Lösningsförslag till tentamen i

Vektorgeometri och funktionslära 2015-05-19

DEL A

1. $(\pi, 0, 4)\cdot(3, -2\pi, 1) = \underline{3\pi + 4}.$

2. $|(-1, \sqrt{3})| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \underline{2}.$

3. Normalvektorn $\bar{n} = (0,0,1)$ om planet är parallellt med xy-planet. Dess ekvation är $\underline{z=3}.$

4. En <u>cirkel</u> med <u>radie 1</u> och <u>mittpunkt $(2,-2)$</u>.

5. $z = i(i-1) = i^2 - i = -1-i$ så $\underline{\bar{z} = -1+i}.$

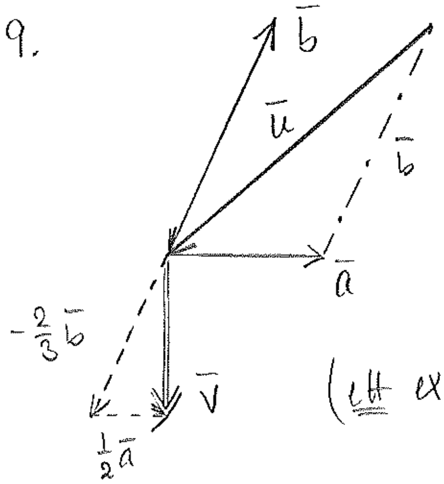
6. Eftersom $16 = 2^4$ så har $16 = 2^{-x}$ lösningen $\underline{x=-4}.$

7. $\lg(2x) = 2 \iff 2x = 10^2 \iff \underline{x=50}.$

8. $\dfrac{e^{1-\ln 3}}{\sqrt{e}} = \dfrac{e}{e^{\ln 3}\cdot e^{1/2}} = \dfrac{e^{1/2}}{3} = \underline{\dfrac{\sqrt{e}}{3}}.$

DEL B

9.



(<u>ett</u> exempel)

a) $\bar{v}\cdot\bar{a} = 0$ medför att $\bar{v}$ är vinkelrät mot $\bar{a}$.

$\bar{v}\cdot\bar{b} < 0$ innebär att $\bar{v}$ har negativ komponent i $\bar{b}$:s riktning

b) $\bar{v} \approx \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{2}{3}\bar{b}$

c) (Om $\bar{a} + \bar{b} + \bar{u} = 0$ så bildar vektorerna en triangel.)

10. En linje är vinkelrät mot planet $2x+y-4z=0$ om den har riktningsvektor $\bar{v}=(2,1,-4)$, dvs planets normalvektor. Då linjen ska gå genom $(0,-\frac{7}{2},7)$ blir dess ekvation

$$\underline{(x,y,z)=(0,-\tfrac{7}{2},7)+t(2,1,-4)} \quad \text{med } t\in\mathbb{R}.$$

Vi bestämmer nu parametervärdet t för den punkt på linjen som uppfyller planets ekvation:

$$2(0+2t)+(-\tfrac{7}{2}+t)-4(7-4t)=0 \iff$$

$$4t-\tfrac{7}{2}+t-28+16t=0 \iff 21t=28+\tfrac{7}{2}$$

$$\iff 21t=\frac{63}{2} \iff t=\frac{3}{2}$$

Skärningspunkten är $(x,y,z)=(2\cdot\frac{3}{2},-\frac{7}{2}+\frac{3}{2},7-4\cdot\frac{3}{2})=\underline{(3,-2,1)}$.

---

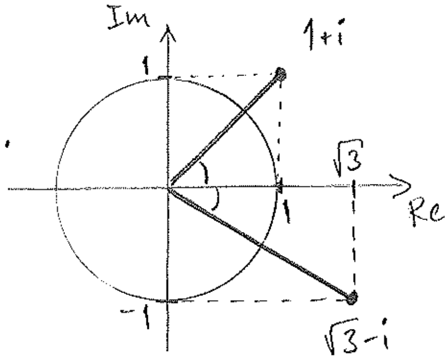
11. $$p(t)=(2t-\tfrac{1}{2})^{10}=\sum_{k=1}^{10}\binom{10}{k}(2t)^k(-\tfrac{1}{2})^{10-k}$$

enl. binomialsatsen. Tredjegradstermen motsvarar $k=3$. Koefficienten är

$$\binom{10}{3}2^3(-\tfrac{1}{2})^{10-3}=\frac{10!}{3!\,7!}\cdot 2^3(-1)^7\frac{1}{2^7}=-\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}\cdot\frac{1}{2^4}$$

$$=-\frac{5\cdot 2\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 2}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{-\frac{15}{2}}}$$

12. Talet $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{18}$ ska förenklas. Det finns flera vägar att gå. Här börjar vi med att skriva om $1+i$ och $\sqrt{3}-i$ på polär form.



(Argumenten för dessa är $\frac{\pi}{4}$ resp. $-\frac{\pi}{6}$. Absolutbeloppen är $\sqrt{2}$ resp. 2.)

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{och}$$

$$\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Eftersom $\mathrm{Abs}(z^{18}) = (\mathrm{Abs}(z))^{18}$

och $\mathrm{Arg}(z^{18}) = 18 \cdot \mathrm{Arg}(z)$ fås

$$(1+i)^{18} = (\sqrt{2})^{18}\left(\cos\left(18\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(18\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2^9\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^9(0+i) = 2^9 i \quad \text{och}$$

$$(\sqrt{3}-i)^{18} = 2^{18}\left(\cos\left(-18\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-18\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2^{18}\left(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)\right) = 2^{18}(-1 + i\cdot 0) = -2^{18}.$$

Det sökta talet är $z = \frac{2^9 i}{-2^{18}} = \underline{\underline{-\frac{i}{2^9}}}$

13. $\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1-x}{2}\right)^r$ är en geometrisk serie, med kvot $k=\frac{1-x}{2}$ och första term $\left(\frac{1-x}{2}\right)^0=1$.

Serien konvergerar om $|k|<1$, dvs om

$$\left|\frac{1-x}{2}\right|<1 \iff |1-x|<2 \iff -2<1-x<2 \iff$$

$$-3<-x<1 \iff \underline{\underline{-1<x<+3}}.$$

Summan är då $\frac{1}{1-k}=\frac{1}{1-\frac{1-x}{2}}=\frac{2}{2-(1-x)}=\underline{\underline{\frac{2}{1+x}}}.$

Vi undersöker om denna summa kan bli 10:

$$\frac{2}{1+x}=10 \iff 1=5(1+x) \iff -4=5x \iff x=-\frac{4}{5}$$

Serien konvergerar för $\underline{\underline{x=-\frac{4}{5}}}$ och summan blir då 10.

---

14. $y=x^3-9x^2+25x-16$

a) Vid "kubkomplettering" blir den kubiska termen $\left(x-\frac{9}{3}\right)^3=(x-3)^3$. I inflektionspunkten är denna 0, vilket alltså ger $x=3$. Motsvarande y-värde är

$$y=3^3-9\cdot 3^2+25\cdot 3-16=3(\underbrace{9-27+25}_{8})-16=24-16=8$$

Inflexionspunkten är $\underline{\underline{(3,8)}}$.

Vi byter variabler till $t=x-3$ och $s=y-8$.

Alltså är $x=t+3$ och $y=s+8$. Det sätts in i

(forts 14)

kurvans ekvation:

$$s+8 = (t+3)^3 - 9(t+3)^2 + 25(t+3) - 16$$

$$\Leftrightarrow s+8 = t^3 + 9t^2 + 27t + 27 - 9t^2 - 54t - 81 + 25t + 75 - 16$$

$$\Leftrightarrow s+8 = t^3 - 2t + 5 \Leftrightarrow s = t^3 - 2t + 13$$

I dessa koordinater är inflexionspunkten $(t,s)=(0,0)$. Nära denna är $s \approx -2t+13$ så lutningen för tangenten är $\underline{\underline{-2}}$.

b) Om $y = 3(x^3 - 9x^2 + 25x - 16)$ har alla y-värden ökat med en faktor 3 – kurvan "dras ut i y-led". I inflexionspunkten blir lutningen då $3\cdot(-2) = \underline{\underline{-6}}$.