurance company. The need arise when you want to compare two different pension schemes or calculate a retroactive benefit according to a specific plan.

The mortality assumption is based on DUS 2006 ([7]) and from the calculated commutation functions we find an expected life length of about 23 years for a 65-year old individual born in the 1970's. This, together with the current estimated yearly interest rate at 2% returns a divisor for the capital of 18,34 for a 65-year old. The commutation functions in this paper are named MM16.

The interest rate assumption is treated first with a deterministic model and second with a stochastic model called Hull-White. Also included is studies of how different types of interest rates are related to each other and why the assumption of no-arbitrage is quite common and reasonable.

Incoming data in the Hull-White model consists of spot rates for different maturities. A number of simulations have been made and resulted in equally many short rates. Expected value and variance is calculated for different durations and schematic calculations of pension obligations from different interest rates assumptions are made.

Closely related to the pension obligation is the pension prognosis. The Standard of Prognosis written by the Swedish Pension Agency has had a large impact at the insurance business and this standard is treated in the final chapter.

Keywords: *Insurance mathematics, Actuary, Pension obligation, Pension liability, Life length, Interest rate, Commutation functions, M90, Hull-White.*

Förord

Denna uppsats¹ utgör ett masterarbete i försäkringsmatematik om 30 högskolepoäng² vid Stockholms Universitet. Uppsatsen kommer även att läggas fram för Svenska Aktuari förenings diplomnämnd som det sista steget inför ansökan om aktuari ediplom.

Arbetet med uppsatsen har varit mycket intressant och givande. Jag vill framförallt tacka min handledare *Mathias Lindholm*, Lektor i Matematisk Statistik vid Stockholms Universitet för stort stöd och bra idéer under arbetets gång, samt *Anders Aronsson*, Chefsanalytiker vid Max Matthiessen för alla goda råd och möjligheten att integrera delar av uppsatsarbetet med min tjänst vid Max Matthiessen.

Magnus Weiderling,

Aktuarie vid Max Matthiessen. Stockholm, 2016-10-18

www.math.su.se

www.maxm.se

¹Kodad i L^AT_EX genom <https://www.sharelatex.com?r=3cc992c6&rm=d&rs=b>

²Equivalent to 30 ECTS credits according to the *European Credit Transfer System*.

Innehåll

1	Inledning	5
1.1	Ränta	5
1.2	Disposition	6
2	Livslängd	7
2.1	Matematisk modell	7
2.2	Kommutationsfunktioner	11
2.3	Försäkringstyper	12
2.4	MM16	13
3	Deterministisk räntemodell	16
3.1	Ränta	16
3.2	Andra räntor	17
3.3	Obligationer	21
3.4	Räntekurva	22
4	Stokastisk räntemodell	23
4.1	Hull-White	23
4.2	Kalibrering	24
4.3	Simulering	28
4.4	Historisk ränta	31
4.5	PCA	32
4.6	Väntevärde och varians	35
4.7	Diskontering	36
5	Beräkning av pensionsskuld	39
5.1	Allmänt	39
5.2	För deterministisk modell	40
5.3	För stokastisk modell	42
5.4	Försäkringsredovisning	45
5.5	Prognosstandard	46
6	Avslutning	47
6.1	Diskussion	47
6.2	Framtida studier	48
	Appendix	49
	Referenser	56
	Symbolförteckning	57
	Sakregister	58

1 Inledning

Denna uppsats behandlar pensionsskulder och antaganden i samband med beräkning av dessa. En vanlig utgångspunkt är att låta beräkningen styras av de redovisningsregler som gäller medan tyngdpunkten i den här uppsatsen är beräkningarna som sådana och de antaganden som används.

Först ges här nedan några generella kommentarer till hur ränta används i den här texten och i vilken omfattning ränta antas vara ett känt begrepp sedan tidigare. Därefter studeras räntan vidare i Kapitel 3.

1.1 Ränta

Ett viktigt begrepp i alla pensionssammanhang är ränta eller mer allmänt avkastning. Beteckningarna följer i stort boken Livförsäkringsmatematik skriven av Gunnar Andersson, se [1] eller [2]. Detta innebär att en 1-årig *nominell ränta* betecknas i och därmed att ett visst kapital växer med faktorn $(1 + i)$ varje år. Sambandet mellan nominell ränta och *real ränta* ges, se Riksbanken [12], av

$$\text{real ränta} = \text{nominell ränta} - \text{inflation}$$

I den här uppsatsen görs ingen skillnad mellan nominell och real ränta utan den kortare beteckningen ränta används. Detta kan också uttryckas som att inflationen antas vara noll.

Med ränta menas också all typ av avkastning oavsett hur den uppstår. Försäkringsbolagens placeringar kan till exempel bestå av obligationer, aktier och fastigheter men detta paketeras och presenteras ofta som en enda ränta gentemot kunderna, se [14].

Om räntan *återinvesteras* ger det en exponentiell tillväxt (*ränta-på-ränta*). I och med det är det naturligt att använda sig av kontinuerlig ränteberäkningsteknik och då talar man istället om *ränteintensitet* (se Andersson [2] sid 6). Denna betecknas δ och förhåller sig till den 1-åriga räntan ovan genom sambandet

$$e^{\delta} = (1 + i) \tag{1}$$

Exempel 1. *Årlig ränta och ränteintensitet.*

Det gäller att en årsränta om $i = 0,02$ motsvarar en ränteintensitet om

$$\delta = \ln(1 + 0,02) \approx 0,019803$$

eller med andra ord

$$e^{0,019803} \approx 1,02$$

□

1.2 Disposition

Uppsatsen är gjord som en litteraturstudie och uppdelad enligt följande. I Kapitel 2 behandlas teori för livslängder och egna så kallade livslängdstabeller, döpta till MM16, tas fram.

Kapitel 3 behandlar olika räntor och räntebegrepp.

I Kapitel 4 introduceras variabel ränta genom en stokastisk räntemodell. Särskilt modellen Hull-White behandlas samt hur simulering utifrån denna kan göras undersöks.

Kapitel 5 sammanfattar resonemanget kring pensionsskuldsberäkningar med några olika exempel. Här ingår också bokföringsstandarden IAS 19 och Pensionsmyndighetens relativt nya standard för pensionsprognoser.

Det sista kapitlet innehåller analys och diskussion av resultatet.

Längst bak återfinns appendix, referenser, symbolförteckning och ett sakregister.

2 Livslängd

En pensionsskuld innehåller pensionsutbetalningar som förväntas ske vid olika framtida tidpunkter. De två dominerande antagandena när dessa utbetalningar värderas är *livslängdsantagandet* och *ränteantagandet* (Skandia [14] del 2, sid 4).

Lite allmänt uttryckt håller dödligheten nere värdet genom att utbetalningen bara sker om individen är vid liv och räntan håller nere värdet genom att kapitalet tillåts växa med ränta fram tills det är dags för utbetalning.

Intressant att notera är att matematiskt är dödlighet och ränta ungefär samma sak. Den som inte avlider under ett visst år har klarat av risken att avlida det året och den som får ränta har klarat av risken att företaget eller staten som ger ut räntan går i konkurs.

Storleksmässigt skiljer sig dessa åt genom att en vanlig 1-årig ränta typiskt är ett par procent medan en vanlig 1-årig *dödsrisk*, se Definition 3, är ett par promille. Förutom storleken så är räntan också viktig av två andra skäl. Det ena är att den, till skillnad mot dödlighet, går att påverka på flera sätt. Det andra är att den varierar mer än dödligheten.

En grundläggande idé med försäkring är riskutjämning. När det gäller pension är en av riskerna från försäkringsbolagets sida att den försäkrade lever längre än beräknat. Denna risk hanteras i stor utsträckning genom att de individer som lever kortare än genomsnittet betalar för de som lever längre än genomsnittet ([1] sid 258-259).

2.1 Matematisk modell

Pension utbetalas *temporärt* eller *livsvarigt*. För den som utlovar en livsvarig pension är det förstås av stor betydelse hur länge mottagaren förväntas leva.

Livslängdsantagandet anges i dessa sammanhang vanligen som en förväntad återstående livslängd för en person som är 65 år gammal. För att beräkna hur stora pensionsutbetalningarna blir givet ett visst kapital använder bland annat Pensionsmyndigheten *delningstal*, se [11] och definitionen nedan.

För en livsvarig pension motsvarar delningstalet i princip de återstående antal år individen förväntas leva. Normalt ingår också ränta i delningstalet och ju högre ränta desto lägre delningstal.

Definition 1 (Delningstal, Pensionsmyndigheten [11]). *Med delningstal menas det antal utbetalningsår en individs pensionskapital ska fördelas över med hänsyn tagen till ränta och dödlighet.*

□

Hur länge en individ lever beror på många faktorer men bland de som i försäkrings-

sammanhang anses rimliga att observera finns kön, ålder och födelsetid. Beräkningar av delningstal i den här uppsatsen är, på samma sätt som hos Pensionsmyndigheten, *könsneutrala* vilket innebär att ett pensionskapital utbetalas i samma takt för kvinnor och män. Ser man till en hel population beror förväntad livslängd i denna därmed också på fördelningen mellan kvinnor och män.

Med ålder förhåller det sig så att ju äldre man blir desto större är risken att dö. Men det är också så att ju äldre man blir desto längre total livslängd kan man förvänta sig. Är man exempelvis 65 år har man klarat av en del faror på vägens som bland annat spädbarnsdödligheten. Statistik visar också att livslängderna i Sverige ökar (DUS [7]). Därmed kan en individ som är född på 1970-talet förvänta sig längre livslängd än en som är född på 1950-talet.

Innan vi börjar räkna behöver några begrepp undersökas. Vi börjar med att definiera återstående livslängd. Beteckningarna följer Kapitel 2 i Andersson [2].

Definition 2 (Återstående livslängd, [2] sid 55). *Låt t vara förfluten tid och T_x den återstående livslängden för en individ som är x år gammal. Fördelningsfunktionen för T_x skrivs som*

$$F_x(t) = P(T_x \leq t) , \quad t \geq 0$$

□

För att formulera en återstående livslängd om minst t år, alltså sannolikheten att en x -årig individ lever i t år till, används *överlevelsefunktionen* l_x , och det gäller att

$$l_x(t) = P(T_x > t) = 1 - F_x(t) = \frac{l_0(x+t)}{l_0(x)} \quad (2)$$

Eftersom återstående livslängd är en stokastisk variabel som skiljer sig mellan olika individer är det framförallt väntervärdet, alltså förväntad återstående livslängd, som är intressant. Denna betecknas e_x och ges av (se Andersson [2] sid 63)

$$e_x = E[T_x]$$

Av tradition och praktiska skäl är risken att avlida inom precis ett år viktig. Vi definierar den *1-åriga dödsrisken* nedan.

Definition 3 (Dödsrisk, [1] sid 51). *Den 1-åriga dödsrisken q_x vid åldern x år definieras som*

$$q_x = P(T_x \leq 1)$$

□

Sambandet mellan den 1-åriga dödsrisken q_x och överlevelsefunktionen l_x ges (Andersson [1] sid 84) av

$$l_0(x) = \prod_{i=0}^{x-1} (1 - q_i) \quad (3)$$

Den dominerande livslängdsmodellen i Sverige är uppkallad efter *William Makeham* och bygger på *dödlighetsintensiteter*. Modellen är bestämd genom de tre parametrarna α , β och γ och ger dödlighetsintensiteter, μ_x , genom

$$\mu_x = \alpha + \beta e^{\gamma(x-f)} \quad (4)$$

där x som tidigare är ålder och f är en åldersförskjutning för man/kvinna.

Dödsrisken (Definition 3) och dödlighetsintensiteten (4) förhåller sig till varandra genom ett approximativt samband som enligt Andersson [2] ges av

$$q_x \approx \frac{\mu_{x+1/2}}{1 + \frac{\mu_{x+1/2}}{2}} \quad (5)$$

Exempel 2. År 1990 gjordes en större svensk studie där förslag på Makeham-parametrar presenterades. Modellen kom att kallas M90 och ser ut som följer³

$$\alpha = 0,001$$

$$\beta = 0,000012$$

$$\gamma = 0,101314$$

Åldersförskjutningen sattes till $f = 0$ för man och $f = 6$ för kvinna. Sedan år 2012 kräver lagen könsneutrala premier för de flesta pensionsförsäkringar, i dessa fall använder man ofta $f = 3$. Vi återkommer till M90 längre fram.

□

I en senare studie, kallad DUS 2006, se [7], togs åldersförskjutningen f bort helt. Istället gjordes en parameteruppsättning för man och en för kvinna. Parametrarna i denna skiljer sig också beroende på födelsetid. De olika parameteruppsättningarna som nämnts ovan sammanfattas i Tabell 1 nedan.

³Ibland är parametrarna angivna i basen 10 istället för basen e .

Modell	α	β	γ
M90 - man / kvinna	0,0010	0,000012000	0,101314
DUS 2006 - man, 70-tal	0,0011	0,000000147	0,152000
DUS 2006 - kvinna, 70-tal	0,0011	0,000000129	0,150000
DUS 2006 - snitt, 70-tal	0,0011	0,000000138	0,151000

Tabell 1: Översikt parametrar.

I samma undersökning, DUS 2006, gjordes också beräkningar av förväntade återstående livslängder vid 65 års ålder fördelat på *kohorter*⁴, se Tabell 2.

Återstående livslängd, vid 65 år	Man	Kvinna
Generellt	20,2 år	23,1 år
Född 1910-tal	16,0 år	19,9 år
Född 1920-tal	16,7 år	20,5 år
Född 1930-tal	18,4 år	21,9 år
Född 1940-tal	19,6 år	22,8 år
Född 1950-tal	20,8 år	23,5 år
Född 1960-tal	21,6 år	24,1 år
Född 1970-tal	22,6 år	24,5 år
Född 1980-tal	23,5 år	24,5 år

Tabell 2: Förväntade återstående livslängder, DUS 2006.

Det framgår av tabellen att kvinnor generellt lever längre än män. Tabellen indikerar också tydligt att genomsnittlig livslängd har ökat under 1900-talet.

Den kombination av antaganden som bildar M90 innehåller både antaganden för ränta och livslängd medan DUS 2006 bara är ett livslängdsantagande. Genom att kombinera livslängden från DUS 2006 med en egen ränta kan vi beräkna ett nytt paket med antaganden som fått namnet MM16, se Kapitel 2.4.

Värdena i tabellen ovan kan ses som delningstal, se Definition 1, utan ränta och kan gärna jämföras med de delningstal som beräknas längre fram, för att få en uppfattning om känsligheten i ränteantagandet.

⁴Individer med samma eller näraliggande födelseår.

2.2 Kommutationsfunktioner

Vid praktisk räkning underlättar det att använda sig av *kommutationsfunktioner*. Dessa är hjälpfunktioner för att beräkna kapitalvärden med hänsyn tagen till ränta och dödlighet. Det ger möjligheten att (mer eller mindre) genom huvudräkning ta fram ett pris på en pensionsförsäkring. Kommutationsfunktionerna är tre till antalet och benämns

$D(x)$ = de levandes diskonterade tal

$N(x)$ = summan av de levandes diskonterade tal

$M(x)$ = de avlidnas diskonterade tal

Eftersom pensionsförsäkringar är försäkringar mot att leva länge är $M(x)$ av mindre intresse här och behandlas inte vidare. De övriga två definieras enligt

Definition 4 (Kommutationsfunktioner, [1] sid 119). *Låt δ vara en konstant för ränteintensiteten. Kommutationsfunktionerna $D(x)$ och $N(x)$ definieras för åldern $x \geq 0$ som*

$$D(x) = l(x) \cdot e^{-\delta x}$$

$$N(x) = \int_x^\infty D(t) dt$$

□

I M90 används en ränteintensitet om $\delta = 0,026559$ vilket motsvarar ungefär 2,7% i årlig ränta efter försäkringsbolagets avgifter eller 3% före avgifter. Vid denna studies beräkning av delningstal och kommutationsfunktioner kommer $\delta = 0,019803$ användas vilket motsvarar en ränta om $i = 2\%$ utan avgifter, beräknad enligt (1).

När δ är bestämd kan $D(x)$ beräknas direkt från Definition 4 medan $N(x)$ beräknas genom att använda *Euler-Maclaurins summationsformel*, (Andersson [1] sid 122)

$$N(x) \approx \sum_{i=0}^w D(x+i) - \frac{D(x)}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \delta)D(x) \quad (6)$$

där summationens övre gräns w fått ersätta ∞ från integralen ovan vilket inte är någon större begränsning, eftersom sannolikheten att en individ blir äldre än säg $w = 120$ år är försumbar.

Utförliga tabeller för dessa, beräknade enligt M90 finns i Appendix sid 49 - 52.

För att kommutationsfunktionerna ska kunna användas fullt ut behöver de olika pensionsförsäkringarna kategoriseras. Detta görs nedan.

2.3 Försäkringstyper

De grundläggande egenskaperna hos en pensionsförsäkring kan beskrivas genom en indelning i *temporär* eller *livsvarig* utbetalning samt *genast börjande* eller *uppskjuten* utbetalning. De fyra olika varianterna (urval från Andersson [1] sid 118) listas nedan:

1. En **livsvarig**, genast börjande pensionsförsäkring innebär av att det utbetalas 1 kr per år så länge den försäkrade lever.
2. En **temporär**, genast börjande pensionsförsäkring innebär av att det utbetalas 1 kr per år så länge den försäkrade lever men högst i s år.
3. En **livsvarig**, uppskjuten pensionsförsäkring innebär av att det utbetalas 1 kr per år med början om m år så länge den försäkrade lever.
4. En **temporär**, uppskjuten pensionsförsäkring innebär av att det utbetalas 1 kr per år med början om m år så länge den försäkrade lever men högst i s år.

Med hjälp av kommutationsfunktionerna från Kapitel 2.2 låter sig alla dessa lätt beräknas.

Om vi studerar den första varianten lite närmare (en genast börjande livsvarig pensionsförsäkring, se punkt 1 ovan) så gäller (Andersson [1] sid 150) att nuvärdet av utbetalningarna kan beräknas med hjälp av kommutationsfunktioner utifrån

$$\frac{N(x)}{D(x)} \cdot \text{utbetalningsbelopp} \quad (7)$$

När detta värde utbetalas med 1 kr per år sammanfaller nuvärdet med det antal år kapitalet utbetalas under, det vill säga delningstalet, se Definition 1. Exemplet nedan illustrerar hur det ser ut med värden från M90.

Exempel 3. *En pensionsförsäkring för en 65-årig man med ett löfte om 1 kr/år i livsvarig pension har (enligt M90 som har ungefär 2,7% årlig ränta) ett nuvärde om*

$$\frac{N(65)}{D(65)} = [\text{enligt M90 man, sid 51}] = \frac{2,3452}{0,1530} \approx 15,33 \text{ kr}$$

Eller med andra ord så är nuvärdet av 1 kr i livsvarig utbetalning från 65 års ålder 15,33 kr.

□

2.4 MM16

I det här kapitlet beskrivs beräkningen av egna kommutationsfunktioner. Poängen är möjligheten att kunna välja räntan fritt efter aktuella försäkringsvillkor eller rådande ränteläge.

En ränta om $i = 0,02$ har använts i beräkningen och resultatet för individer födda under 1970-talet redovisas här medan resultatet för individer födda under 1950- och 1960-talet återfinns i appendix.

Beräkningsstegen sammanfattas i de sex punkterna nedan:

1. Beräkna μ_x för alla åldrar med parametrar från DUS 2006, sista raden i Tabell 1.
2. Beräkna q_x för alla åldrar med hjälp av (5).
3. Beräkna l_x för alla åldrar med hjälp av (3) och att $l(0) = 1$.
4. Beräkna $D(x)$ för alla åldrar med hjälp av Definition 4 och $\delta = 0,019803$ vilket motsvarar 2% i årlig ränta.
5. Beräkna $N(x)$ för alla åldrar med hjälp av (6).
6. Utför divisionen $N(x)/D(x)$.

Resultatet visas nedkortat i tabellen nedan. Alltså med en ränta om 2% och parametrar från DUS 2006 får man för en individ född under 1970-talet tabeller för $N(x)$, $D(x)$ och delningstal $\frac{N(x)}{D(x)}$ enligt följande

Ålder	N(x)	D(x)	Delningstal
...	...	...	...
55	7,4703	0,3156	23,67
56	7,1581	0,3089	23,18
57	6,8525	0,3023	22,67
58	6,5535	0,2958	22,16
59	6,2609	0,2894	21,64
60	5,9747	0,2831	21,11
61	5,6947	0,2769	20,57
62	5,4209	0,2707	20,02
63	5,1532	0,2647	19,47
64	4,8915	0,2587	18,91
65	4,6358	0,2527	18,34
66	4,3860	0,2468	17,77
67	4,1420	0,2410	17,19
68	3,9040	0,2351	16,61
69	3,6718	0,2292	16,02
70	3,4454	0,2234	15,42
...	...	...	...

Tabell 3: MM16, 2% ränta, könsneutralt 1970-tal.

Begreppet ränta behandlas vidare i nästa kapitel men exemplet nedan visar hur de olika formlerna i detta kapitel kan användas och hur man med hjälp av kommutationsfunktioner också kan beräkna hur mycket ett kapital växer med avseende på ränta och dödlighet.

Med K_x avses kapitalet vid åldern x och med K_{x+m} avses kapitalet vid åldern $x + m$.

Exempel 4. Beräkna kapitalvärdet K_{55} om $K_{65} = 1$ kr, $m = 10$ år, räntan är 2% med livslängd enligt MM16 1970-tal.

Sannolikheten att bli 65 år givet att man är 55 år ges med hjälp av (2) av

$$\frac{l_0(x+m)}{l_0(x)} = \frac{l_0(65)}{l_0(55)}$$

Tillväxten från ränta under 10 år fås med hjälp av (1) genom (se även Kapitel 3)

$$(e^\delta)^m = e^{\delta m}$$

Tillsammans ger det

$$K_{55} = \frac{l_0(x+m)}{l_0(x)} \cdot e^{\delta m} = \frac{l(x+m)}{l(x)} \cdot \frac{e^{-\delta(x+m)}}{e^{-\delta x}} = [\text{enligt Definition 4}] = \frac{D(x+m)}{D(x)}$$

vilket i sin tur efter avläsning i tabeller ger

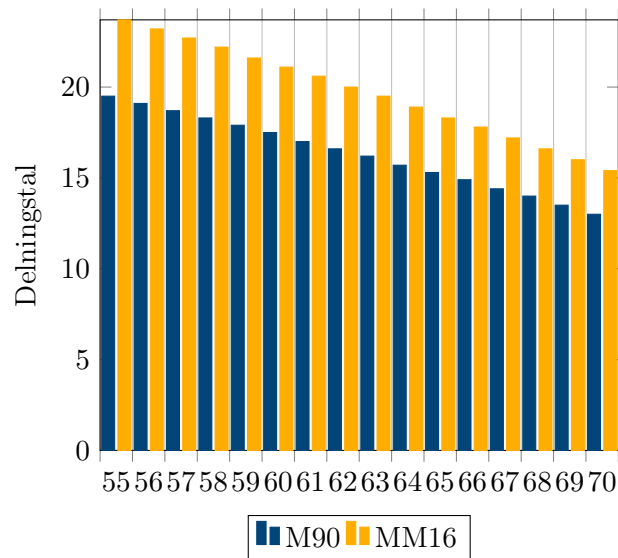
$$K_{55} = \frac{D(x+m)}{D(x)} = \frac{D(65)}{D(55)} = [\text{enligt Tabell 3}] = \frac{0,2527}{0,3156} \approx 0,8007 \text{ kr}$$

Annorlunda uttryckt är 0,8007 kr efter 10 år värt 1 kr, om man tar hänsyn till ränta och dödlighet.

□

Därmed avslutas detta kapitel om livslängdsantagandet och vi går över till ränteantagandet. I nästa kapitel studeras räntan då den är konstant medan kapitlet därefter undersöker hur räntan kan tillåtas variera genom att använda en stokastisk räntemodell.

En graf över skillnaden i delningstal mellan de olika modellerna M90 och MM16 visas nedan i Figur 1.



Figur 1: Jämförelse av delningstal per ålder

3 Deterministisk räntemodell

En matematisk modell där utfallet går att förutse, givet tillräcklig information, kallas deterministisk. Det finns med andra ord ingen stokastisk variation i modellen. Att anta en konstant ränta om 2%, som i föregående kapitel, är exempel på en deterministisk modell.

I den här uppsatsen antas räntan generellt vara positiv men negativ ränta tillåts i simuleringarna längre fram. Med ränta menas fortfarande, se även sid 5, den genomsnittliga avkastning en pensionsförsäkring kan tillgodoräkna sig oavsett i vilka tillgångar pensionskapitalet har placerats. Eftersom obligationer är det mest intressanta matematiskt antas räntan vid beräkningarna här komma från dessa.

Räntebegreppet har delvis behandlats i föregående kapitel men görs mer utförligt här.

3.1 Ränta

Räknar man framåt i tiden får man det förräntade värdet (slutvärdet). Räknar man bakåt i tiden får man det diskonterade värdet (nuvärdet).

Vid beräkningar kan man använda *rak ränta* eller *sammansatt ränta* (Filipović [4] sid 8). Vid räkning med sammansatt ränta kan man använda *diskret teknik* eller *kontinuerlig teknik*. Förhållandet mellan dem syns i (1). Det finns för- och nackdelar med båda.

Fördelen med kontinuerlig teknik är främst att den har trevliga matematiska egenskaper. Fördelen med diskret teknik är att den passar bättre till inbetalningar av premier och utbetalning av pension som ju sker diskret (månadsvis).

När man anger en ränta (t.ex. $i = 0,04$) avser man underförstått för en viss period (vanligen 1 år). Den ränteperioden kan i sin tur innehålla en eller flera (n stycken) *ränteutbetalningar*.

Ju oftare man får utbetalning av ränta (avkastning) desto oftare kan den återinvesteras och därmed i slutändan ge mer ränta⁵. Ett omatematiskt men illustrativt sätt att uttrycka det är (se också Hull [8] sid 78)

$$\text{årlig ränteutbetalning} < \text{månad} < \text{dag} < \text{kontinuerlig ränteutbetalning}$$

Nedan följer exempel på ränteberäkningar för rak respektive sammansatt ränta.

⁵A. Einstein lär ha benämnt sammansatt ränta som världens åttonde underverk.

Exempel 5. *Rak ränta.*

- (i) Ett startkapital $K_0 = 1$ kr är, med en årsränta om $i = 0,04$, efter 1 år värt $K_1 = K_0(1 + 0,04 \cdot 1) = 1,04$ kr.
- (ii) Ett startkapital $K_0 = 1$ kr är, med en årsränta om $i = 0,04$, efter 2 år värt $K_2 = K_0(1 + 0,04 \cdot 2) = 1,08$ kr.

□

Exempel 6. *Sammansatt ränta.*

- (i) Ett startkapital $K_0 = 1$ kr är, med en årsränta om $i = 0,04$, efter 1 år värt $K_1 = K_0(1 + 0,04)^1 = 1,04$ kr.
- (ii) Om förräntning sker kvartalsvis, $n = 4$, blir värdet $K_0(1 + \frac{0,04}{4})^4 \approx 1,04060$ kr.
- (iii) Om förräntning sker månadsvis, $n = 12$, blir värdet $K_0(1 + \frac{0,04}{12})^{12} \approx 1,04074$ kr.

Skillnaden kan tyckas liten men blir förstås avgörande efter tillräckligt lång tid eller med tillräckligt stort startkapital.

□

Från ovanstående följer att flerårig förräntning, där n är år, ges av

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} \quad (8)$$

vilket är det diskonterade värdet av K_n och $\frac{1}{(1+i)^n}$ kallas *diskonteringsfaktorn*.

3.2 Andra räntor

Det finns ett flertal finansiella instrument kopplade till räntor. Med korta räntor brukar man avse löptider upp till ett år (kallat *penningmarknaden*) och med långa räntor löptider över ett år (kallat *obligationsmarknaden*).

Både korta och långa räntor har en omedelbar starttidpunkt. Det finns också räntor som har en uppskjuten starttidpunkt. Dessa kallas *forwardräntor* (eller *terminsräntor*). Ett forwardräntekontrakt är sådant att det signeras idag men betalning sker någon gång i framtiden.

Det är rimligt och vanligt att anta att de olika räntorna förhåller sig till varandra på ett sådant sätt att det inte går att göra riskfri vinst, så kallat *arbitrage*. Om det omvända skulle gälla, till exempel att två på varandra följande 6-månaders räntor gav mer avkastning än en 1-års ränta, så skulle intresset för att köpa 1-års kontraktet sjunka och dess pris pressas nedåt. Vilket är marknadens sätt att få den arbitragemöjlighet som finns att upphöra.

Definition 5 (Arbitrage, Filipović [4] sid 1). *Med arbitrage menas att det summerade kassaflödet (i samband med, och till följd) av en investering*

(i) *inte blir negativt i något fall (förlust) och därutöver*

(ii) *blir positivt i minst ett fall (vinst).*

□

Om man exempelvis utan några som helst risker kunde låna in kapital till 2% ränta och låna ut kapital till 3% ränta så finns det vinst i form av arbitrage att göra. Upplägget är vanligt hos banker men eftersom bankverksamhet är förknippad med risker är det inte rent arbitrage.

Från ett matematiskt perspektiv finns minst tre grundläggande typer av räntor. Dessa definieras nedan och benämns spotränta, kortränta och forwardränta. Terminologin är tydligare på engelska men notera att en kortränta (nedan) inte är detsamma som en kort ränta. Alla räntor nedan avser årliga räntor när man beräknar avkastning, skillnaden består i att korträntan prissätts kontinuerligt medan exempelvis den 1-åriga spoträntan är konstant under året.

Definition 6 (Spotränta, Filipović [4] sid 15). *Med spotränta, $r(t, T)$, avses en årlig ränta som börjar löpa omedelbart ("on the spot") vid t och löper fram till T . Spoträntan är okänd, och går inte handla, före tiden t .*

□

Spoträntorna brukar ha olika namn som 3-månaders ränta, 2-års ränta och så vidare. Detta syftar bara på hur länge räntan gäller och när de kvantifieras relateras de alltid till en årlig ränta. Med det menas att om 2-års räntan är 2% så ges 2% under det första året och därefter 2% till under det andra året.

Definition 7 (Kortränta, Filipović [4] sid 7). *Med kortränta, $r(t)$, avses en årlig ränta med godtycklig starttid $t \geq 0$, och oändligt kort löptid. Korträntan är en teoretisk konstruktion och finns inte att handla på marknaden, men kan närmast liknas vid 1-dagsräntan.*

□

Ovanstående innebär att man räknar med att en kortränta om 2% efter en dag har avkastat $2\% \cdot \frac{1}{365}$, eller $2\% \cdot \frac{1}{360}$ om man föredrar de lite jämnare bråken där månad är 30 dagar och kvartal är 90 dagar.

Definition 8 (Forwardränta, Filipović [4] sid 6). *Med forwardränta, $f(t, S, T)$, avses en ränta som handlas (avtalet ingås) vid tiden t men ger avkastning i ett framtida tidsintervall, från $S \geq t$ till $T \geq S$. Kapitalet är alltså egentligen endast bundet under tiden (S, T) .*

□

Vi inför också ett förkortat skrivsätt för den *momentana forwardräntan* (Filipović [4] sid 7), som har oändligt kort löptid,

$$f(0, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(0, t, t + \Delta t) \quad (9)$$

Ett samband mellan korträntan och forwardräntan ges av att $r(t) = f(t, t)$, se till expempel [4] sid 9, medan sambandet mellan spotränta $r(t, T)$ och forwardränta ges av $r(t, T) = f(t, t, T)$.

I och med detta har vi de ingående delarna i den stokastiska räntemodellen Hull-White som presenteras i nästa kapitel (se Kapitel 4.1). Själva modellen simulerar korträntor. Innan obligationer behandlas i nästa avsnitt studeras här sambanden mellan olika räntor.

Eftersom både spoträntor och forwardräntor handlas på marknaden behöver de kunna prissättas, vilket är detsamma som att beräkna det diskonterade värdet.

Om ett spoträntekontrakt med tillhörande spotränta $r(t, T)$ för perioden (t, T) ger 1 kr vid löptidens slut ges dess pris idag $P(t, T)$, dvs diskonteringsfaktorn, jämför uttrycket (8), av

$$P(t, T) = \frac{1}{(1 + r(t, T))^{T-t}} \quad (10)$$

Om man istället för att köpa ett spoträntekontrakt för hela perioden (t, T) delar upp perioden och köper ett spoträntekontrakt vid t och ett till ett år senare vid S , med löptiderna (t, S) respektive (S, T) , där som tidigare $t < S < T$, så är

nuvärdet vid t av 1 kr vid S , se (10)

$$P(t, S) = (1 + r(t, S))^{-(S-t)}$$

nuvärdet vid t av 1 kr vid T , se (10)

$$P(t, T) = (1 + r(t, T))^{-(T-t)}$$

Men den senare finns inte att köpa utan det återstår att beräkna nuvärdet vid S av 1 kr vid T som ges av

$$\frac{(1 + r(t, T))^{-(T-t)}}{(1 + r(t, S))^{-(S-t)}} = \frac{P(t, T)}{P(t, S)}$$

Eftersom värdet av de två spoträntekontrakten ska motsvara 1 kr vid T behöver kapitalet under intervallet (S, T) växa med

$$\frac{P(t, S)}{P(t, T)} \quad (11)$$

På grund av antagandet om icke-arbitrage hade denna investering också kunnat göras med ett forwardräntekontrakt med ränta $f(t, S, T)$ och eftersom all avkastning för ett sådant ges under (S, T) gäller att

$$(1 + f(t, S, T))^{T-S} = \frac{P(t, S)}{P(t, T)} \quad (12)$$

Vi studerar det med ett praktiskt exempel.

Exempel 7. *Antag ett tidsintervall om 0–2 år. Från beteckningarna ovan sätter vi $t = 0$, $S = 1$, $T = 2$. Antag också att den 1-åriga spoträntan är 2% och den 2-åriga spoträntan är 3% (per år).*

De möjliga investeringarna är antingen ett 2-årigt spoträntekontrakt eller två stycken 1-åriga spoträntekontrakt. Den 1-åriga spoträntan om 1 år finns inte att köpa idag, vid $t = 0$, och är därmed okänd men beräknas i detta exempel.

Vi får att

$$P(0, S) = (1 + 0,02)^{-(1-0)} = 0,980392$$

$$P(0, T) = (1 + 0,03)^{-(2-0)} = 0,942596$$

Kapitalets tillväxt (11) under (S, T) är okänd vid $t = 0$ men kan beräknas genom

$$\frac{P(0, S)}{P(0, T)} = 1,040098$$

Löser vi också ut forwardräntan, från (12), fås

$$f(0, S, T) = 1,040098 - 1 \approx 4,01\%$$

Eftersom det skiljer precis ett år mellan S och T fås en årlig ränta. Antagandet om icke-arbitrage, Definition 5, gav alltså lösningen genom uttrycket

$$(1 + r(0, S)) \cdot (1 + f(0, S, T)) = (1 + r(0, T))^2$$

eller uttryckt i siffror

$$1,02 \cdot 1,040098 = 1,03 \cdot 1,03$$

Slutsatsen blir, i linje med antagandet, att två stycken efterföljande 1-åriga investeringar ger samma avkastning som en 2-årig investering.

□

3.3 Obligationer

Den vanligaste typen av spoträntekontrakt, se föregående avsnitt, är obligationer. De prissätts bland annat efter det ränteläge som råder. Efter en viss tid, *löptiden*, förfaller obligationen och investeraren får tillbaka det *nominella värdet*. Om man har köpt en obligation och marknadsräntan stiger så sjunker värdet på obligationen, eftersom det finns nyare och bättre obligationer att köpa.

Definition 9 (Obligation, Filipović [4] sid 5). *En obligation är ett lån i form av ett värdepapper där utgivaren förbinder sig att vid förfallodatum T lösa in obligationen till dess nominella värde. Under löptiden utbetalas en på förhand bestämd ränta. Räntan förfaller till betalning vid bestämda tidpunkter. Förfall av ränta kallas kupong. Om inga kuponger utges kallas obligationen nollkupongobligation och all avkastning kommer från skillnaden i inköpspris och försäljningspris.*

□

En nollkupongobligation prissätts på samma sätt som spoträntekontrakten i föregående avsnitt. Antag att det nominella värdet är 1. Att beräkna priset är det samma som att nuvärdesberäkna framtida betalningar som ges från obligationen. En nollkupongobligation har bara en framtida utbetalning. Om vi befinner oss vid tiden t och förfallodatum är T och obligationens ränta (*spotränta*, se avsnitt 3.2) är $r(t, T)$ så gäller att obligationens pris som tidigare ges av (10).

Marknaden för nollkupongobligationer är mycket begränsad i Sverige. Svenska staten använder för sitt kapitalbehov på kort sikt (mindre än ett år) statsskuldväxlar (SSVX) och på medellång och lång sikt statsobligationer (SSO). Statsskuldväxlar brukar inte ha kupong medan statsobligationer brukar ha det.

Ovanstående två obligationstyper ges ut av Riksgälden, se [13]. I Tabell 4 nedan finns auktionshistorik för några sådana obligationer. Eftersom staten är långivare finns "ingen" kreditrisk och räntan som dessa löper med brukar kallas för den riskfria räntan.

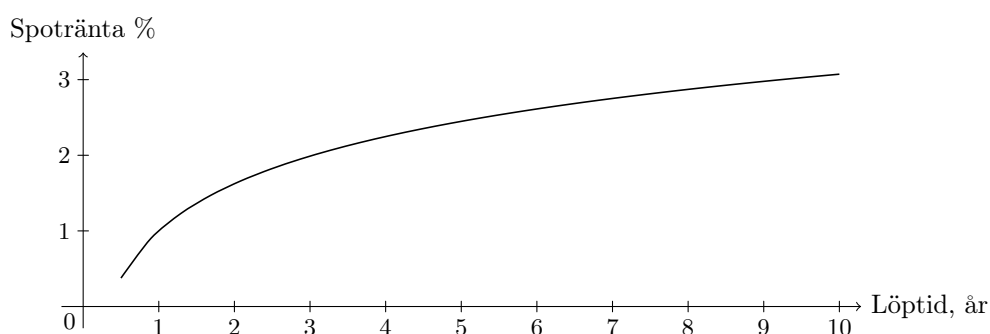
Instrument	Förfall	Kupong	Snittränta	Pris	Nominellt
SSVX, 2-månaders	2016-05-18	0,00%	-0,6191%	100,141	100
SSO 1057, 7-åring	2023-11-13	1,50%	0,3718%	108,539	100
SSO 1059, 10-åring	2026-11-12	1,00%	0,8357%	101,672	100
SSO 1056, 16-åring	2032-06-01	2,25%	1,3307%	113,376	100

Tabell 4: Auktionshistorik för obligationer.

3.4 Räntekurva

Istället för att lista räntor för obligationer som i Tabell 4 är det vanligt att använda en *räntekurva* med spoträntor, även kallat *nollkupongräntekurva* (Filipović [4] sid 15).

Räntekurvan utgår från obligationer utan kupong och kan skapas utifrån Tabell 4 ovan efter omräkning för kuponger. Se illustration i Figur 2 nedan, med spotränta på y -axeln och löptid på x -axeln. Normalt är kurvan växande men planar ut vid någon högsta ränta. För att kurvan ska vara meningsfull bör obligationerna vara likvärdiga riskmässigt. Kurvan visar således vilka investeringar som går att välja mellan idag men bestämmer inte hur ränteläget ser ut om 5 eller 10 år.



Figur 2: Räntekurva för nollkupongobligationer

Finansinspektion (FI) publicerar månadsvis, sedan november 2013, sådana här diskontingsräntekurvor för försäkringsbranschen. Till FI:s numera upphävda författningssamling FFFS 2013:23⁶ finns beräkningsregler och förklaringar till de publicerade räntekurvorna (FI [5]). Exempelvis framgår att den långsiktiga forwardräntan ska vara 4,2% härrörande från ett inflationsantagande om 2% och en real ränta om 2,2% (jämför sid 5). De publicerade räntekurvorna sträcker sig visserligen 100 år framåt i tiden men redan efter 10 år ges marknadsräntorna lägre vikt till förmån för den långsiktiga forwardräntan enligt ovan. Efter 20 års löptid ges inte längre marknadsräntor någon vikt vid bestämning av kurvan.

EIOPA⁷, som är en EU-myndighet för försäkringstillsyn, publicerar liknande kurvor för flertalet länder, inklusive Sverige. Även där används en *ultimate forward rate* om 4,2% och en så kallad *last liquid point* för marknadspriser på obligationer om 10 år. Noterbart är att Sverige getts den högsta konvergenshastigheten mot nivån 4,2% av alla 52 länder som redovisas. Det betyder att räntan ökar tämligen raskt mot 4,2% för varje år som löptiden ökas.

⁶<http://www.fi.se/sv/vara-register/sok-fffs/2013/201323/>

⁷<https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/>

4 Stokastisk räntemodell

En matematiskt naturlig utvidgning av den deterministiska modellen från föregående kapitel är att lägga till en stokastisk komponent. I och med detta kan man simulera räntans utveckling. Det innebär i sin tur att slumpen påverkar räntekurvans utseende.

Det finns två huvudinriktningar på modeller av den här typen. Den ena typen simulerar forwardräntan medan den andra simulerar korträntan (Definition 7, 8). Den senare behandlas i nästa avsnitt genom den stokastiska räntemodellen *Hull-White* medan den förra kommenteras kort i Kapitel 6.

4.1 Hull-White

Hull-White är en modell för att simulera korträntan $r(t)$ som funktion av tiden t . Den presenterades av John Hull och Alan White på 1990-talet⁸. Bland fördelarna med denna modell är att den har analytisk lösning och det går tämligen fort att genomföra simuleringar. Bland nackdelarna kan nämnas att korträntemodeller tenderar att vara något svårare att relatera till på grund av korträntebegreppet (Hull [9]).

Modellen skrivs (Filipović [4] sid 90 och Hull [8] sid 691-693) enligt

Definition 10 (Hull-White). *Den stokastiska räntemodellen Hull-White definieras som differentialen*

$$dr(t) = [\theta(t) - \alpha r(t)]\Delta t + \sigma \cdot dW(t) \quad (13)$$

där,

$dr(t)$ = förändring i kortränta

Δt = förändring i tid

$\theta(t)$ = forwardränta vid t , enligt räntekurva för nollkupongobligationer, se Kapitel 3.4

α = konstant som anger i vilken takt $r(t)$ återgår till $\theta(t)$ (Hull [8] sid 692)

σ = konstant för volatilitet i %

$W(t)$ = Wienerprocess (se vidare Hull [8] sid 282-286)

□

Konstanterna α och σ estimeras antingen utifrån aktuella marknadsnoteringar på räntekontrakt eller från historisk data [9]. Detta kallas att kalibrera modellen vilket undersöks närmare i nästa kapitel.

⁸Modellen benämns ibland som 'the extended Vasicek model'

4.2 Kalibrering

Hull-White modellen påverkas först och främst av vilken räntekurva som används. Näst efter det beror den av parameterintervalen. Modellen kalibreras med hjälp av parametrarna för *drift* och *volatilitet*. Drift motsvarar förväntad avkastning per tidssteg och volatilitet motsvarar standardavvikelse i förväntad avkastning per tidssteg (Filipović [4] sid 33, 90).

Precis som i tidigare avsnitt kommer fokus att vara på hur kalibreringen görs snarare än att bestämma parametrar. Det beror på att syftet inte är bestämma en faktisk pensionsskuld för ett visst försäkringsbestånd. Men det har också att göra med att i det fall Hull-White modellen används för att prissätta optioner eller räntekontrakt på en börs är kalibreringen oerhört viktig eftersom prissättningen görs kontinuerligt i realtid, men för ett försäkringsavtal är det inte lika tvärs kast. Vanligt är istället att försäkringsbolaget inte får ändra beräkningsräntan så länge försäkringen gäller och om räntan ändras så gäller det bara framtida premier.

Kalibreringen här görs utifrån de förutsättningar som gavs i föregående avsnitt. Framförallt att drift och volatilitet är konstanta och inte beroende av tiden. Att låta parametrarna vara beroende av tiden gör att man kan få en bättre anpassning, nackdelen är att risken för överparametrisering ökar (se [9]). Valmöjligheterna man har sammanfattas i punkterna nedan,

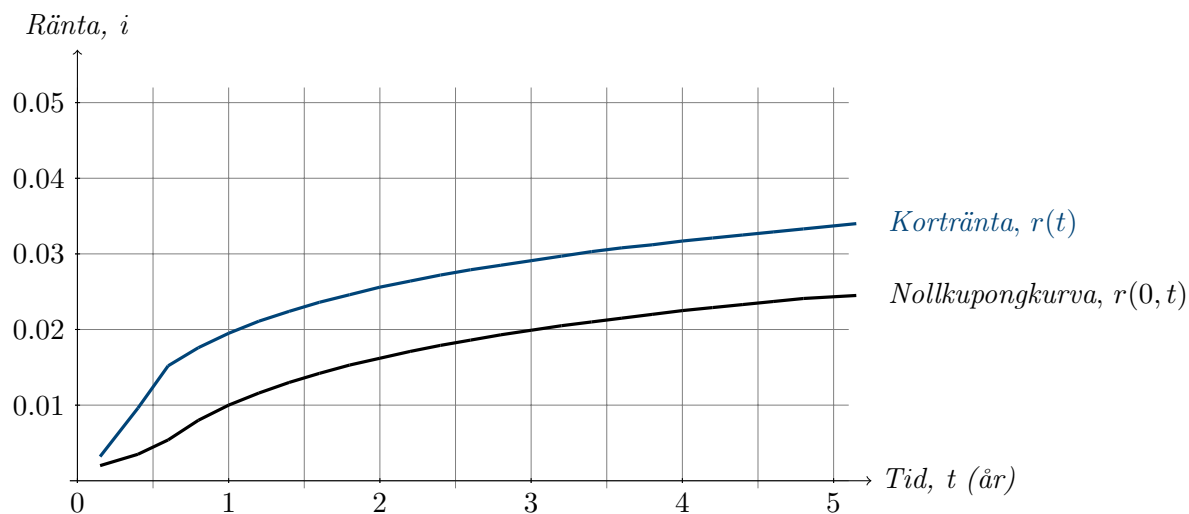
- Valet mellan konstanta eller tidsberoende parametrar.
- Vilken data som används och om kalibreringen görs lokalt eller globalt för kurvan.
- Kalibrera drift och volatilitet tillsammans eller separat.

Parametrarna α och σ ska enligt Hull [8] väljas så att en önskvärd struktur på volatiliteten uppnås⁹.

Till att börja med visas en graf utan simulering, det vill säga för $\sigma = 0$, vilket motsvarar den arbitragefria korträntekurvan $r(t) = f(t, t)$ utifrån ingående $r(0, t)$. Den ser ut som i Figur 3 nedan.

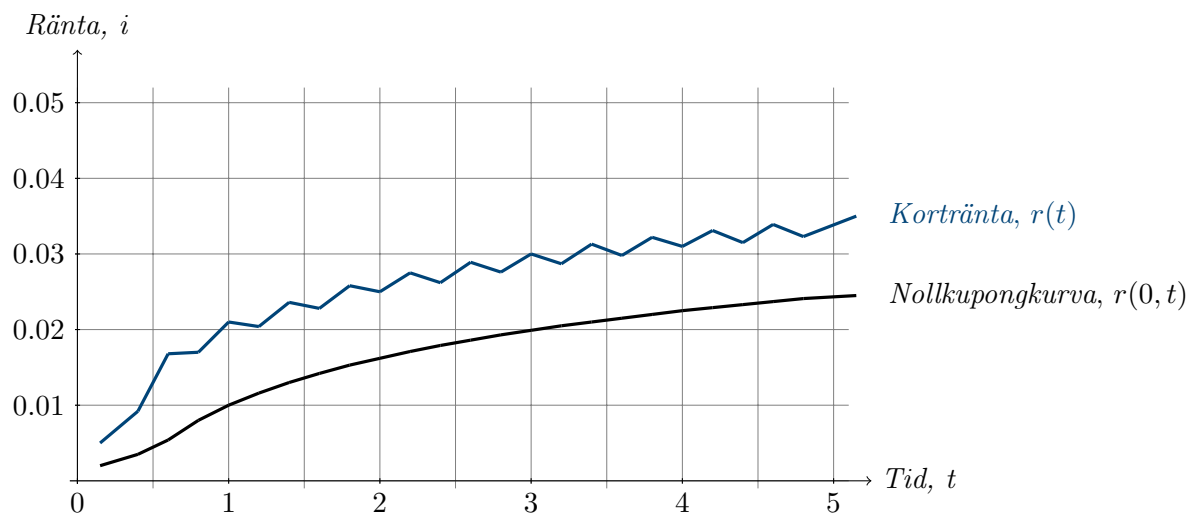
Notera att för korträntan vandrar man längs kurvan (variabel ränta) under en viss period medan för nollkupongkurvan läser man av vid en viss punkt och vandrar längs en tänkt horisontell linje (fast ränta). Det är alltså samma ränta i kronor räknat.

⁹Fallet $\alpha = 0$ är ett specialfall av Hull-White som kallas Ho-Lee.



Figur 3: Nollkupongränta samt kortränta för $\alpha = 1$ och $\sigma = 0$

Flera andra värden på α undersöktes också. I Figur 4 nedan visas räntekurva och beräknad kortränta för $\alpha = 10$ och $\sigma = 0\%$. Den taggiga effekten, slagigheten, uppstår när α inte är anpassad till steglängden, en tillräckligt liten steglängd hade gett en slät kurva även här.



Figur 4: Parametervärde $\alpha = 10$ och $\sigma = 0\%$

I en studie gjord av Hull, se [9] sid 24, fås efter prövning och beräkning av rotmedelkvadratfel (RMSE) en i det fallet optimal lösning för löptider på upp till 5 år, till

$$\alpha = 0,027 \text{ och } \sigma = 0,015$$

Om α ökas får kurvan större rörelser och dess frihet att vandra iväg längre tid från den ingående räntekurvan minskar i och med detta¹⁰. På grund av Figur 4 behöver α därför väljas i kombination med steglängden. I nämnd studie är steglängden i genomsnitt 1 år medan den i min undersökning är 0,2 år. Det allmänna parameterantagandet som används i [9] är därför också intressant och det består av,

$$\alpha = 1,0 \text{ och } \sigma = 0,03$$

Ökad α ger en minskning i väntevärde och varians. Dock påverkas väntevärdet inte särskilt mycket. Gör man många simuleringar är det fortfarande den ingående räntekurvan som till övervägande del styr väntevärdet. Därav är σ den intressantare av parametrarna.

När det gäller volatiliteten, σ , beror den främst på vilka tillgångsslag som undersöks. Alltså hur kapitalet är placerat, vilket inte är ett ämne för den här studien. En enkel modell är att tänka sig en vanlig fondplacering och för estimering av volatilitet kan man då få ledning hos *Fondbolagens Förening* ([6], sid 23).

Uppdelat efter riskklass finns historisk data som ger god vägledning om volatilitet. Med volatilitet avses även hos dem standardavvikelse. De kategoriserar fonder i riskklasserna 1–7 och man kan läsa av att en försiktig placering vanligen har en volatilitet om 0-5%.

Givet en viss volatilitet kan sannolikheten för negativa räntor beräknas. Eller sannolikheten för en viss avvikelse från räntekurvan. Negativa räntor ses ofta nämnt i litteratur som en nackdel när det gäller Hull-Whites modell. De senaste åren har det dock marknadsläget gjort att det funnits ett behov att även ta hänsyn även till negativa räntor.

För den här studien har, utifrån ovanstående resonemang, följande parametrar valts för simuleringen i nästa avsnitt.

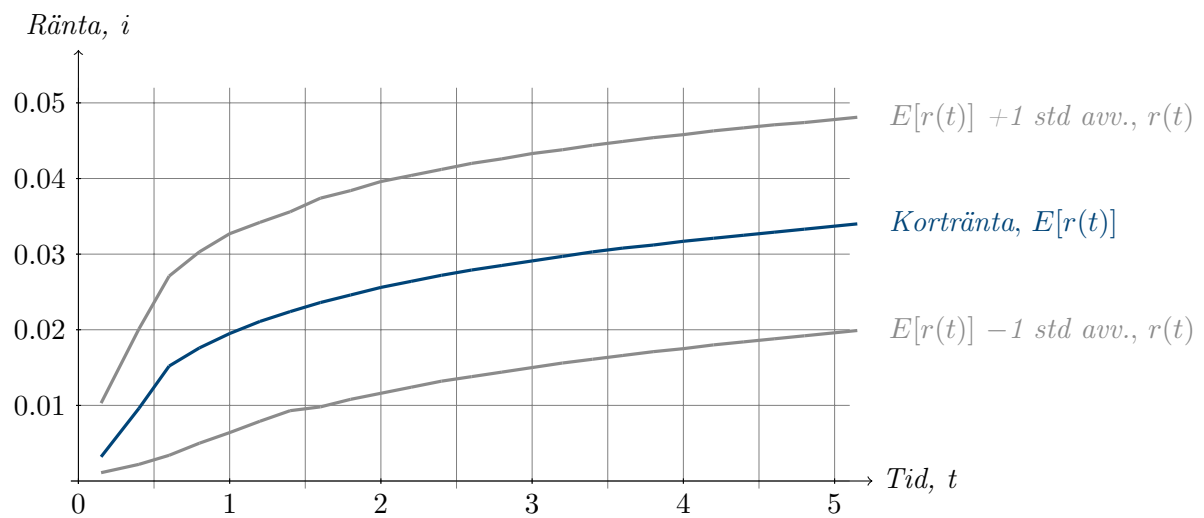
$$\alpha = 1,0 \text{ och } \sigma = 0,02$$

Samtidigt har även flera andra parametrar testats i simuleringen, se Figur 7 och 8 i nästa avsnitt för resultatet från dessa.

¹⁰Ett test finns här, <http://lombok.demon.co.uk/financialTap/montecarlo/hullwhite>

I nästa avsnitt simuleras korträntorna under 5 år enligt denna modell. Anledningen till den 5-åriga tidsperioden är att näst efter livslång utbetalning är 5 år den vanligaste utbetalningstiden för tjänstepension. Till det kommer resonemanget kring räntekurvan, se sid 22, som ju beror på att marknaden för långa obligationer (och därmed ränteinformation) är mycket begränsad i Sverige. Avsikten är också alltjämt att studera modellen och inte en faktisk pensionsskuld.

Nedan visas en graf för korträntans känslighet med en övre och undre gräns i form av $\pm$ en standardavvikelse ($\sigma = 2\%$). För att komma upp i Solvens II-nivån om 99,5% behöver man ta till $\pm$ tre standardavvikelser och då åsytas ett år framåt i tiden.



Figur 5: Kortränta vid $\alpha = 1$ samt kurva för $\pm$ en standardavvikelse.

4.3 Simulering

Vid simulering behövs ett diskret angreppssätt även om modellen är kontinuerlig. Ett lämpligt uttryck för simulering av Hull-White utifrån en diskretisering av (13) är

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \theta(t)\Delta t - \alpha r(t)\Delta t + \sigma \cdot Z \cdot \sqrt{\Delta t} \quad (14)$$

där Z är slumpmässiga oberoende observationer från $N(0, 1)$ och $\theta(t)$ väljs enligt nedan (Hull [8] sid 692) för att matcha den ingående nollkupongräntekurvan som används i modellen.

$$\theta(t) \approx \frac{f(0, t + \Delta t) - f(0, t)}{\Delta t} + \alpha \cdot f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha} \cdot (1 - e^{-2\alpha t}) \quad (15)$$

Den momentana forwardräntan $f(0, t)$ fås i sin tur från nollkupongräntekurvan genom det approximativa sambandet

$$f(0, t) \approx r(0, t + \Delta t) + t \cdot \frac{r(0, t + \Delta t) - r(0, t)}{\Delta t} \quad (16)$$

Beräkningen görs nu i tre steg enligt

1. Beräkna $f(0, t)$ för $t = 0, \dots, n$ från (16)
2. Beräkna $\theta(t)$ för $t = 0, \dots, n$ från (15)
3. Beräkna $r(t + \Delta t)$ enligt (14)

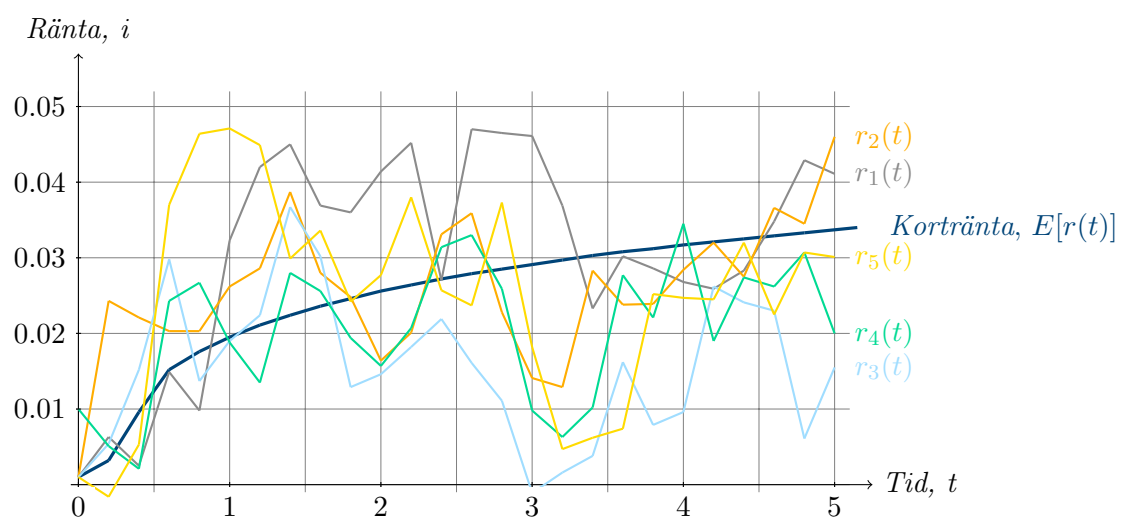
Steglängden sattes till $\Delta t = 0,2$ år ($n = 25$) och slumpmässiga avvikelser Z togs fram med hjälp av dator.

Resultatet visas i Tabell 5 nedan, där $r_i(t)$ betecknar simulering nr i . Tabellen visar bara de första fem kolumnerna av 1000 simuleringar och bara raderna då t är ett helår.

t	$r(0,t)$	$f(0,t)$	$r_1(t)$	$r_2(t)$	$r_3(t)$	$r_4(t)$	$r_5(t)$
0	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
..	..	..	..	..	..	..	..
1	0,010	0,020	0,032	0,029	0,019	0,019	0,047
..	..	..	..	..	..	..	..
2	0,016	0,026	0,041	0,020	0,015	0,016	0,028
..	..	..	..	..	..	..	..
3	0,020	0,029	0,046	0,013	-0,020	0,010	0,018
..	..	..	..	..	..	..	..
4	0,022	0,032	0,027	0,032	0,010	0,034	0,025
..	..	..	..	..	..	..	..
5	0,024	0,034	0,041	0,045	0,016	0,023	0,030

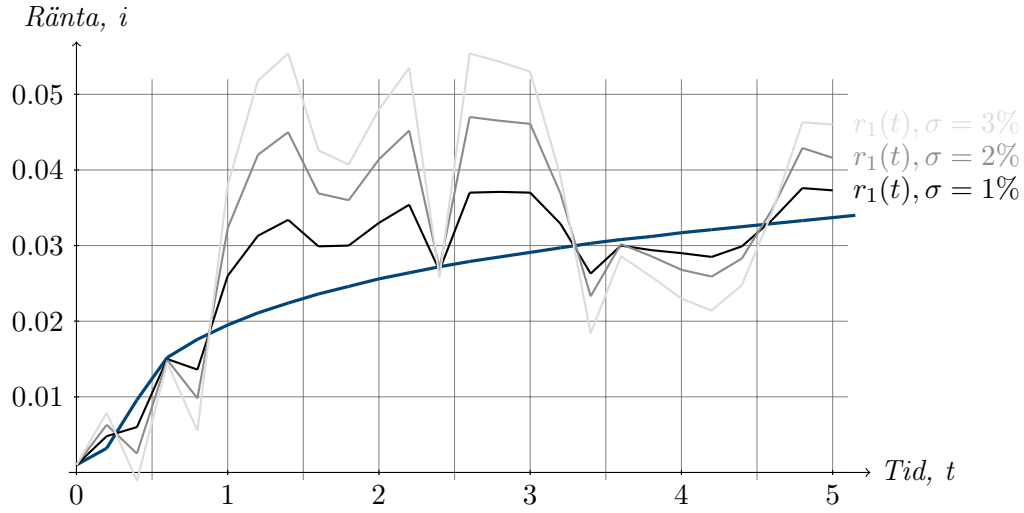
Tabell 5: Beräknade och simulerade räntor i decimalform.

I grafen nedan, Figur 6, återfinns korträntan från föregående avsnitt men nu är också de första fem simulerade korträntorna från Tabell 5 plottade. När alla 1000 korträntor ritades ut syntes inte längre kurvan för $E[r(t)]$ men de övriga simulerade kurvorna rör sig på liknande sätt och varierar runt den beräknade korträntan.

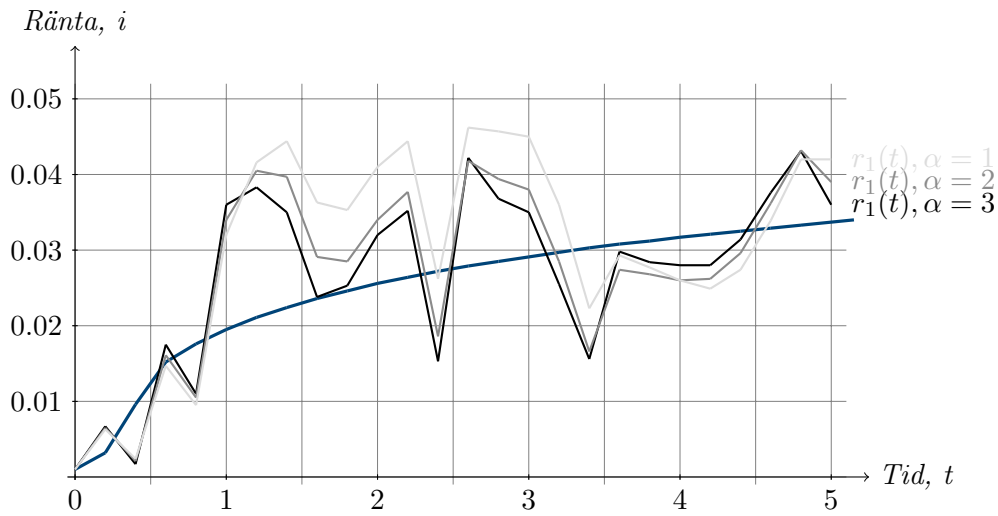


Figur 6: 5 st simulerade korträntor, $\alpha = 1$ och $\sigma = 2\%$

Vidare undersöktes hur de simulerade kurvorna påverkades vid olika σ , men då $\alpha = 1$. Se Figur 7 nedan. Samt motsvarande kurva för $\alpha = 1$ då σ varierar. Kurvorna här är olika varianter av $r_1(t)$ från Figur 6 där slumpfelen fixerats men parametern σ varierar.



Figur 7: Parameterval $\alpha = 1$ och $\sigma = 1\%$, 2% respektive 3%

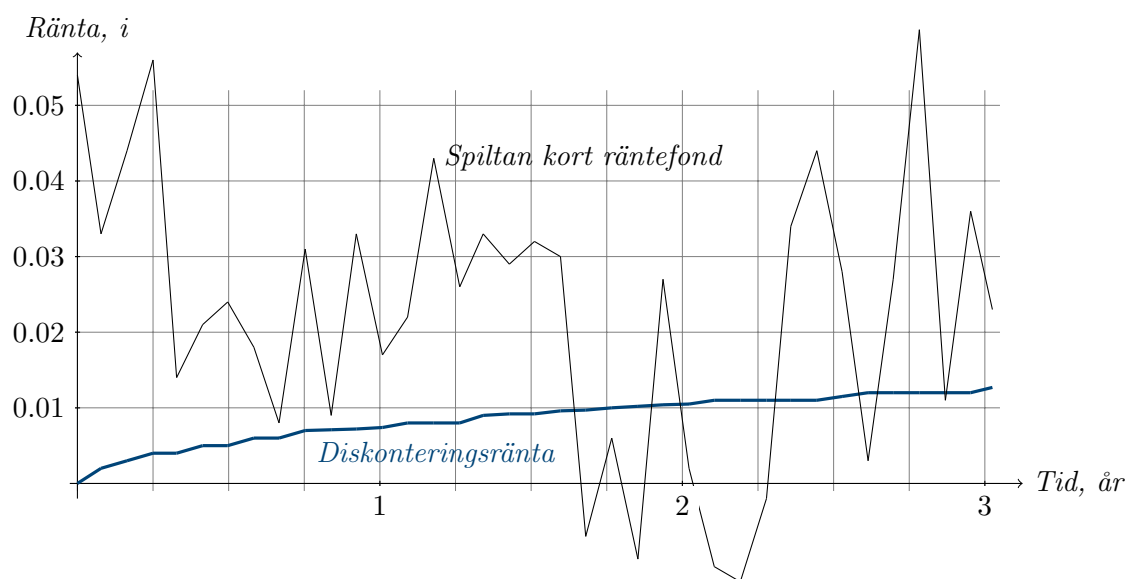


Figur 8: Parameterval $\alpha = 1, 2, 3$ och $\sigma = 2\%$

4.4 Historisk ränta

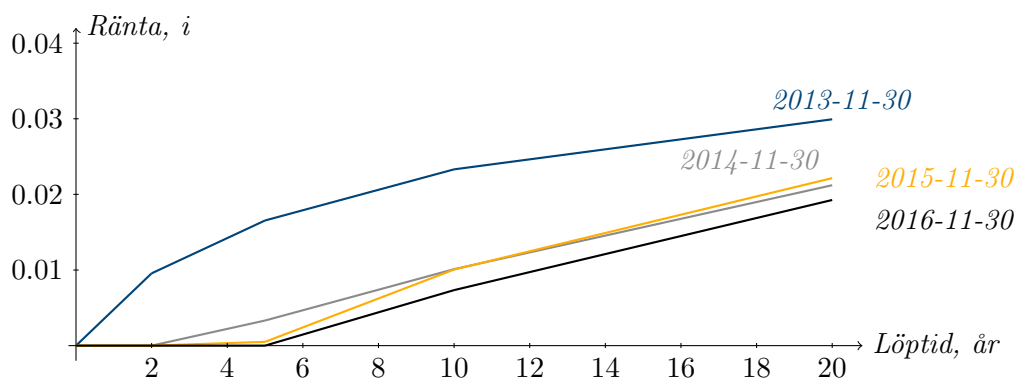
Den diskonteringskurva som FI publicerade i november 2013 (den första enligt FFFS 2013:23, se Kapitel 3.4) har jämförts med *Spiltan kort räntefond* från samma datum och tre år framåt i tiden. Räntefonden avser motsvara en placering med låg risk och samtidigt en löptid om en dag i taget. Ett alternativ hade varit att jämföra med STIBOR Tomorrow/Next men dess beroende av Riksbankens förändringar i reporäntan är väl stort för ändamålet här.

Under dessa tre år utlovade diskonteringsräntan strax över 1% vid den längsta löptiden. Räntefonden har dock gett högre ränta, se Figur 9. Närmare bestämt 1,9% i genomsnitt med en volatilitet om 2,5%.



Figur 9: Diskonteringsränta vs. kort räntefond (nov 2013 – nov 2016)

Under denna tid publicerade Finansinspektionen löpande nyare, de flesta med lägre, diskonteringsräntekurvor. Se Figur 10 för några som valts ut.



Figur 10: Diskonteringsräntor publicerade 2013-2016

Grafen antyder att kurvan haft liknande utseende men parallellförflyttats. I nästa avsnitt studeras en metod som undersöker variationen i dessa och andra räntekurvor.

4.5 PCA

Ett sätt att undersöka tätt korrelerade risker, i det här fallet räntemarknadens olika löptider, är att använda sig av Principal Component Analysis (PCA). Grundtanken är att observera förändringar i marknaden och försöka förklara dem i en modell och PCA är en teknik för att reducera antalet dimensioner i problemställningen ([4] sid 51). I det här avsnittet görs en deskriptiv analys av 1-åriga förändringar i spotränta. Först går vi igenom matrISRäkningarna och sen ser vi på resultatet för PCA-analys.

Om man väljer ut några skilda löptider från diskonteringsräntorna i Figur 10 och ställer upp dem i en tabell ger det följande tabell med löptider längst till vänster och därefter observationerna per löptid,

Löptid	2013-11-30	2014-11-30	2015-11-30	2016-11-30
2 år	0,956%	0,000%	0,000%	0,000%
5 år	1,655%	0,332%	0,050%	0,000%
10 år	2,331%	1,011%	1,006%	0,734%
20 år	2,993%	2,121%	2,215%	1,926%

Tabell 6: FI:s Diskonteringsräntor ("tjänstepensionskurvan")

Totalt alltså 4 observationer för 4 olika löptider. Det ger en 4x4-matris och löptidernas varians-covarians matris, Q , kan beräknas till

$$Q = \begin{pmatrix} 0,228 & 0,365 & 0,338 & 0,216 \\ 0,365 & 0,605 & 0,552 & 0,352 \\ 0,338 & 0,552 & 0,517 & 0,335 \\ 0,216 & 0,352 & 0,335 & 0,220 \end{pmatrix}$$

Även korrelationsmatrisen är av intresse. Korrelationen beräknas på klassiskt vis som $\rho_{x,y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX \cdot VarY}}$ vilket ger följande symmetriska matris,

$$\rho_{x,y} = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,98 & 0,98 & 0,96 \\ .. & 1,00 & 0,98 & 0,96 \\ .. & .. & 1,00 & 0,99 \\ .. & .. & .. & 1,00 \end{pmatrix}$$

PCA bygger på ett antal viktiga resultat från linjär algebra. Av störst betydelse här är *Spektralsatsen* som innebär att om Q är en symmetrisk matris så finns en ortogonalmatris¹¹ A och en diagonalmatris¹² L så att,

$$A^t Q A = L \Leftrightarrow Q = A L A^t \quad (17)$$

dvs en symmetrisk matris är diagonaliserbar ([4] sid 51).

Kolumnerna i matrisen A ger en ortonormerad bas av egenvektorer till Q . Egenvektorerna kallas *Principal Components* (se [4] sid 52). I detta fall är dessa fyra till antalet.

Egenvektorerna, och egenvärdena λ som bildar matrisen L i (17), beräknas enklast med hjälp av dator. Till exempel med hjälp av det öppna källkodsprogrammet GNU Octave¹³.

Beräkningen för matrisen Q ovan gav följande (efter sortering i storleksordning) värden,

$$\lambda_1 = 1,56, \lambda_2 = 0,028, \lambda_3 = 0,012, \lambda_4 = 0,001$$

$$\begin{pmatrix} 0,38 \\ 0,62 \\ 0,58 \\ 0,37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,32 \\ 0,48 \\ -0,81 \\ 0,15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,04 \\ -0,46 \\ -0,10 \\ 0,88 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,87 \\ 0,43 \\ -0,04 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Egenvektorerna kallas också "loadings" efter dess påverkan på räntekurvan.

Efter sorteringen i storleksordningen motsvarar egenvektorerna de fyra PCA-komponenterna i tur och ordning PC1-PC4 och summan av egenvärdena motsvarar den totala variansen

¹¹Kvadratisk matris sådan att dess transponat är detsamma som dess invers.

¹²Samtliga element utanför huvuddiagonalen är 0.

¹³<https://www.gnu.org/software/octave/>

i data ([8] sid 493). Eftersom det första egenvärdet, λ_1 är så mycket större än de övriga kommer nästan alla variation från denna, närmare bestämt,

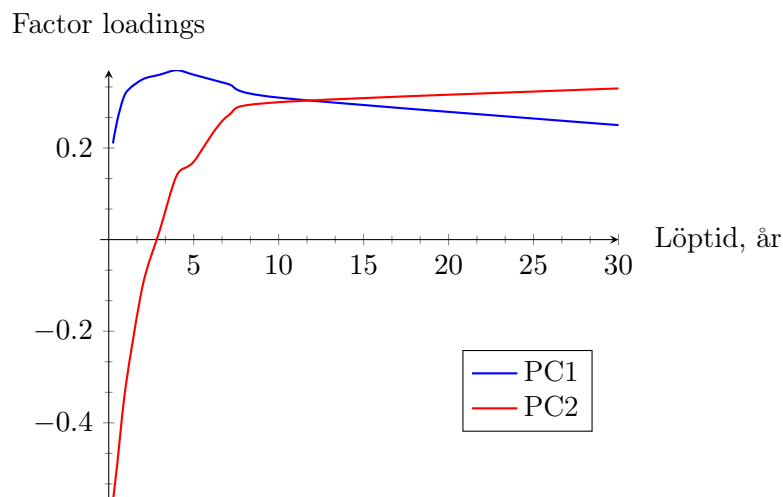
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4} \approx 97\%$$

De övriga värdena bidrar per komponent med,

PC1	PC2	PC3	PC4
97%	<2%	<1%	<0,1%

En graf över komponenterna i det här fallet skulle bara innehålla PC1 men det är vanligt vid PCA-analys av räntekurvor med två till tre signifikanta komponenter, där PC1 ofta påverkar räntekurvan parallellt medan PC2 påverkar räntekurvan genom en brantning. Med brantning menas att räntan för korta löptider går ner medan den för längre löptider stiger.

Se nedan typiska illustration för PCA inspirerad av Filipović, [4] sid 54,



Figur 11: Typisk "loading" för PC1-PC2

4.6 Väntevärde och varians

Korträntornas väntevärde och varians vid en viss tidpunkt kan antingen tas fram från de simulerade värden eller beräknas utifrån formlerna (se Filipović [4] sid 86) nedan

$$E[r(t)] = \frac{\theta(t)}{\alpha} + \left(r(0) - \frac{\theta(t)}{\alpha} \right) e^{-\alpha t}$$

och

$$Var[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t})$$

Från uttrycket för varians noteras att ett ökat α ger lägre varians i en given punkt medan ett ökat σ ger högre varians.

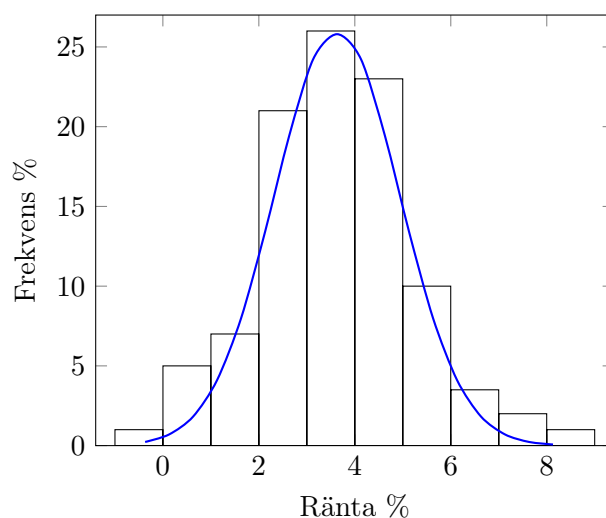
För den sista tidpunkten $t = 5$ (se Figur 6) gav simuleringen ett väntevärde om 3,56% medan det teoretiska värdet blir

$$E[r(5)] = \frac{0,034}{1} + \left(0,001 - \frac{0,034}{1} \right) e^{-1 \cdot 5} \approx 3,34\%$$

motsvarande varians, vid $t = 5$, blev för simuleringen 0,0003 medan det teoretiska värdet blir

$$Var[r(5)] = \frac{0,02^2}{2 \cdot 1} (1 - e^{-2 \cdot 1 \cdot 5}) \approx 0,0002$$

I Figur 12 nedan visas slutligen i ett histogram hur alla 1000 simulerade korträntor fördelade sig vid tidpunkten, $t = 5$, med frekvens på y -axeln och ränta på x -axeln.



Figur 12: Fördelning av korträntor vid $t = 5$

4.7 Diskontering

Efter simulering kan diskonteringsfaktorer för olika tidsintervall beräknas (Hull [8] sid 79). I teorin skiljer man på om det görs under det riskneutrala måttet Q (i en arbitragefri värld) eller det verkliga måttet P beroende på vid vilken tänkt tidpunkt beräkningen görs men ingen skillnad görs mellan dessa i den här studien.

När den betraktade tidsperioden är kort (till exempel $\Delta t = \frac{1}{365}$) ges den genomsnittliga avkastningen under densamma approximativt av korträntan multiplicerat med längden på intervallet, $r(t) \cdot \Delta t$, se Hull [8] sid 682.

Diskonteringsfaktorn $P(t, T)$ för godtyckligt lång period (t, T) ges vidare av uttrycket nedan (se [4] sid 79). Minns också att $r(t) = f(t, t)$, se sid 19, och jämför med uttrycket i Hull [8] på sid 86,

$$P(t, T) = E_Q [e^{-\int_t^T r(s)ds} | F_t] \quad (18)$$

där F_t motsvarar information som är känd vid tiden t .

Med denna formel fås till exempel för korträntekurvan med $\sigma = 0$ att

$$P(0, 5) = e^{-\int_0^5 r(s)ds} = e^{-0,125} \approx 0,883 \quad (19)$$

Vilket motsvarar en avkastning under perioden om $\frac{1}{0,883} \approx 13,3\%$ medan den ingående $r(0, 5) = 2,45\%$ (se Tabell 5) under fem års tid hade gett $(1 + 0,0245)^5 \approx 12,9\%$.

Övriga diskonteringsfaktorer för korträntekurvan vid $t = 0$ beräknas på precis samma sätt och man får då följande tabell

Period	Faktor
P(0,1)	0,989
P(0,2)	0,967
P(0,3)	0,940
P(0,4)	0,912
P(0,5)	0,883

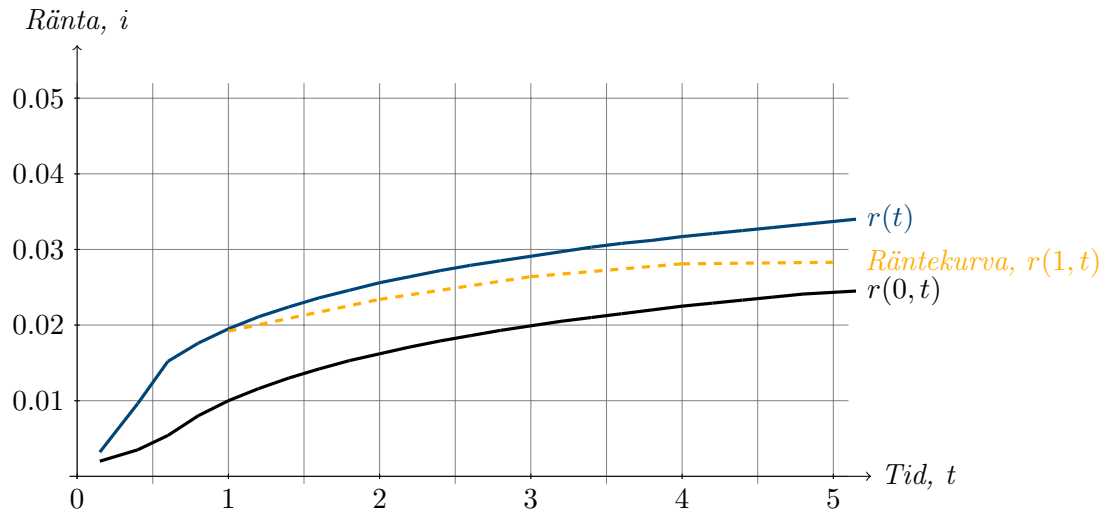
Tabell 7: Diskonteringsfaktorer per $t = 0$

Om man simulerat sig 1 år framåt i tiden kan förväntade diskonteringsfaktorer vid $t = 1$ beräknas utifrån alla 1000 simuleringar med hjälp av (18) och de bildar då tabellen nedan

Period	Faktor
P(1,1)	1
P(1,2)	0,977
P(1,3)	0,949
P(1,4)	0,920
P(1,5)	0,894

Tabell 8: Diskonteringsfaktorer per $t = 1$

För att få en känsla för storleken räknar vi om dessa värden till räntor, fortfarande vid $t = 1$, och ritar in den tidigare grafen. Detta ger en ny räntekurva enligt nedan (motsvarande uttrycket längst ner på sid 90 i [4]),



Figur 13: Simulerad spoträntekurva betraktad vid $t = 1$

För Hull-White modellen ges diskonteringsfaktorer (priset på nollkupongobligationer) också direkt av det analytiska uttrycket (se [8] sid 692), vid den framtida tidpunkten t , av

$$P(t, T) = A(t, T) \cdot e^{-B(t, T)r(t)} \quad (20)$$

där

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \quad (21)$$

och

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + B(t, T)F(0, t) - \frac{1}{4\alpha^3} \sigma^2 (e^{-\alpha T})^2 (e^{2\alpha t} - 1) \quad (22)$$

I nästa kapitel beräknas alla $n = 1000$ stycken diskonteringsfaktorer $P(1, T)$ och visas i ett histogram.

5 Beräkning av pensionsskuld

När man lagt fast en modell för ränta och livslängd utifrån resultaten i tidigare kapitel kan man beräkna pensionsskulden. Allmänt gäller att en pensionsskuld ökar i takt med att pension tjänas in och minskar i takt med att pension betalas ut eller individen avlider.

5.1 Allmänt

Om löftet om pension gäller en momentan engångsutbetalning är värdet (sett från arbetsgivarens håll är det en skuld) lika stor som utbetalningen. Om utbetalning däremot sker i framtiden har pensionen ett kapitalvärde idag och ett annat värde när det är dags för utbetalning eftersom ränta ges under tiden fram till utbetalning samtidigt som en del personer kommer avlida innan de får sin utbetalning.

Man skiljer oftast på *spartid* som inträffar före pension och *utbetalningstid* som inträffar efter pensionsåldern. Se exempel nedan.

Exempel 8. *Beräkning av kapitalvärde.*

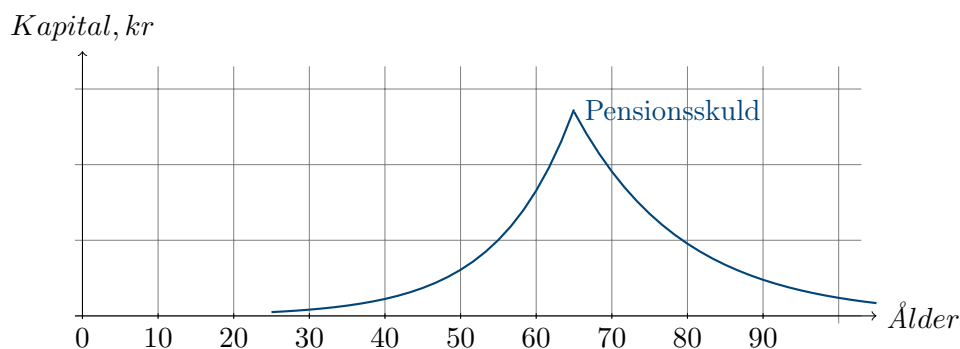
Antag att en person är 55 år och ska gå i pension vid 65 års ålder. Individens arbetsgivare har kommit fram till att pensionskapitalets värde behöver vara 120 000 kr när denne är 65 år.

Eftersom spartiden är 10 år behöver företaget grovt räknat sätta av 12 000 kr per år. Men då de också får ränta på pengarna kan de sätta av lite mindre.

Om företaget istället sätter av precis 9 844 kr (jfr Exempel 6) för år 1 kommer denna avsättning efter 10 år med 2% årlig ränta ha växt och blivit ett kapital om 12 000 kr, vilket motsvarar det önskade beloppet för år 1.

□

Det är av intresse både att beräkna skulden per idag och att göra en prognos över hur skulden kommer utveckla sig de kommande åren. Se illustration i Figur 14 nedan där pensionsskuldens utveckling illustreras. Figuren avser en individ medan de flesta pensionsskulder normalt består av ett flertal individer i olika åldrar varav en del är i tjänst (spartid) och en del är pensionerade (utbetalningstid), se Skandia [14].



Figur 14: Illustration av en individs pensionsskuld.

Om en beräkning syftar till att beräkna pensionsskulden bör man ta hänsyn till att individen kan avlida före pensionsåldern, typiskt 65 år. Om beräkningen i första hand avser en individs *pensionsprognos* finns det god anledning att göra beräkningen givet att man överlever (minst) fram till pensionsåldern. Detta ger på sätt och vis en något lägre prognos eftersom utbetalningen i det senare fallet säkert påbörjas (Pensionsmyndigheten [11]).

5.2 För deterministisk modell

Om räntan är konstant är det lämpligt att använda kommutationsfunktionerna från Kapitel 2.2. De tar hänsyn till både ränta och livslängd.

Exempel 9. Antag att en 65-årig individ har en genast börjande temporär pensionsförsäkring om 10 000 kr per månad, dvs 120 000 kr per år, som utbetalas mellan 65 och 70 års ålder.

Med hjälp av kommutationsfunktioner från MM16 ges nuvärdet av en sådan försäkring (Andersson [2] sid 225) av

$$120\,000 \cdot \frac{N(65) - N(70)}{D(65)} = [\text{se Tabell 3}] = 120\,000 \cdot \frac{4,6358 - 3,4454}{0,2527} \approx 120\,000 \cdot 4,71$$

Vilket ger en pensionsskuld om strax över 565 000 kr. Använder man däremot M90 fås

$$120\,000 \cdot \frac{N(65) - N(70)}{D(65)} = [\text{Appendix, sid 51}] = 120\,000 \cdot \frac{2,3452 - 1,6481}{0,1530} \approx 120\,000 \cdot 4,56$$

Vilket ger en pensionsskuld om strax över 547 000 kr. Att den blir lägre med M90 beror både på den högre räntan och den kortare livslängden.

□

Om vi fortfarande tänker oss en deterministisk modell men med variabel ränta i form av en räntekurva, se Kapitel 3.4, går det inte att använda kommutationsfunktionerna direkt utan en uppställning i tabellform är lämpligare.

Exempel 10. Om vi antar en att vi har en 65-årig individ med 5 års utbetalning och använder ett ränteantagande med spoträntor enligt nedan (samma som i Tabell 5) så kan kapitalet placeras med olika löptider beroende på när det ska utbetalas.

Ålder	Löptid	Nominell utb	Ränta	Disk. faktor	Diskonterad utb
65 år	0 år	0 kr	-	1,000	0 kr
66 år	1 år	-120 000 kr	1,0%	0,990	-118 812 kr
67 år	2 år	-120 000 kr	1,6%	0,969	-116 250 kr
68 år	3 år	-120 000 kr	2,0%	0,942	-113 079 kr
69 år	4 år	-120 000 kr	2,2%	0,917	-109 996 kr
70 år	5 år	-120 000 kr	2,4%	0,888	-106 581 kr
Totalt		-600 000 kr			-564 718 kr

Tabell 9: Pensionsskuld, olika löptider.

Vilket sammantaget ger en pensionsskuld om drygt 564 000 kr och då är det diskonterat med avseende på ränta men inte med avseende på dödlighet. Men sannolikheten att hela beloppet utbetalas, alltså att individen blir minst 70 år, kan till exempel fås från överlevelsefunktionen genom $\frac{l_0(70)}{l_0(65)} \approx 94\%$ (tabell i [2] sid 452). Varvid den sista utbetalningen kan diskonteras med denna faktor. Se också Exempel 4.

□

Genom att räkna om tabellen ovan med en förändring $+/-$ 1 procentenhet på alla räntor (parallellförflyttning av hela räntekurvan) kan man med enkla medel få en användbar känslighetsanalys i de fall ränteläget skulle bli ett annat än det antagna.

I exemplet ovan är skuldens längd i år (den så kallade durationen, se Hull [8] sid 97) tämligen kort. I alla händelser högst fem år. Ju längre duration desto känsligare blir förstås skulden för ändringar i räntan. Vid den här åldern ger fortfarande räntan större utslag än dödligheten på den årliga diskonteringen men efter omkring 75 års ålder kommer normalt merparten av diskonteringen från dödlighetsrisken.

5.3 För stokastisk modell

I den stokastiska räntemodellen med kortränta antas inte längre kapitalet fördelat på olika löptider utan allt investeras direkt och följer den simulerade räntan.

Exempel 11 (Simulerad Hull-White). *I det här exemplet används diskonteringsfaktorerna från föregående kapitel, Tabell 7, för tidpunkterna $t = 1, 2, 3, 4, 5$ vilket ger följande tabell*

Ålder	t	Nominell utb	Disk. faktor	Diskonterad utb
65 år	0	0 kr	1,000	0 kr
66 år	1	-120 000 kr	0,989	-118 680 kr
67 år	2	-120 000 kr	0,967	-116 040 kr
68 år	3	-120 000 kr	0,940	-112 800 kr
69 år	4	-120 000 kr	0,912	-109 440 kr
70 år	5	-120 000 kr	0,883	-105 960 kr
Totalt		-600 000 kr		-562 920 kr

Tabell 10: Pensionsskuld, år 0.

Sammantaget en pensionsskuld om knappt 563 000 kr. Variansen från simuleringarna ger även en indikation på vilken osäkerhet som finns i ränteantagandet och kan användas till beräkna ett intervall för pensionsskulden, se nedan.

□

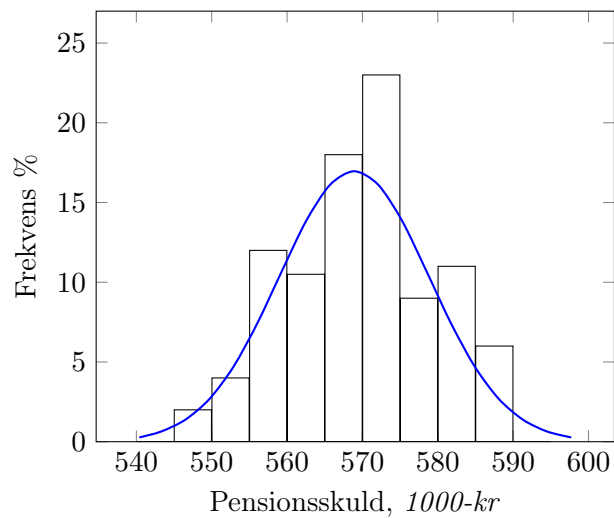
En beräkning av den framskrivna skulden med 1 år (precis innan den första utbetalningen) ger en skuld om knappt 569 000 kr. Förmodligen finns också tillgångar som ökat när skulden blir ett år äldre men här behandlas bara skulden. Diskonteringsfaktorerna kommer från Tabell 8 och beräkningen görs enligt nedan,

Ålder	t	Nominell utb	Disk. faktor	Diskonterad utb
65 år	0	0 kr	1,000	0 kr
66 år	1	-120 000 kr	1,000	-120 000 kr
67 år	2	-120 000 kr	0,977	-117 256 kr
68 år	3	-120 000 kr	0,949	-113 898 kr
69 år	4	-120 000 kr	0,920	-110 436 kr
70 år	5	-120 000 kr	0,894	-107 316 kr
Totalt		-600 000 kr		-568 906 kr

Tabell 11: Pensionsskuld, år 1.

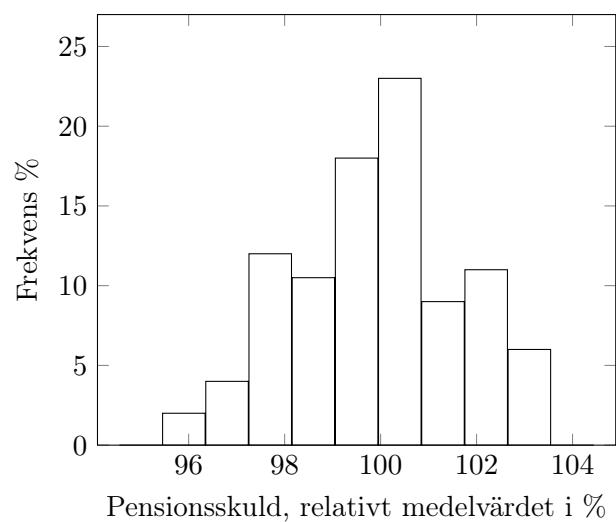
Tabellen ovan visar den förväntade pensionsskulden vid $t = 1$. Om man tittar på spridningen av pensionsskulden utifrån de 1000 simulerade korträntorna får man nedanstående histogram innehållande 1000 olika värden på pensionsskulden. Utfallet är i intervallet 540 000 kr till 600 000 kr.

Diagrammet ger värdefull information om hur känslig skulden är för förändringar i ränta och en uppfattning både om hur sannolika olika utfall är och vilken högsta respektive lägsta skuld som rimligen kan förväntas.



Figur 15: 1000 st simulerade pensionsskulder vid $t = 5$

Det sanna värdet är alltid av intresse men i praktiken är ofta det efterfrågade värdet helt styrt av redovisningsregler eller av andra på förhand bestämda principer. I nästa avsnitt ges en kortfattad redogörelse för några av dessa och nedan visas ovanstående diagram men med relativ x -axel i procent.



Figur 16: 1000 stycken pensionsskulder, relativt vid $t = 5$

5.4 Försäkringsredovisning

Försäkringsredovisning är ett omfattande område, värt en egen studie. Här ges bara en mycket kort översikt av redovisning enligt IAS 19 samt av den prognosstandard som tagits fram av Pensionsmyndigheten.

I Sverige är det för börsnoterade bolag obligatoriskt att redovisa enligt de så kallade IFRS-reglerna. Redovisningsreglerna ändras kontinuerligt och en inte obetydlig del av ändringarna tillkommer genom EU-direktiv. Av särskilt intresse för pensionsskulder är den del av IFRS som kallas IAS 19.

Reglerna i IAS 19 omfattar olika typer av *ersättningar till anställda*. Dock är bara (en del av) de ersättningar som ska betalas i en någorlunda avlägsen framtid av aktuariellt intresse, nämligen de som kräver antaganden om avkastning, livslängd, annulationer (flytt eller återköp) och dylikt.

IAS 19 (FAR [3]) slår fast att avgiftsbestämda (även kallat premiebestämda) planer är sådana att företaget betalar fastställd avgift till annan part, till exempel ett försäkringsbolag. Av detta följer att den försäkrade står för en stor del av den finansiella risken och att företags redovisning inte heller är alltför komplicerad.

Förmånsbestämda planer däremot definieras som "andra planer för ersättning efter avslutad anställning än avgiftsbestämda", FAR [3], sid 317. Den stora skillnaden mot avgiftsbestämda planer är att företaget står för aktuariell och finansiell risk. Beroende på till exempel ökande livslängder i befolkningen kan det hända att den avsättning (antingen faktisk eller utlovad) som gjorts under anställningstiden (spartiden) inte är tillräcklig. Företagen måste då skjuta till ytterligare medel och därför är pensionsskultsberäkningar av stor vikt för dessa företag.

Avslutningsvis kan nämnas att FAR föreskriver att aktuariella antaganden ska vara "*neutrala och ömsesidigt förenliga*" och vidare att de är neutrala om "*de varken är oförsiktiga eller överdrivet försiktiga*" (FAR [3], sid 332).

5.5 Prognosstandard

Med tanke på ämnet för den här uppsatsen bör också Pensionsmyndighetens prognosstandard, se [11], nämnas. Det både är en prognosstandard och den har namnet Prognosstandard.

Den har tagits fram med det uttalade syftet att pensioner (speciellt deras prognoser) ska bli lättare att jämföra oavsett vem som står bakom beräkningen.

Standarden omfattar allmän pension, tjänstepension och privat pension och går i korthet ut på följande:

- Prognosen görs med antagande om nolltillväxt, i dagens penningvärde. Detta för att det ska vara enklare att sätta prognosen i relation till dagens lönenivå.
- Lön och därmed insättningar i form av premier antas oförändrade fram till pensionsåldern. Arbetar man exempelvis halvtid antas detta fortsätta fram till pension.
- Om en viss försäkring har en fast pensionsålder ska den användas, annars används 65 år som pensionsålder.
- Kapitalavkastningen estimeras till 2,1% utan inflation men före skatt och avgift.
- Årlig avkastningsskatt sätts till 0,6% av kapitalet.
- Försäkringsbolagens avgifter är beräknade till 0,7% – 1,5% av kapitalet per år.
- Livsvarig utbetalning ska normalt användas.
- Tryggandegrundernas generationsdödlighet (FFFS 2007:24¹⁴) från Finansinspektionen används med ett genomsnitt för kvinna/man. För generationen född på 1970-talet finns parametrarna angivna i Tabell 1.
- Pensionsbeloppet anges i kronor per månad före inkomstskatt och avrundas till närmaste 100-tal kronor.

En sån här modell behöver vara relativt enkel men samtidigt är en av svagheterna med standarden att kapitalavkastningen, som har mycket stor påverkan på pensionernas nivå, är konstant. Det gör det trots syftet ändå svårt att jämföra olika pensionsförsäkringar.

¹⁴<http://www.fi.se/sv/vara-register/sok-fffs/2007/200724/>

6 Avslutning

Här ges några egna avslutande kommentarer till den här studien och en framåtblick med ett par förslag till fortsatta studier. Arbetet ska ses som ett svar på ett behov vi haft att undersöka vissa delar mer teoretiskt. För mig är det flexibiliteten och möjligheten att anpassa en beräkning efter förutsättningarna som varit det mest givande.

6.1 Diskussion

Det viktigaste resultatet av studien för mig är tabellerna med kommutationsfunktioner som ger möjlighet att kunna gå från förmån till kapital vid valfri tidpunkt och med valfri ränta. Detta för att kunna besvara frågor som vad kostar det idag att köpa en livsvarig förmån om 10 000 kr/mån. Eftersom köpet görs inom en viss pensionsplan är räntan för det mesta given. Om räntan sedan blir en annan har mindre betydelse eftersom det vid det laget redan har getts ett löfte som kommer att uppfyllas oavsett ränteläge. Detta resultat är presenterat i tabellerna med kommutationsfunktioner och uppsatsen ger god vägledningen i hur de är konstruerade för de fall tabellerna behöver anpassas till en annan ränta. Eller för den delen andra livslängdsantaganden.

En fördel när man jämför två olika ränteantaganden med varandra är också att den absoluta nivån, som alltid är svår att veta, inte har samma betydelse när man fokuserar på differensen.

Möjligheten att simulera räntan, som gjordes med Hull-White, gör att man kan kombinera flera olika antaganden eller räkna på ett helt försäkringsbestånd och samtidigt få en analys av känsligheten. Särskilt användbart är det också när man jämför olika portföljer, som en aktieportfölj mot en ränteportfölj. Det finns gott om historisk data om förväntad avkastning och volatilitet för olika finansiella instrument och då passar simulering bra för att fånga upp egenskaperna och stressa en portfölj.

I de enklare fallen lönar det sig inte att simulera men bland fördelarna med Hull-White kan nämnas att den är rättfram och möjlig att beräkna analytiskt. Den stora nackdelen är att det finns relativt lite vägledning kring hur parametrarna bör bestämmas. Sedan kommer man heller inte ifrån att den ingående ränta man använder i simuleringen också är ett antagande och den har stor påverkan på utfallet av simuleringen.

Jag gjorde också en hel del undersökningar kring HJM-modellen (Heath, Jarrow & Morton) men valde till slut att inte ta med den i rapporten. Min slutsats kring den var att den är väl komplicerad för mitt syfte och om man ska studera den så bör det göras i ett separat arbete på grund av omfattningen och den extra notation som krävs. Hull-White är dock ett specialfall av HJM så det finns flera likheter. Vidare är, som tidigare nämnts, exempelvis Ho-Lee i sin tur ett specialfall av Hull-White. De vanligaste modellerna har därför en hel del gemensamt och steget från den ena till den andra modellen behöver inte vara alltför stort.

Sammanfattningsvis har det i studien inte varit huvudfokus på att hitta det sanna värdet på en pensionsskuld utan hur beräkning kan utföras tillfredsställande utifrån de antaganden som valts.

6.2 Framtida studier

För fortsatta studier inom detta område skulle det vara intressant dels att studera simulering av andra stokastiska räntemodeller och dels att jämföra simulerade Hull-White räntor med faktiska, historiska räntor och utifrån detta betrakta ett visst försäkringsbestånd. I samband med detta också utvidga undersökningen av lämpliga parametrar för simulering.

Beroende på hur framtiden utvecklar sig kan det vara lämpligt att göra en uppföljningsstudie om några år när det är lättare att värdera om det nuvarande och ovanligt låga ränteläget är ett nytt normalläge eller om det är en tillfällig svacka. Detsamma gäller inflationens storlek i förhållande till den nominella räntan. Det är också ganska troligt att vi i närtid ser en höjd pensionsålder vilket skulle ge anledning att justera en del beräkningar i enligt med detta, även om den försäkringsmatematiska teorin är densamma.

Appendix

A1 - Återstående livslängd per ålder, M90

Förväntad återstående livslängd, e_x , M90 man (Andersson [1] sid 349)

x	e_x	x	e_x	x	e_x
0	80,08	41	41,96	82	9,26
1	79,16	42	41,04	83	8,73
2	78,24	43	40,11	84	8,22
3	77,32	44	39,19	85	7,73
4	76,40	45	38,27	86	7,26
5	75,48	46	37,36	87	6,80
6	74,55	47	36,44	88	6,37
7	73,63	48	35,53	89	5,96
8	72,71	49	34,62	90	5,56
9	71,78	50	33,72	91	5,18
10	70,85	51	32,82	92	4,83
11	69,93	52	31,92	93	4,49
12	69,00	53	31,03	94	4,17
13	68,07	54	30,15	95	3,86
14	67,14	55	29,27	96	3,58
15	66,21	56	28,39	97	3,31
16	65,28	57	27,52	98	3,06
17	64,35	58	26,66	99	2,82
18	63,42	59	25,80	100	2,60
19	62,49	60	24,95	101	2,39
20	61,55	61	24,11	102	2,20
21	60,62	62	23,28	103	2,02
22	59,69	63	22,46	104	1,85
23	58,75	64	21,65	105	1,70
24	57,82	65	20,84	106	1,55
25	56,88	66	20,05	107	1,42
26	55,95	67	19,27	108	1,30
27	55,01	68	18,50	109	1,19
28	54,08	69	17,74	110	1,08
29	53,15	70	17,00	111	0,99
30	52,21	71	16,27	112	0,90
31	51,28	72	15,55	113	0,82
32	50,34	73	14,85	114	0,74
33	49,41	74	14,16	115	0,68
34	48,47	75	13,49	116	0,61
35	47,54	76	12,83	117	0,56
36	46,61	77	12,19	118	0,50
37	45,68	78	11,57	119	0,45
38	44,75	79	10,97	120	0,41
39	43,82	80	10,38		
40	42,89	81	9,81		

Förväntad återstående livslängd, e_x , M90 kvinna (Andersson [1] sid 350)

x	e_x	x	e_x	x	e_x
0	85,58	41	47,54	82	12,83
1	84,67	42	46,61	83	12,19
2	83,75	43	45,68	84	11,57
3	82,84	44	44,75	85	10,97
4	81,92	45	43,82	86	10,38
5	81,00	46	42,89	87	9,81
6	80,08	47	41,96	88	9,26
7	79,16	48	41,04	89	8,73
8	78,24	49	40,11	90	8,22
9	77,32	50	39,19	91	7,73
10	76,40	51	38,27	92	7,25
11	75,48	52	37,36	93	6,80
12	74,55	53	36,44	94	6,36
13	73,63	54	35,53	95	5,95
14	72,71	55	34,62	96	5,55
15	71,78	56	33,72	97	5,18
16	70,85	57	32,82	98	4,82
17	69,93	58	31,92	99	4,48
18	69,00	59	31,03	100	4,16
19	68,07	60	30,15	101	3,85
20	67,14	61	29,27	102	3,56
21	66,21	62	28,39	103	3,29
22	65,28	63	27,52	104	3,04
23	64,35	64	26,66	105	2,80
24	63,42	65	25,80	106	2,58
25	62,49	66	24,95	107	2,37
26	61,55	67	24,11	108	2,17
27	60,62	68	23,28	109	1,99
28	59,69	69	22,46	110	1,82
29	58,75	70	21,65	111	1,66
30	57,82	71	20,84	112	1,52
31	56,88	72	20,05	113	1,38
32	55,95	73	19,27	114	1,25
33	55,01	74	18,50	115	1,13
34	54,08	75	17,74	116	1,02
35	53,15	76	17,00	117	0,92
36	52,21	77	16,27	118	0,83
37	51,28	78	15,55	119	0,74
38	50,34	79	14,85	120	0,66
39	49,41	80	14,16		
40	48,47	81	13,49		

A2 - Kommutationsfunktioner M90

Kommutationsfunktioner M90 man (Andersson [1] sid 351)

x	N_x	D_x	x	N_x	D_x	x	N_x	D_x
0	32,3955	1,0000	41	7,8606	0,3207	82	0,5085	0,0646
1	31,4092	0,9728	42	7,5444	0,3117	83	0,4464	0,0597
2	30,4497	0,9463	43	7,2371	0,3030	84	0,3892	0,0549
3	29,5162	0,9206	44	6,9384	0,2944	85	0,3367	0,0501
4	28,6082	0,8956	45	6,6482	0,2861	86	0,2889	0,0455
5	27,7249	0,8712	46	6,3661	0,2780	87	0,2456	0,0410
6	26,8656	0,8475	47	6,0921	0,2701	88	0,2069	0,0366
7	26,0296	0,8245	48	5,8259	0,2624	89	0,1724	0,0324
8	25,2165	0,8020	49	5,5673	0,2548	90	0,1419	0,0284
9	24,4254	0,7802	50	5,3162	0,2474	91	0,1154	0,0246
10	23,6559	0,7590	51	5,0724	0,2402	92	0,0926	0,0211
11	22,9073	0,7383	52	4,8357	0,2332	93	0,0731	0,0178
12	22,1790	0,7182	53	4,6059	0,2263	94	0,0568	0,0148
13	21,4707	0,6987	54	4,3830	0,2195	95	0,0433	0,0121
14	20,7815	0,6796	55	4,1668	0,2129	96	0,0324	0,0098
15	20,1112	0,6611	56	3,9571	0,2065	97	0,0237	0,0077
16	19,4591	0,6431	57	3,7539	0,2001			
17	18,8248	0,6256	58	3,5569	0,1939			
18	18,2078	0,6086	59	3,3661	0,1878			
19	17,6075	0,5920	60	3,1813	0,1818			
20	17,0237	0,5758	61	3,0025	0,1758			
21	16,4558	0,5601	62	2,8296	0,1700			
22	15,9033	0,5448	63	2,6624	0,1643			
23	15,3660	0,5300	64	2,5010	0,1586			
24	14,8433	0,5155	65	2,3452	0,1530			
25	14,3348	0,5014	66	2,1949	0,1475			
26	13,8403	0,4877	67	2,0501	0,1421			
27	13,3593	0,4744	68	1,9107	0,1367			
28	12,8915	0,4614	69	1,7767	0,1313			
29	12,4365	0,4487	70	1,6481	0,1260			
30	11,9939	0,4364	71	1,5247	0,1207			
31	11,5635	0,4245	72	1,4066	0,1155			
32	11,1449	0,4128	73	1,2937	0,1103			
33	10,7378	0,4014	74	1,1860	0,1051			
34	10,3419	0,3904	75	1,0835	0,0999			
35	9,9569	0,3796	76	0,9861	0,0948			
36	9,5825	0,3692	77	0,8938	0,0897			
37	9,2185	0,3589	78	0,8067	0,0846			
38	8,8646	0,3490	79	0,7246	0,0795			
39	8,5204	0,3393	80	0,6476	0,0745			
40	8,1858	0,3299	81	0,5756	0,0695			

Kommutationsfunktioner M90 kvinna (Andersson [1] sid 352)

x	N_x	D_x	x	N_x	D_x	x	N_x	D_x
0	32,9868	1,0000	41	8,4390	0,3218	82	0,8358	0,0804
1	32,0005	0,9728	42	8,1217	0,3129	83	0,7576	0,0760
2	31,0410	0,9464	43	7,8131	0,3042	84	0,6837	0,0717
3	30,1075	0,9206	44	7,5131	0,2958	85	0,6141	0,0674
4	29,1995	0,8956	45	7,2215	0,2876	86	0,5489	0,0632
5	28,3161	0,8712	46	6,9379	0,2796	87	0,4878	0,0589
6	27,4568	0,8475	47	6,6622	0,2718	88	0,4310	0,0547
7	26,6208	0,8245	48	6,3943	0,2642	89	0,3784	0,0506
8	25,8076	0,8021	49	6,1338	0,2568	90	0,3298	0,0465
9	25,0165	0,7803	50	5,8807	0,2495	91	0,2853	0,0425
10	24,2469	0,759	51	5,6346	0,2425	92	0,2448	0,0386
11	23,4982	0,7384	52	5,3956	0,2356	93	0,2082	0,0347
12	22,7699	0,7183	53	5,1633	0,2289	94	0,1753	0,0310
13	22,0614	0,6988	54	4,9377	0,2224	95	0,1461	0,0275
14	21,3722	0,6798	55	4,7186	0,2160	96	0,1203	0,0241
15	20,7017	0,6613	56	4,5057	0,2097	97	0,0978	0,0209
16	20,0495	0,6433	57	4,2991	0,2036			
17	19,4150	0,6258	58	4,0985	0,1976			
18	18,7978	0,6087	59	3,9038	0,1918			
19	18,1974	0,5922	60	3,7148	0,1861			
20	17,6134	0,5760	61	3,5316	0,1805			
21	17,0452	0,5603	62	3,3539	0,1750			
22	16,4926	0,5451	63	3,1816	0,1696			
23	15,9549	0,5302	64	3,0146	0,1643			
24	15,4320	0,5158	65	2,8529	0,1591			
25	14,9233	0,5017	66	2,6963	0,1540			
26	14,4284	0,4880	67	2,5448	0,1490			
27	13,9471	0,4747	68	2,3982	0,1441			
28	13,4788	0,4618	69	2,2566	0,1392			
29	13,0234	0,4492	70	2,1197	0,1344			
30	12,5804	0,4369	71	1,9876	0,1297			
31	12,1495	0,4250	72	1,8603	0,1250			
32	11,7304	0,4133	73	1,7375	0,1204			
33	11,3227	0,4020	74	1,6194	0,1158			
34	10,9262	0,3910	75	1,5059	0,1113			
35	10,5405	0,3803	76	1,3968	0,1068			
36	10,1654	0,3699	77	1,2922	0,1023			
37	9,8006	0,3597	78	1,1921	0,0979			
38	9,4458	0,3499	79	1,0965	0,0935			
39	9,1008	0,3402	80	1,0052	0,0891			
40	8,7653	0,3309	81	0,9183	0,0847			

A3 - Kommutationsfunktioner MM16, 2% 1950-tal

Ålder	N(x)	D(x)	Delningstal
40	12,5224	0,4293	29,17
41	12,0976	0,4203	28,78
42	11,6817	0,4114	28,39
43	11,2746	0,4027	27,99
44	10,8762	0,3942	27,59
45	10,4861	0,3859	27,18
46	10,1044	0,3777	26,76
47	9,7308	0,3696	26,33
48	9,3651	0,3617	25,89
49	9,0073	0,3540	25,45
50	8,6571	0,3464	24,99
51	8,3144	0,3389	24,53
52	7,9792	0,3316	24,07
53	7,6513	0,3243	23,59
54	7,3305	0,3172	23,11
55	7,0167	0,3102	22,62
56	6,7099	0,3034	22,12
57	6,4100	0,2966	21,61
58	6,1168	0,2899	21,10
59	5,8302	0,2832	20,58
60	5,5502	0,2767	20,06
61	5,2767	0,2702	19,53
62	5,0097	0,2638	18,99
63	4,7490	0,2574	18,45
64	4,4947	0,2511	17,90
65	4,2468	0,2448	17,35
66	4,0051	0,2385	16,79
67	3,7696	0,2322	16,23
68	3,5405	0,2259	15,67
69	3,3177	0,2196	15,11
70	3,1012	0,2132	14,54
71	2,8911	0,2068	13,98
72	2,6874	0,2004	13,41
73	2,4902	0,1938	12,85
74	2,2996	0,1871	12,29
75	2,1157	0,1803	11,73

A4 - Kommutationsfunktioner MM16, 2% 1960-tal

Ålder	N(x)	D(x)	Delningstal
40	12,7906	0,4313	29,65
41	12,3638	0,4223	29,28
42	11,9459	0,4223	28,89
43	11,5368	0,4135	28,50
44	11,1362	0,3963	28,10
45	10,7441	0,3880	27,69
46	10,3602	0,3799	27,27
47	9,9843	0,3719	26,85
48	9,6164	0,3640	26,42
49	9,2562	0,3563	25,98
50	8,9037	0,3488	25,53
51	8,5586	0,3414	25,07
52	8,2209	0,3341	24,61
53	7,8904	0,3269	24,13
54	7,5669	0,3199	23,65
55	7,2505	0,3130	23,16
56	6,9409	0,3062	22,67
57	6,6380	0,2995	22,16
58	6,3418	0,2929	21,65
59	6,0521	0,2864	21,13
60	5,7688	0,2800	20,60
61	5,4920	0,2737	20,07
62	5,2214	0,2674	19,53
63	4,9571	0,2612	18,98
64	4,6990	0,2550	18,42
65	4,4470	0,2489	17,87
66	4,2011	0,2428	17,30
67	3,9613	0,2367	16,73
68	3,7275	0,2307	16,16
69	3,4998	0,2246	15,58
70	3,2783	0,2185	15,01
71	3,0628	0,2123	14,43
72	2,8535	0,2061	13,85
73	2,6504	0,1998	13,26
74	2,4537	0,1934	12,69
75	2,2634	0,1869	12,11

A5 - Kommutationsfunktioner MM16, 2% 1970-tal

Ålder	N(x)	D(x)	Delningstal
40	13,0430	0,4332	30,11
41	12,6143	0,4242	29,73
42	12,1945	0,4154	29,35
43	11,7834	0,4068	28,97
44	11,3808	0,3984	28,57
45	10,9866	0,3901	28,17
46	10,6006	0,3819	27,75
47	10,2227	0,3740	27,33
48	9,8526	0,3662	26,91
49	9,4902	0,3585	26,47
50	9,1355	0,3510	26,02
51	8,7881	0,3437	25,57
52	8,4481	0,3365	25,11
53	8,1152	0,3294	24,64
54	7,7893	0,3224	24,16
55	7,4703	0,3156	23,67
56	7,1581	0,3089	23,18
57	6,8525	0,3023	22,67
58	6,5535	0,2958	22,16
59	6,2609	0,2894	21,64
60	5,9747	0,2831	21,11
61	5,6947	0,2769	20,57
62	5,4209	0,2707	20,02
63	5,1532	0,2647	19,47
64	4,8915	0,2587	18,91
65	4,6358	0,2527	18,34
66	4,3860	0,2468	17,77
67	4,1420	0,2410	17,19
68	3,9040	0,2351	16,61
69	3,6718	0,2292	16,02
70	3,4454	0,2234	15,42
71	3,2249	0,2175	14,83
72	3,0103	0,2116	14,23
73	2,8016	0,2056	13,63
74	2,5990	0,1995	13,03
75	2,4025	0,1933	12,43

Referenser

- [1] ANDERSSON, GUNNAR. *Livförsäkringsmatematik I*. 1:a upplagan, Svenska Försäkringsföreningen, 2005.
- [2] ANDERSSON, GUNNAR. *Livförsäkringsmatematik I*. 2:a upplagan, Svenska Försäkringsföreningen, 2013.
- [3] FAR:S FÖRLAG. *IFRS-volymen 2010*. FAR SRS Förlag AB, 2010.
- [4] FILIPOVIĆ, DAMIR. *Term-Structure Models - A Graduate Course*. Springer, 2009.
- [5] FINANSINSPEKTIONEN *Försäkringsföretags val av räntesats för att beräkna FTA*. 2013-11-12. Tillgänglig via <http://www.fi.se/> [Hämtad 29 juli 2016].
- [6] FONDBOLAGENS FÖRENING *Vägledning för upprättande av faktablad*. 2015 [e-bok]. Tillgänglig via <http://www.fondbolagen.se/PageFiles/6243/V%C3%A4gledning%20faktablad%20150901.pdf> [Hämtad 27 mars 2016].
- [7] FÖRSÄKRINGSTEKNISKA FORSKNINGSNÄMNDEN. *Försäkrade i Sverige - dödlighet och livslängder, prognoser 2007-2050*. Svenska Försäkringsföreningen, 2007.
- [8] HULL, JOHN C. *Options, Futures, and other derivatives*. 8th edition, Prentice Hall, 2012.
- [9] HULL, JOHN C. AND WHITE, A *The General Hull-White Model and Super Calibration*. Financial Analysts Journal, pages 34-44, November/December 2001.
- [10] MAN, S. H. *Short rate simulation using Hull-White*. 2009. Tillgänglig via <http://lombok.demon.co.uk/financialTap/pdf/HullWhite.pdf> [Hämtad 15 mars 2016].
- [11] PENSIONSMYNDIGHETEN *Gemensamma regler för pensionsprognoser*, 2016. Tillgänglig via <https://secure.pensionsmyndigheten.se/GemensammaReglerForPensionsprognoser.html> [Hämtad 20 juli 2016].
- [12] RIKSBANKEN *Realräntan i Sverige*, Nr 5 2008. Tillgänglig via http://www.riksbank.se/Upload/Dokument_riksbank/Kat_publicerat/Ekonomiska%20kommentarer/2008/EK-Kom-Nr_5-SV.pdf [Hämtad 17 juli 2016].
- [13] RIKSGÄLDEN *Auktionsresultat*, 2016. Tillgänglig via <https://www.riksgalden.se/sv/For-investerare/> [Hämtad 7 mars och 4 maj 2016].
- [14] SKANDIA *Pensionsskuldskolan*. 2008 [e-bok]. Tillgänglig via <https://www.skandia.se/hem/Offentlig-sektor/Pensionsskuld/Pensionskuldskolan/> [Hämtad 23 oktober 2015].

Symbolförteckning

Symbol	Beskrivning	Sida	Formel
i	ränta, decimalform	5	(1)
δ	ränteintensitet	5	(1)
x	ålder	8	(2)
T_x	återstående livslängd	8	(2)
l_x	överlevelsefunktion	8	(2)
t	tid, förfluten	8	(2)
e_x	återstående livslängd	8	
q_x	1-årig dödsrisk	8	(3)
μ_x	dödlighetsintensitet	9	(4)
α, β, γ	Makehamparametrar	9	
$D(x)$	de levandes diskonterade tal	11	(7)
$N(x)$	summa levandes diskonterade tal	11	(6)
K_x	kapital vid åldern x	17	(8)
$r(t)$	kortränta	18	(10)
Δt	tidsintervall, litet	19	(10)
$P(t, T)$	nollkupongpris, diskonteringsfaktor	19	(10)
$r(t, T)$	nollkupongränta	19	(10)
$f(t, S, T)$	forwardränta	19	(11)
$\theta(t)$	forwardränta vid t	23	(13)
α	driftparameter	23	(13)
σ	volatilitetsparameter	23	(13)
$f(t, T)$	momentan forwardränta	19	(9)
Z	Stokastisk variabel, i.i.d. $N(0, 1)$	28	(14)

Sakregister

- annulation, 45
- arbetsgivare, 39
- arbitrage, 18
- avgiftsbestämd, 45
- avkastningsskatt, 46

- delningstal, 7
- diskontering, 39
- diskret teknik, 16
- drift, 23
- duration, 41
- DUS 2006, 10
- dödlighetsintensitet, 9
- dödsrisk, 7, 8

- engångsutbetalning, 39
- Euler-Maclaurin, 11

- Finansinspektionen, 22
- forwardränta, 16, 20
- forwardränta, momentan, 19
- förmånsbestämd, 45

- generationsdödlighet, 46

- Hull-White, 23

- IAS 19, 45
- IFRS, 45
- inflation, 5, 46

- kapitalvärde, 39
- kohort, 10
- kommutationsfunktioner, 11
- kontinuerlig teknik, 16
- kortränta, 18
- känslighetsanalys, 41
- könsneutral, 7, 9

- livslängdsantagande, 7
- livsvarig, 7, 12
- löptid, 17

- M90, 9, 49–52
- Makeham, 9
- MM16, 13, 53–55

- nolltillväxt, 46
- nominell ränta, 5
- nuvärde, 16

- obligation, 21
- obligationsmarknad, 17

- penningmarknad, 17
- penningvärde, 46
- pensionsprognos, 46
- pensionsskuld, 5
- pensionsålder, 46
- prognosstandard, 46

- rak ränta, 17
- real ränta, 5
- riskfri ränta, 21
- ränta, 16
- ränteantagande, 7
- ränteintensitet, 5

- sammansatt ränta, 17
- slutvärde, 16
- spartid, 39
- Spektralsatsen, 33
- spotränta, 16, 18

- temporär, 7, 12
- tjänstepension, 46
- Tryggandegrunder, 46

- utbetalningstid, 39

- volatilitet, 23

- åldersförskjutning, 9
- återinvestera, 5
- återstående livslängd, 8

- överlevelsefunktion, 8