ANALYTISKA FUNKTIONER, LIKFORMIG KONVERGENS OCH POTENSSERIER

ANDRZEJ SZULKIN & MARTIN TAMM

1. Inledning

Detta kompendium innehåller material som kompletterar kursboken Persson&Böiers, del 2. De inledande fem avsnitten handlar om analytiska funktioner, där vi i första hand tar upp sådana företeelser som ligger nära vektoranalysen. Som tillämpningar visar vi hur olika generaliserade integraler kan beräknas och ger ett elementärt bevis av algebrans fundamentalsats.

I de därefter följande två avsnitten 6 och 7 definierar vi begreppet likformig konvergens för funktionsföljder och funktionsserier. Vi visar bl a att gränsvärdet av en likformigt konvergent följd av kontinuerliga funktioner alltid är kontinuerlig och att gränsvärdet av integralerna av en likformig konvergent följd är lika med integralen av gränsvärdet.

Som en intressant tillämpning studerar vi i avsnitt 8 potensserier, och i avsnitt 9 visar vi sedan att teorin för dessa på ett mycket naturligt sätt hänger samman med teorin för analytiska funktioner. Som en avslutande tillämpning ger vi i avsnitt 10 ett exempel på hur potensserier kan användas för att lösa differentialekvationer som vi inte kan lösa på annat sätt. I avsnitt 11 finns övningar till materialet.

2. Komplexa kurvintegraler

Vi har tidigare studerat vektoranalys i planet relativt utförligt. Ett av de viktigaste resultaten är att en kurvintegral

$$\int_\gamma P dx + Q dy$$

är oberoende av vägen i ett enkelt sammanhängande område om och endast om villkoret

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{2.1}$$

är uppfyllt. Vi kan också säga att villkoret (2.1) garanterar att integrationen är oberoende av vägen mellan två punkter så länge vi bara gör kontinuerliga deformationer av kurvan inom området.

Vi ska nu utvidga detta till komplexvärda funktioner. Detta visar sig få häpnadsväckande konsekvenser. Komplexa funktioner för vilka integrationen är (lokalt) oberoende av vägen kan tillämpas långt utanför vektoranalysen i vitt skilda delar av både ren och tillämpad matematik. Teorin blir mest naturlig om vi inte bara låter P och Q vara komplexvärda, utan även byter ut $\mathbb{R}^2$ mot $\mathbb{C}$. För punkter i det komplexa planet kommer vi omväxlande att använda koordinaterna $z = x + iy$ och (x, y) (ibland även polära koordinater $z = re^{i\theta}$).

Definition 2.1. Låt $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t), \alpha \leq t \leq \beta$, vara en orienterad deriverbar kurva i det komplexa planet, och låt $f(z) = u(z) + iv(z)$, där $u(z), v(z)$ är reellvärda, vara en (komplexvärd) funktion. Vi definierar då

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))d(z(t)) = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\, dt.$$

Vi noterar också att den komplexa definitionen kan återföras på den reella genom att vi sätter $dz = dx+idy$, och utför multiplikationen $(u+iv)(dx+idy) = udx-vdy+i(vdx+udy)$, vilket leder till den alternativa formuleringen

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma udx - vdy + i \int_\gamma vdx + udy. \tag{2.2}$$

Läsaren kan lätt övertyga sig om att de två synsätten är ekvivalenta genom att återföra integralerna ovan på vanliga integraler genom parametriseringen av kurva.

I många tillämpningar är det naturligt att utvidga definitionen av kurvintegral till kurvor med "hörn", det vill säga där kurvan är en ändlig union av C^1-kurvor. Denna generalisering är i stort sett helt oproblematisk och vi kommer att använda den utan vidare kommentarer.

Exempel 2.1. Bestäm $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ där γ är en cirkel i $\mathbb{C}$ med radie R och centrum i punkten a, och som är orienterad moturs.

Vi kan parametrisera kurvan som $\gamma : z = a + Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Integralen blir då

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{d(a+Re^{it})}{a+Re^{it}-a} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}\, dt}{Re^{it}} = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i.$$

3. Analytiska funktioner

Vad är då motsvarigheten till villkoret $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ för att integration ska vara oberoende av vägen för komplexa kurvintegraler i enkelt sammanhängande områden? Enligt definitionen måste *både* real- och imaginärdel i (2.2) vara oberoende av vägen, och båda måste därför uppfylla villkoret (2.1), vilket ger följande ekvationer:

Cauchy-Riemanns ekvationer:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Definition 3.1. En funktion $f = u + iv$ av klass C^1 som uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$ kallas *analytisk.*

Exempel 3.1. Funktionen $f(z) = e^z$ är ett exempel på en analytisk funktion: enligt definitionen av den komplexa exponentialfunktionen gäller att $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y$ och $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = e^x \sin y$, och vi verifierar lätt att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

På liknande sätt inses att $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ och $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ är analytiska. I själva verket visar sig de flesta av våra välbekanta funktioner från envariabelanalysen vara restriktioner till $\mathbb{R}$ av analytiska funktioner.

Även komplexa polynom är analytiska, och komplexa rationella funktioner (kvoter av polynom) är analytiska överallt där nämnarna är skilda från noll.

En tumregel är att funktioner som är naturliga funktioner av z är analytiska, medan sådana som även innehåller $\overline{z}$ (t ex $f(z) = |z| \, (= (z\overline{z})^{1/2})$ och $f(z) = \operatorname{Re} z \, (= \frac{1}{2}(z + \overline{z})))$, normalt inte är det.

Följande sats ger en annan tolkning av begreppet analytisk:

Sats 3.1. *Låt f vara en funktion sådan att dess realdel u och imaginärdel v är av klass C^1 (som funktioner av två variabler, x och y). Gränsvärdet*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

existerar om och endast om real- och imaginärdelarna u och v till f uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer.

Anmärkning 3.1. Observera att det framgår av beviset nedan att om u, v tillhör klass C^1 och f är analytisk, så följer även att

$$f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + |\Delta z|\rho(\Delta z),$$

där $\rho(\Delta z) \to 0$ då $\Delta z \to 0$, dvs att f är komplext differentierbar.

Analytisk betyder alltså komplext deriverbar. Det är inte svårt att se att de vanliga deriveringsreglerna (t ex produktregeln och kedjeregeln) gäller för komplex derivation, och de reella bevisen kan överföras ord för ord. För vanliga funktioner gäller också att derivatorna ges av de vanliga välkända formlerna, t ex $D(z^n) = nz^{n-1}$ och $D(\sin z) = \cos z$.

Men det är viktigt att observera att komplex deriverbarhet är ett mycket starkare krav än vanlig reell partiell deriverbarhet, eftersom gränsvärdet i sats 3.1 måste existera längs alla riktningar genom punkten z.

Bevis för satsen. Vi visar först att om gränsvärdet existerar, så uppfyller u och v Cauchy-Riemanns ekvationer. Argumentet bygger just på att vi jämför derivatorna längs de reella och imaginära riktningarna:

I. $\Delta z = \Delta x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} = \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &\to \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{när} \quad \Delta x \to 0. \end{aligned}$$

II. $\Delta z = i\Delta y \in i\mathbb{R}$.

$$\frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{i\Delta y} =$$

$$\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y} =$$

$$\frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} + \frac{1}{i}\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$\to \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{när} \quad \Delta y \to 0.$$

Om f är komplext deriverbar så måste gränsvärdena i I och II vara lika. Om vi jämför real- och imaginärdelar separat så erhåller vi just Cauchy-Riemanns ekvationer!

Eftersom vi har förutsatt klass C^1 så följer den andra riktningen lätt av att u och v är differentierbara. Vi får att

$$\begin{gathered}
f(z + \Delta z) - f(z) = \\
u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y) = \\
\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + |\Delta z|\rho(\Delta z) = \\
\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right) + |\Delta z|\rho(\Delta z) = \\
\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + |\Delta z|\rho(\Delta z),
\end{gathered}$$

där vi i näst sista steget använt Cauchy-Riemanns ekvationer. Om vi dividerar med $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ och låter $\Delta z \to 0$ så följer att $f(z)$ är komplext deriverbar. $\square$

Vi har alltså sett att villkoret att integration ska vara oberoende av vägen i enkelt sammanhängande områden är ekvivalent med att funktionen uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. Det faktum att integration är oberoende av vägen för analytiska funktioner brukar sammanfattas som

Sats 3.2 (Cauchys sats)**.** *Låt Γ vara en sluten styckvis deriverbar kurva i ett enkelt sammanhängande område $\Omega \subset \mathbb{C}$, och antag att $f(z)$ är analytisk i Ω. Då gäller att*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Följdsats 3.1. *Slutsatsen gäller även om $D \subset \Omega$ är en kompakt mängd, $f(z)$ är analytisk i Ω och randen Γ till D består av ändligt många kurvor som alla är positivt (eller alla är negativt) orienterade med avseende på D (här behöver varken D eller Ω vara enkelt sammanhängande).*

Detta följer ur Greens formel tillämpad på (2.2).

4. Cauchys integralformel

Integration av analytiska funktioner längs kurvor i det komplexa planet fungerar i många avseenden både som integration av konservativa vektorfält i vektoranalysen och som vanlig reell integration. Om vi t ex ska beräkna integralen av $f(z)$ längs kurvan Γ från punkten

a till b och har tillgång till en primitiv funktion (potential) $F(z)$ så att $F'(z) = f(z)$, så gäller huvudsatsen:

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a) \tag{4.1}$$

(visa detta som övning). Andra integreringsregler gäller också med vissa modifikationer. T ex har vi följande variant av partialintegration:

$$\int_a^b f(z)g(z)\,dz = \Big[F(z)g(z)\Big]_a^b - \int_a^b F(z)g'(z)\,dz. \tag{4.2}$$

Speciellt gäller i fallet med en sluten kurva att

$$\int_\Gamma f(z)g(z)\,dz = -\int_\Gamma F(z)g'(z)\,dz, \tag{4.3}$$

eftersom den första termen i (4.2) försvinner.

Det är dock viktigt att komma ihåg att det, precis som i vektoranalysen, inte alls är säkert att det finns någon primitiv funktion (potential) i områden som inte är enkelt sammanhängande, trots att villkoret (2.1) kan vara uppfyllt.

I fortsättningen kommer vi att behöva följande variant av triangelolikheten för integraler:

Lemma 4.1. *Låt $\Gamma : z(t) = x(t) + iy(t), \alpha \le t \le \beta$, vara en orienterad kurva i $\mathbb{C}$, och låt $f(z)$ vara en kontinuerlig funktion längs Γ. Då gäller olikheten*

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\alpha^\beta |f(z(t))z'(t)|\,dt.$$

Bevis. Detta är en direkt tillämpning av den vanliga triangelolikheten för integraler[1]:

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(z(t))z'(t)|\,dt.$$

Sats 4.1 (Cauchys integralformel)**.** *Låt Γ vara den positivt orienterade randen till det öppna enkelt sammanhängande området D. Om $f(z)$ är analytisk i en omgivning till $D \cup \Gamma$ så gäller för varje $z \in D$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Denna formel är mycket användbar och bevis-idén är samtidigt mycket enkel.

Bevis. Enligt följdsats 3.1 kan Γ ersättas med en liten cirkel Γ_ε runt z, utan att ändra integralens värde (eftersom $\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} = 0$). Om f är analytisk (och därmed komplext deriverbar) så har vi

$$f'(z) = \lim_{\zeta\to z}\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z},$$

[1]Den komplexa versionen av triangelolikheten för integraler är inte helt trivial men kan visas på följande sätt. Vi kan anta att $\int_a^b g(t)\,dt \ne 0$ och sätta $\theta = \operatorname{Arg}\int_a^b g(t)\,dt$. Då gäller att

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| = e^{-i\theta}\int_a^b g(t)\,dt = \operatorname{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta}g(t)\,dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}g(t)\right)\,dt \le \int_a^b \left|\operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}g(t)\right)\right|\,dt \le \int_a^b |g(t)|\,dt.$$

Tänk igenom noga varför varje steg gäller.

och därför är
$$B(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$
en begränsad funktion i en omgivning av z. Detta ger
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(f(z) + (\zeta - z)B(\zeta))d\zeta}{\zeta - z} =$$
$$\frac{f(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} B(\zeta)\,d\zeta.$$
Den första integralen i andra raden ovan är lika med $f(z)$ (oberoende av ε) enligt exempel 2.1. Eftersom även den andra integralen är oberoende av ε (tänk efter varför), kan vi låta $\varepsilon \to 0$ och vi får (med parametriseringen $\zeta = z + \varepsilon e^{it}$)
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} B(\zeta)\,d\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon|B(z + \varepsilon e^{it})|\,dt \le \varepsilon M \to 0,$$
enligt Lemma 4.1, där M är största värdet av B över någon liten cirkelskiva som innehåller Γ_ε för alla små ε. Så
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = f(z),$$
vilket vi skulle visa. □

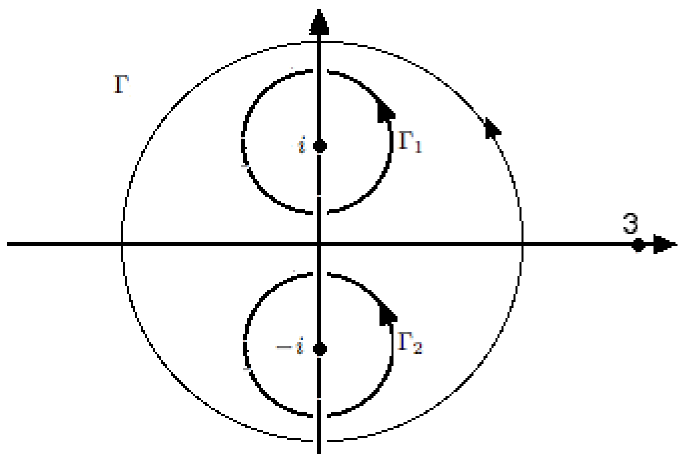
Observera att integralformeln visar att värdet av $f(z)$ i en godtycklig punkt z innanför kurvan är helt och hållet bestämt av f:s värden på själva kurvan. Att en funktion är analytisk är tydligen en mycket speciell egenskap.

Ibland är det mer praktiskt att ha z som integrationsvariabel. Byter vi plats mellan z och ζ i Cauchys integralformel, får vi
$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z - \zeta}.$$

Exempel 4.1. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\Gamma \frac{z^3}{(z-3)(z^2+1)}\mathrm{d}z,$$
där Γ är cirkeln $|z| = 2$ med orientering moturs.

Integranden är analytisk överallt innanför kurvan utom i punkterna $\pm i$. Vi kan därför, på samma sätt som i beviset för Cauchys integralformel, använda följdsats 3.1 för att ersätta Γ med två cirklar Γ_1 och Γ_2 som genomlöps i positiv led och som båda har radie ρ, och centrum i i respektive $-i$, där ρ är ett godtyckligt tal som uppfyller $0 < \rho < 1$ (se figur 1).

Vi ser nu enligt Cauchys integralformel, med $f(z) = \dfrac{z^3}{(z-3)(z+i)}$, att
$$\int_{\Gamma_1} \frac{z^3}{(z-3)(z^2+1)}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)dz}{z - i} = 2\pi i f(i) = \frac{\pi}{10}(-1 + 3i).$$
På samma sätt får vi, med $g(z) = \dfrac{z^3}{(z-3)(z-i)}$,
$$\int_{\Gamma_2} \frac{z^3}{(z-3)(z^2+1)}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} \frac{g(z)dz}{z + i} = 2\pi i g(-i) = \frac{\pi}{10}(1 + 3i).$$



FIGUR 1

Detta ger nu att

$$\int_\Gamma \frac{z^3}{(z-3)(z^2+1)}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} \frac{z^3}{(z-3)(z^2+1)}\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} \frac{z^3}{(z-3)(z^2+1)}\mathrm{d}z =$$

$$\frac{\pi}{10}(-1+3i) + \frac{\pi}{10}(1+3i) = \frac{3\pi i}{5}.$$

Anmärkning 4.1. Integralen i det föregående exemplet är hämtat från en omfattande teori som kallas residy-kalkyl. Grundidén i denna är att värdet av en integral över en sluten kurva helt och hållet bestäms av hur funktionen beter sig i de punkter innanför kurvan där den inte är analytisk. Om vi i en sådan punkt z_0 innanför kurvan kan skriva

$$f(z) = \frac{A}{z-z_0} + g(z),$$

där $g(z)$ är begränsad i en omgivning till z_0, så kallas talet A för f:s *residy* i z_0, och betecknas ofta med $\mathrm{Res}(f, z_0)$. Vår tidigare användning av Cauchys integralformel kan nu sammanfattas i formeln

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f, z_k),$$

där summan tas över de (ändligt många) punkter innanför Γ där f inte är analytisk.

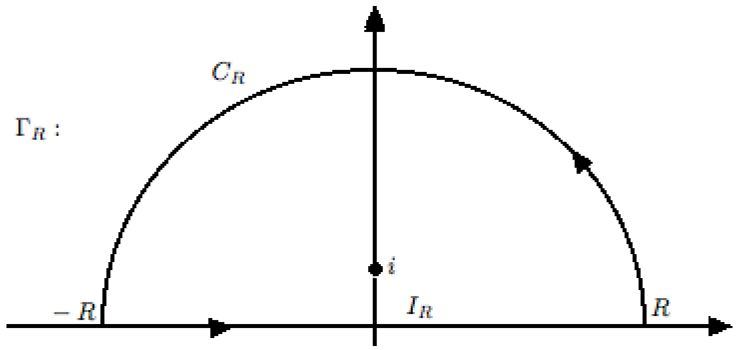
Denna formel kan även generaliseras till situationer där funktionen kan ha ett mer komplicerat beteende än ovan, men för en systematisk genomgång av denna teori hänvisas till högre kurser eller specialiserad litteratur.

5. Tillämpningar av komplexa integraler

Det visar sig att analytiska funktioner, kombinerade med idéer från den vanliga vektoranalysen, kan ge en effektiv metod att räkna ut generaliserade integraler som är svåra att beräkna på annat sätt.

Exempel 5.1. Beräkna den generaliserade integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx.$$



FIGUR 2

(Den sista likheten beror på att imaginärdelen
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx = 0$$
av symmetriskäl.)

I stället för att angripa den reella integralen direkt, integrerar vi den analytiska funktionen $f(z) = e^{iz}/(1+z^2)$ över $\Gamma_R = I_R \cup C_R$ där $I_R = [-R, R]$, $R > 1$, och $C_R = \{z : z = Re^{it}, 0 \le t \le \pi\}$, med orientering i positiv led (se figur 2).

Från lemma 4.1 tillsammans med observationen $\left|\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \le \dfrac{1}{R^2-1}$ på C_R (som följer av den omvända triangelolikheten), ser vi nu att

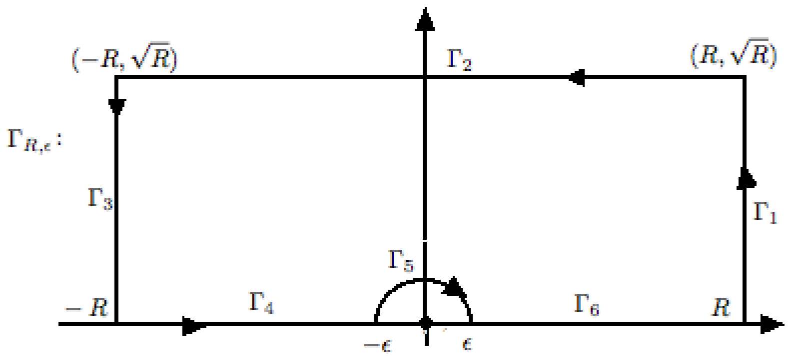
$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz\right| \le \int_0^{\pi} \frac{1}{R^2-1} R dt = \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0 \tag{5.1}$$

när $R \to \infty$. Samtidigt gäller, enligt av vad vi vet om absolutkonvergenta generaliserade integraler att

$$\int_{I_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx \to I \tag{5.2}$$

när $R \to \infty$. (5.1) och (5.2) ger tillsammans att
$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz.$$
Men integralen över Γ_R kan även beräknas genom att använda Cauchys integralformel baklänges. Funktionen är analytisk innanför Γ_R utom i punkten i, och vi får
$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}dz}{1+z^2} = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z+i} \cdot \frac{dz}{z-i} = \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)dz}{z-i} = 2\pi i f(i),$$
där $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z+i}$. Vi ser nu också att integralen ovan i själva verket är oberoende av R, och att därför $I = 2\pi i f(i) = 2\pi i \dfrac{e^{-1}}{2i} = \dfrac{\pi}{e}$.

Exempel 5.2. Vi kan nu även beräkna den generaliserade integralen
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$



Figur 3

eller alternativt

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Metoden är återigen att i stället betrakta en komplex kurvintegral:

$$J = \int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{e^{iz}}{z}\, dz,$$

där $\Gamma_{R,\varepsilon}$ nu väljs som i figur 3. Här är integranden analytisk innanför kurvan, så enligt sats 3.2 blir $J = 0$ för alla $R > \varepsilon > 0$, dvs

$$\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} + \int_{\Gamma_5} + \int_{\Gamma_6} = 0. \tag{5.3}$$

Vi visar först med hjälp av lemma 4.1 att integralerna över Γ_1, Γ_2 och Γ_3 går mot noll då $R \to \infty$:

$$\left|\int_{\Gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\, dz\right| \le \int_0^{\sqrt{R}} \frac{1}{R}\, dt = \frac{1}{\sqrt{R}} \to 0 \quad \text{då } R \to \infty,$$

där vi använt att $|e^{iz}| \le 1$ och $|z| \ge R$ på Γ_1. På liknande sätt fås

$$\left|\int_{\Gamma_3} \frac{e^{iz}}{z}\, dz\right| \le \int_0^{\sqrt{R}} \frac{1}{R}\, dt = \frac{1}{\sqrt{R}} \to 0 \quad \text{då } R \to \infty.$$

För Γ_2 använder vi i stället att $|e^{iz}| = |e^{-y+ix}| = e^{-\sqrt{R}}$ och $|z| \ge \sqrt{R}$ där, vilket ger

$$\left|\int_{\Gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\, dz\right| \le \int_{-R}^{R} \frac{e^{-\sqrt{R}}}{\sqrt{R}}\, dt = 2\sqrt{R}e^{-\sqrt{R}} \to 0 \quad \text{då } R \to \infty.$$

Nästa observation är att

$$\int_{\Gamma_4} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{\Gamma_6} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\, dx \to i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

då $R \to \infty, \varepsilon \to 0^+$. Detta beror på att

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos x}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos x}{x}\, dx = 0,$$

på grund av symmetriskäl, trots att integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx$$

är divergent.

Om vi därför låter $\varepsilon \to 0^+, R \to \infty$ i (5.3), så ser att det enda som blir kvar är

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx + \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\Gamma_5} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0. \tag{5.4}$$

Som i beviset för Cauchys integralformel kan vi nu beräkna den sista integralen. Observera att parametrisering nedan går åt motsatt håll mot Γ_5 i figuren, vilket ger ett extra minustecken.

$$\int_{\Gamma_5} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \begin{bmatrix} z = & \varepsilon e^{it} \\ dz = & i\varepsilon e^{it} dt \end{bmatrix} = -\int_0^{\pi} \frac{1 + O(\varepsilon)}{\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it} dt = -i\pi + O(\varepsilon) \to -i\pi.$$

Om vi jämför detta med (5.4) så kan vi nu läsa av att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi.$$

Notera att ovanstående resonemang inte bara räknar ut integralen utan även ger ett bevis för att den faktiskt är konvergent (jämför med motsvarande resonemang i kompendiet om serier och generaliserade integraler).

Som avslutning på detta avsnitt visar vi även en av matematikens viktigaste satser som vi har använt många gånger tidigare, men som vi inte har kunnat visa förrän nu.

Sats 5.1 (Algebrans fundamentalsats)**.** *Varje komplext polynom av grad ≥ 1 har ett komplext nollställe.*

Bevis. Det räcker att betrakta ett polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ och vi kan anta att $a_0 \neq 0$ (annars är ju $z = 0$ ett nollställe). Vi antar att $p(z)$ saknar nollställen och ska visa att detta leder till en motsägelse.

Om $p(z)$ saknar nollställen så är $g(z) = 1/p(z)$ analytisk i hela $\mathbb{C}$. Cauchys integralformel, tillämpad på en cirkel C_R med radie R och centrum i origo, ger då att

$$0 \neq \frac{1}{a_0} = g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{g(z)}{z}\, dz. \tag{5.5}$$

Men med hjälp av Lemma 4.1 ska vi nu visa att högerledet går mot 0 när $R \to \infty$.

Vi observerar först att

$$p(z) = z^n \left(1 + \underbrace{a_{n-1}\frac{1}{z} + \ldots + a_1 \frac{1}{z^{n-1}} + a_0 \frac{1}{z^n}}_{\to 0 \text{ när } |z| \to \infty} \right).$$

Gränsvärdesdefinitionen ger att vi kan finna R_0 så att

$$|z| \geq R_0 \implies \left| a_{n-1}\frac{1}{z} + \ldots + a_1 \frac{1}{z^{n-1}} + a_0 \frac{1}{z^n} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Det följer att det för $|z| \geq R_0$ gäller att $|p(z)| \geq \frac{1}{2}|z^n|$, vilket i sin tur ger att $|g(z)| \leq 2|z|^{-n}$. För $R \geq R_0$ följer nu från Lemma 4.1 att

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{g(z)}{z}\, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{g(Re^{it})}{Re^{it}} iRe^{it} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2}{R^n} dt = \frac{2}{R^n} \to 0 \quad \text{när } R \to \infty.$$

Detta motsäger (5.5), vilket visar satsen. □

6. Likformig konvergens av funktionsföljder

I tidigare analyskurser har talföljder och talserier behandlats. I stället för en talföljd $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ kan man betrakta en funktionsföljd $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ och likaså kan man, i stället för en talserie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, betrakta en funktionsserie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. Här kan f_k antingen vara reellvärda funktioner av en reell variabel eller analytiska funktioner av en komplex variabel. Vi antar tills vidare att f_k är reellvärda och definierade på ett intervall I, ändligt eller oändligt.

Antag att det för varje $x \in I$ existerar ett gränsvärde $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. I så fall får vi en gränsfunktion $f(x)$. Vad kan man då säga om f? Om f_k är kontinuerliga, kan man förvänta sig att f är kontinuerlig? Om f_k är integrerbara över I, kan man förvänta sig att

$$\lim_{k\to\infty} \int_I f_k(x)\,dx = \int_I \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx? \tag{6.1}$$

Exempel 6.1. Låt $f_k(x) = \arctan(kx)$ och låt $k \to \infty$. För $x = 0$ är gränsvärdet 0 (eftersom $f_k(0) = 0$), för varje $x > 0$ är gränsvärdet $\pi/2$ (eftersom $kx \to \infty$) och för varje $x < 0$ är gränsvärdet $-\pi/2$. Så gränsfunktionen är

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{då } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{då } x < 0 \\ 0 & \text{då } x = 0. \end{cases}$$

Uppenbarligen är f diskontinuerlig.

Exempel 6.2. Låt $g_k(x) = \dfrac{1}{1+(x-k)^2}$. Fixerar man ett x och låter $k \to \infty$, är det uppenbart att $g_k(x) \to 0$, dvs. $g(x) = 0$. Här är alltså g kontinuerlig. Däremot gäller inte (6.1), för

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_k(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(x-k)^2}\,dx = [x-k=y] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \pi,$$

medan

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0.$$

Exempel 6.3. Om $h_k(x) = \dfrac{1}{k(1+x^2)}$, så är det lätt att se att $h(x) = 0$, dvs. h är kontinuerlig, och att (6.1) gäller.

Vi definierar nu begreppet likformig konvergens och visar att under lämpliga förutsättningar kan inte situationen i exemplen 6.1 och 6.2 uppstå för likformigt konvergenta följder.

Definition 6.1. Betrakta en funktionsföljd $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$, $x \in I$.
(i) Följden konvergerar mot gränsfunktionen f *punktvis* i intervallet I om $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ för alla $x \in I$.
(ii) Låt $M_k = \sup_{x\in I} |f_k(x) - f(x)|$. Följden konvergerar *likformigt* mot f i intervallet I om $M_k \to 0$ då $k \to \infty$.

Anmärkning 6.1. Definition 6.1 kan omformuleras på följande sätt:
(i) Följden $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ konvergerar mot f punktvis i intervallet I om det till varje $\varepsilon > 0$ och varje $x \in I$ existerar ett ω sådant att $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ för alla $k > \omega$.
(ii) Följden $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ konvergerar mot f likformigt i intervallet I om det till varje $\varepsilon > 0$ existerar ett ω sådant att $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ för alla $k > \omega$ och alla $x \in I$.

Detta är **mycket viktigt**. Här ser man skillnaden mellan konvergens och likformig konvergens: I (i) existerar ett ω som kan vara beroende av $x \in I$ (dvs. för olika x kan vi behöva välja olika ω), medan det i (ii) skall existera ett ω som duger *för varje* $x \in I$.

Att (i) ovan och i definition 6.1 är ekvivalenta följer direkt ur gränsvärdesdefinitionen. Det är mindre uppenbart att även (ii) i definition 6.1 och i anmärkning 6.1 är ekvivalenta. För att visa detta antar vi först att (ii) i definition 6.1 gäller. För ett givet $\varepsilon > 0$ väljer vi ω så att om $k > \omega$, så är $M_k < \varepsilon$ (detta är möjligt eftersom $M_k \to 0$). Nu får vi $|f_k(x) - f(x)| \leq M_k < \varepsilon$ för alla $k > \omega$ och alla $x \in I$. Å andra sidan, om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett ω så att $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ för alla $k > \omega$ och alla $x \in I$, så är $M_k = \sup_{x \in I} |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ för alla $k > \omega$. Eftersom ε kan väljas godtyckligt litet, betyder det att $M_k \to 0$.

Anmärkning 6.2. Det är inte nödvändigt att bestämma det exakta värdet av M_k. Vill man visa likformig konvergens, är det ibland enklare att finna $a_k \geq M_k$ så att $a_k \to 0$, och vill man visa att konvergensen inte är likformig, kan det vara enklare att bestämma $b_k \leq M_k$ så att $b_k \geq 0$ och $b_k \not\to 0$.

Exempel 6.4. Följderna (f_k) och (g_k) i de föregående exemplen konvergerar inte likformigt i $\mathbb{R}$ medan (h_k) gör det.

Betrakta f_k först. Om vi väljer $x_k > 0$ så att kx_k inte går mot oändligheten, kommer inte skillnaden mellan $f_k(x_k)$ och $f(x_k)$ att gå mot 0. Vi kan t ex välja $x_k = 1/k$. Då får vi $M_k \geq |\arctan(k \cdot 1/k) - \pi/2| = \pi/4$. Så $M_k \not\to 0$.

För g_k är det lätt att se att $M_k = g_k(k) = 1$. Så igen, $M_k \not\to 0$.

För h_k är $M_k = 1/k \to 0$, dvs. h_k konvergerar likformigt mot $h = 0$.

Exempel 6.5. Låt $f_k(x) = x^k$, $0 \leq x \leq 1$. Vi ser att $f_k(x) \to 0$ då $k \to \infty$ för varje $x \in [0, 1[$ och $f_k(1) \to 1$. Så $f(x) = 0$ för $0 \leq x < 1$ och $f(1) = 0$. Om x_k ligger mycket nära 1 men är mindre än 1, så borde $f_k(x_k)$ vara nära 1 medan $f(x_k) = 0$, dvs. M_k borde vara 1 (visa som övning att så är fallet). Alternativt kan vi ta $x_k = 1 - 1/k$, vilket ger $M_k \geq (1 - 1/k)^k \to 1/e$. Detta räcker för att visa att konvergensen inte är likformig.

Betraktar vi samma följd på intervallet $[0, a]$ med $a < 1$, så är konvergensen likformig där eftersom $M_k = a^k \to 0$.

Exempel 6.6. Låt $f_k(x) = \dfrac{x}{1 + k^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Det är klart att $f_k(x) \to 0$ för alla x. Genom att derivera ser vi att största och minsta värde för f_k antas då $x = \pm 1/k$. Så $M_k = 1/2k \to 0$ då $k \to \infty$. Alltså konvergerarar f_k likformigt mot 0 i $\mathbb{R}$.

Nedan visar vi tre egenskaper av likformigt konvergenta följder.

Sats 6.1. *Om $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ är en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt mot f i intervallet I, så är funktionen f kontinuerlig där.*

Bevis. Låt $x_0 \in I$ och låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Genom att använda triangelolikheten får vi

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(f(x) - f_k(x)) + (f_k(x) - f_k(x_0)) + (f_k(x_0) - f(x_0))| \\ &\le |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)|. \end{aligned}$$

Eftersom första och tredje termen i andra raden ovan är $\le M_k$ och $M_k \to 0$, kan vi välja ett k sådant att dessa termer är mindre än $\varepsilon/3$. Eftersom f_k är kontinuerlig, kan vi sedan välja $\delta > 0$ så att även termen i mitten är, för detta k, mindre än $\varepsilon/3$ då $|x - x_0| < \delta$. Det följer att

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \quad \text{då } |x - x_0| < \delta.$$

Alltså är f kontinuerlig i punkten x_0. □

Sats 6.2. *Låt $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt mot f på det begränsade intervallet $[a, b]$. Då är*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Bevis. Triangelolikheten för integraler ger

$$0 \le \left| \int_a^b f_k(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \int_a^b |f_k(x) - f(x)|\, dx \le \int_a^b M_k\, dx = M_k(b - a). \tag{6.2}$$

Påståendet följer eftersom $M_k \to 0$. □

För generaliserade integraler behöver inte satsen gälla men vi går inte närmare in på detta.

Sats 6.3. *Låt $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av kontinuerligt deriverbara funktioner som konvergerar mot f i intervallet I. Om f_k' konvergerar likformigt mot g på I, så är f deriverbar där och $f' = g$. Med andra ord,*

$$\lim_{k\to\infty} f_k'(x) = \left(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right)' = f'(x).$$

Bevis. Låt $x_0 \in I$. Eftersom $f_k' \to g$ likformigt, får vi enligt sats 6.2

$$\lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^x f_k'(t)\, dt = \int_{x_0}^x \lim_{k\to\infty} f_k'(t)\, dt = \int_{x_0}^x g(t)\, dt.$$

Eftersom $\int_{x_0}^x f_k'(t)\, dt = f_k(x) - f_k(x_0)$ och $f_k \to f$, får vi

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x g(t)\, dt.$$

Högerledet är deriverbart, därför måste även vänsterledet vara det. Derivering ger $f'(x) = g(x)$. □

Anmärkning 6.3. Likformig konvergens kan definieras på samma sätt för analytiska funktioner (intervallet I ersätts då med ett öppet område Ω i $\mathbb{C}$). Sats 6.1 gäller då oförändrad, och med samma bevis. Sats 6.2 gäller med integralen från a till b ersatt med en kurvintegral längs en kurva $\gamma \subset \Omega$. I beviset använder man att

$$\int_\gamma (f_k(z) - f(z))\, dz = \int_\alpha^\beta (f_k(z(t)) - f(z(t))z'(t)\, dt,$$

och fortsätter sedan som i (6.2) med uppenbara ändringar. En motsvarighet till sats 6.3 är

Sats 6.4. *Låt $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av analytiska funktioner som konvergerar mot f i ett öppet område Ω. Om f_k' konvergerar likformigt mot g i Ω, så är f analytisk där och $f' = g$.*

Bevis. Vi skissar resonemanget som liknar det i sats 6.3. För ett givet $z \in \Omega$ kan vi välja en punkt $z_0 \in \Omega$ och en öppen cirkelskiva B med medelpunkten i z_0 så att $z \in B$ och $B \subset \Omega$. Eftersom B är enkelt sammanhängande, är integralen av f_k från z_0 till z oberoende av vägen i B. Så

$$\lim_{k\to\infty} \int_{z_0}^{z} f_k'(\zeta)\, d\zeta = \int_{z_0}^{z} \lim_{k\to\infty} f_k'(\zeta)\, d\zeta = \int_{z_0}^{z} g(\zeta)\, d\zeta,$$

där högerledet är oberoende av vägen i B. Som i sats 6.3 är vänsterledet ovan lika med $f(z) - f(z_0)$. Ett liknande resonemang som i analysens huvudsats visar att högerledet är **komplext** deriverbart med derivata $g(z)$ (i en av övningarna i avsnitt 11 uppmanas läsaren att genomföra detaljerna). Alltså är f analytisk och $f'(z) = g(z)$. $\square$

Exempel 6.7. Beräkna $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^k}\, dx$.

Sätt $f_k(x) = \dfrac{1}{1+x^k}$. Vi ser att $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, där $f(x) = 1$ om $0 \le x < 1$ och $f(1) = 1/2$. Eftersom f är diskontinuerlig, är konvergensen inte likformig på $[0,1]$. Å andra sidan gäller, om $0 < a < 1$,

$$M_k = \sup_{x\in[0,a]} \left| \frac{1}{1+x^k} - 1 \right| = \sup_{x\in[0,a]} \frac{x^k}{1+x^k} \le a^k \to 0.$$

Följden konvergerar alltså likformigt på $[0,a]$ och vi kan tillämpa sats 6.2 där. Så

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^k}\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_0^a \frac{1}{1+x^k}\, dx + \lim_{k\to\infty} \int_a^1 \frac{1}{1+x^k}\, dx \\ &= \int_0^a dx + \lim_{k\to\infty} \int_a^1 \frac{1}{1+x^k}\, dx = a + \lim_{k\to\infty} \int_a^1 \frac{1}{1+x^k}\, dx.\end{aligned}$$

Låter vi $a \to 1^-$, går den sista termen ovan mot 0 eftersom $\displaystyle\int_a^1 \frac{1}{1+x^k}\, dx \le \int_a^1 dx = 1-a$. Så det sökta gränsvärdet är lika med 1.

7. Likformig konvergens av funktionsserier

Summan av talserien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ definieras som bekant som gränsvärdet av partialsummorna $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. För funktionsserien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ definierar vi nedan *punktvis* och *likformig* konvergens.

Definition 7.1. Betrakta serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, $x \in I$, och sätt $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

(i) Serien konvergerar mot s *punktvis* i intervallet I om $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ för alla $x \in I$.

(ii) Serien konvergerar *likformigt* mot s i intervallet I om s_n konvergerar mot s likformigt där.

Eftersom likformig konvergens av serier svarar mot likformig konvergens av följden (s_n), kan satserna 6.1-6.3 tillämpas på (s_n). Vi återkommer strax till detta. Men först - hur avgör man om en serie är likformigt konvergent? Att bestämma $s(x)$ och beräkna supremum över I av $|s_n(x) - s(x)|$ är sällan möjligt. Ett vanlig sätt att visa likformig konvergens är att uppskatta funktionsserien med en konvergent talserie.

Sats 7.1 (Weierstrass majorantsats)**.** *Om det finns en konvergent talserie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *sådan att* $|f_k(x)| \le a_k$ *för alla* k *och alla* $x \in I$*, så konvergerar funktionsserien* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *likformigt i intervallet* I*.*

Bevis. Beteckna n:te partialsumman och summan av $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ med σ_n resp. σ. Vi får

$$\begin{aligned} |s_n(x) - s(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sigma - \sigma_n. \end{aligned}$$

Så

$$\sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| \le \sigma - \sigma_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty$$

eftersom $\sigma_n \to \sigma$. Alltså konvergerar s_n mot s likformigt. □

Exempel 7.1. Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1 + k^2 x^2}$ konvergerar i intervallet $[a, \infty[$, där $a \ge 0$, och att konvergensen är likformig om $a > 0$ men ej om $a = 0$.

Beteckna seriens termer med $f_k(x)$. Det är klart att serien konvergerar om $x = 0$ ($f_k(0) = 0$). Om $x > 0$, så är

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x/(1 + k^2 x^2)}{1/k^2} = \frac{1}{x}.$$

Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar, så konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ punktvis enligt andra jämförelsekriteriet för serier.

Låt $a > 0$. Genom att derivera ser vi att för stora k antar f_k sitt största värde då $x = a$, med $f_k(a) = a/(1 + k^2 a^2)$. Nu kan vi använda Weierstrass majorantsats med $a_k = a/(1 + k^2 a^2)$. Att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar följer ur andra jämförelsekriteriet igen.

Att visa att konvergensen inte är likformig om $a = 0$ är betydligt knepigare:

$$\sup_{x\geq 0}|s(x) - s_n(x)| = \sup_{x\geq 0}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x}{1+k^2x^2}\ [\text{sätt } x = 1/n] \geq \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1/n}{1+k^2/n^2}$$

$$\geq \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1/n}{1+k^2/n^2} = \frac{1/n}{1+(n+1)^2/n^2} + \cdots + \frac{1/n}{1+4n^2/n^2} \geq n\cdot\frac{1/n}{1+4n^2/n^2} = \frac{1}{5}.$$

Alltså går supremum ej mot 0 då $n \to \infty$.

Nu formulerar vi motsvarigheter till satserna 6.1-6.3.

Sats 7.2. *Om funktionerna* f_k *är kontinuerliga och funktionsserien* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *konvergerar likformigt i intervallet* I*, så är seriens summa en kontinuerlig funktion där.*

Bevis. Eftersom partialsumman s_n är kontinuerlig för varje $n \geq 1$, så är $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ en kontinuerlig funktion enligt sats 6.1. □

Sats 7.3. *Om funktionerna* f_k *är kontinuerliga och funktionsserien* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *konvergerar likformigt i det begränsade intervallet* $[a, b]$*, så är*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)dx.$$

Bevis. Eftersom funktionerna f_k är kontinuerliga och

$$\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)dx$$

(integralen av summan är lika med summan av integralerna), kan vi tillämpa sats 6.2, vilket ger

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)dx.$$

□

Sats 7.4. *Om funktionerna* f_k *är kontinuerligt deriverbara, funktionsserien* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *konvergerar och funktionsserien* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *konvergerar likformigt i intervallet* I*, så är*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' \quad \text{\textit{för alla} } x \in I.$$

Beviset använder sats 6.3. Vi utelämnar detaljerna.

Exempel på tillämpningar av satserna ovan finns i nästa avsnitt eftersom de förekommer naturligt i samband med potensserier.

Anmärkning 7.1. Även här kan man betrakta serier av analytiska funktioner. Weierstrass majorantsats gäller med exakt samma bevis och satserna 7.2, 7.3 gäller med de ändringar som framgår av anmärkning 8.2 i nästa avsnitt. Också sats 7.4 gäller, jämför med sats 6.4.

8. Potensserier

Definition 8.1. Låt x_0 vara ett reellt tal. En serie på formen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ kallas en potensserie.

I föregående avsnitt har vi summerat från $k = 1$, men för potensserier är det ofta bättre att summera från $k = 0$, t ex börjar Maclaurinutvecklingar med en konstant term. Eftersom substitutionen $\tilde{x} = x - x_0$ ger sambandet

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tilde{x}^k,$$

räcker det att formulera alla resultat för $x_0 = 0$. Därför betraktar vi i fortsättningen mestadels serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{8.1}$$

Eftersom serien börjar med $a_0 x^0 = a_0$ är det rimligt att tolka detta så även för $x = 0$ (här har vi egentligen det odefinierade uttrycket 0^0). Om $A = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existerar, så är $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = A|x|$. Enligt rotkriteriet konvergerar serien absolut för $|x| < 1/A$ om $A \neq 0$ och för alla x om $A = 0$. För $|x| > 1/A$ divergerar serien. Om $A = \infty$, divergerar serien för alla x utom $x = 0$. Motsvarande gäller enligt kvotkriteriet om $B = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existerar (det är klart att $A = B$ om båda gränsvärden existerar, varför?). Man kan visa ett starkare resultat.

Sats 8.1. *För potensserien* (8.1) *gäller ett av följande påståenden:*
(i) Serien konvergerar enbart för $x = 0$.
(ii) Det finns ett tal $R > 0$ *sådant att serien konvergerar absolut och likformigt för alla* $|x| < R$ *och divergerar för alla* $|x| > R$.
(iii) Serien konvergerar absolut och likformigt för alla x.

Definition 8.2. Talet R ovan kallas potensseriens konvergensradie. I fallet (i) sätter vi $R = 0$ och i fallet (iii) $R = \infty$.

Vi noterar att satsen inte säger någonting om fallet $|x| = R$, och att $R = 1/A = 1/B$, där A, B är som ovan. Oftast avgör man seriens konvergensradie just genom att bestämma A eller B.

Följdsats 8.1. *Om gränsvärdena nedan existerar (ändligt eller oändligt), så gäller*

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \quad \textit{och} \quad \frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|.$$

Om gränsvärdet är 0, så skall detta tolkas som $R = \infty$, och om gränsvärdet är lika med oändligheten, skall det tolkas som $R = 0$.

Bevis för satsen. Låt

$$R = \sup\{|x| : \text{serien (8.1) konvergerar}\}. \tag{8.2}$$

Vi skall visa att detta är samma R som i satsen. Det är klart att R är väldefinierat och antingen 0, positivt eller lika med oändligheten.

(i) Om $R = 0$, så divergerar serien för alla $x \neq 0$.

(ii) Om R är ett positivt tal, så följer det direkt ur (8.2) att serien divergerar för alla $|x| > R$. Låt nu x_0 vara ett tal sådant att $|x_0| < R$. Enligt definitionen av supremum finns det ett tal x_1 för vilket $|x_0| < |x_1| \leq R$ och serien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$ konvergerar. Eftersom detta medför att $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k x_1^k = 0$, får vi

$$|a_k x^k| \leq |a_k x_0^k| = |a_k x_1^k| \left|\frac{x_0}{x_1}\right|^k \leq \left|\frac{x_0}{x_1}\right|^k \quad \text{för alla } |x| \leq |x_0| \text{ och alla stora } k.$$

Den geometriska serien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x_0}{x_1}\right|^k$ konvergerar (kvoten är < 1), så för $|x| \leq |x_0|$ konvergerar serien (8.1) absolut enligt första jämförelsekriteriet för talserier och likformigt enligt Weierstrass kriterium. Eftersom $|x_0|$ kan väljas godtyckligt nära R, är konvergensen absolut och likformig för alla $|x| < R$.

(iii) Det återstående fallet är $R = \infty$. Låt x_0 vara ett godtyckligt tal. Eftersom supremum i (8.2) är lika med oändligheten, finner vi igen ett x_1 sådant att $|x_0| < |x_1|$ och serien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$ konvergerar. Nu fortsätter vi som i fall (ii). □

Exempel 8.1. För vilka x konvergerar följande serier?

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k}$.

Eftersom $|a_{k+1}/a_k| = 2k/(k+1) \to 2$, konvergerar serien för $|x| < 1/2$ och divergerar för $|x| > 1/2$. Om $x = 1/2$, får vi den divergenta serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, och om $x = -1/2$, får vi serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ som konvergerar enligt Leibniz kriterium. Alltså konvergerar potensserien för $-1/2 \leq x < 1/2$.

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}}$.

Här har vi $\displaystyle\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \to \frac{1}{e}$, så serien konvergerar för $|x| < e$ och divergerar för $|x| > e$. Att bestämma vad som händer då $|x| = e$ är svårare. Absolutbeloppet av seriens k:te term är då

$$\frac{e^k}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}} = \left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\right)^k \geq 1$$

eftersom $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k < e$ för alla k. Alltså går inte termerna mot 0, så serien divergerar och vår potensserie konvergerar för $-e < x < e$.

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Här har vi $|a_{k+1}/a_k| = k!/(k+1)! = 1/(k+1) \to 0$. Alltså konvergerar potensserien för alla x. Det här är ingen överraskning eftersom det är känt att seriens summa är lika med e^x för alla x.

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$.

Nu är $|a_{k+1}/a_k| = k+1 \to \infty$, så serien divergerar för alla $x \neq 0$.

Anmärkning 8.1. I stället för att bestämma $1/R$ som vi gjorde ovan kan man välja att använda rot- eller kvotkriteriet på hela uttrycket $a_k x^k$. Till exempel i (i) ovan skulle det innebära följande beräkning: $|a_{k+1}x^{k+1}/a_k x^k| = 2|x|k/(k+1) \to 2|x|$. Nu ser man att serien konvergerar om $2|x| < 1$, dvs. $|x| < 1/2$ och divergerar då $|x| > 1/2$.

Sats 8.2. *Summan av potensserien* (8.1) *är en kontinuerlig funktion för alla* $|x| < R$.

Beviset följer omedelbart ur satserna 7.2 och 8.1.

Nedan skall vi visa att potensserierna får integreras och deriveras termvis. Men först behöver vi ett hjälpresultat.

Lemma 8.1. *Potensserierna* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}x^{k+1}$ *och* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}$ *har samma konvergensradie som* (8.1).

Observera att den första och andra serien får man genom att integrera respektive derivera (8.1) termvis.

Bevis. Beteckna konvergensradien för den termvis integrerade serien med R_1. Eftersom $|a_k|/(k+1) \le |a_k|$, är det klart att $R \le R_1$. För att visa att $R \ge R_1$ använder vi ett liknande argument som i sats 8.1. Välj ett x sådant att $|x| < R_1$ och sedan x_1 med $|x| < |x_1| < R_1$. Eftersom $|x/x_1| < 1$, så går $(k+1)|x/x_1|^k$ mot 0. Det följer att

$$|a_k x^k| = (k+1)\left|\frac{x}{x_1}\right|^k \frac{|a_k|}{k+1}|x_1^k| \le \frac{|a_k|}{k+1}|x_1^k| \quad \text{för alla stora } k.$$

Då $|x_1| < R_1$, konvergerar serien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k+1}|x_1^k|$, och därmed även $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$. Det följer att om $|x| < R_1$, så konvergerar serien (8.1), dvs. $R \ge R_1$.

Om man integrerar den andra serien i lemmat termvis, så får man serien (8.1). Alltså följer andra delen av lemmat ur den första. $\square$

Sats 8.3. *För alla* $|x| < R$ *gäller*

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}x^{k+1} \quad \textit{och} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}.$$

Bevis följer omedelbart ur saterna 7.3 och 7.4.

Om en funktion är oändligt många gånger deriverbar, säger vi att den är av klass C^∞. Eftersom samma sats kan tillämpas på den deriverade serien, får vi följande

Följdsats 8.2. *Seriens summa är av klass C^∞ för $|x| < R$.*

Anmärkning 8.2. På samma sätt som (8.1) kan man betrakta komplexa potensserier

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \text{eller mer allmänt,} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad \text{där } a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}. \tag{8.3}$$

Resultaten ovan gäller för sådana serier, med exakt samma bevis. Integralen skall beräknas från 0 till z, respektive från z_0 till z (notera att den är oberoende av vägen). Mängden av punkter där en komplex potensserie konvergerar blir, enligt den komplexa versionen av sats 8.1, en cirkelskiva $|z - z_0| < R$ (eventuellt tillsammans med hela eller delar av cirkeln $|z - z_0| = R$). Detta förklarar det tidigare införda namnet konvergensradie. Notera också att enligt sats 8.3 är seriens summa en analytisk funktion för $|z - z_0| < R$.

Avslutningsvis ger vi några exempel på användning av resultaten ovan.

Exempel 8.2. (i) Beräkna summan av serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k}$ för $|x| < R$.

Det här är samma serie som i exempel 8.1(i) och vi vet redan att $R = 1/2$. Beteckna seriens summa med $s(x)$. Deriverar vi termvis, får vi en geometrisk serie som vi kan summera:

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^{k-1} = [\text{sätt } m = k-1] = 2\sum_{m=0}^{\infty} (2x)^m = \frac{2}{1-2x}.$$

Så $s(x) = -\ln(1-2x) + C$ och eftersom $s(0) = 0$, är $C = 0$, dvs. $s(x) = -\ln(1-2x)$.

(ii) Samma uppgift för serien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$.

Det är lätt att se att $R = 1$ här. Vi gör omskrivningen

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^k = s_1(x) - \frac{1}{1-x}.$$

Vidare har vi

$$\int_0^x s_1(t)\,dt = x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}, \quad \text{så} \quad s_1(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

och slutligen $s(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

(iii) Samma uppgift för serien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^k$.

Även här är det lätt att se att $R = 1$. Vi observerar att

$$\frac{k}{k+1} = \frac{k+1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1},$$

så

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^k = \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^k.$$

Sedan får vi, för $0 < x < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^k = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \right) dt = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Seriens summa är alltså $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ för $0 < x < 1$ och 0 för $x = 0$.

Uppgiften kan även lösas på ett annat sätt. Vi utgår från formeln $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ och integrerar serien, vilket ger

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) \quad \text{och} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Nu ger derivering

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^{k-1} = -\left(\frac{\ln(1-x)}{x} \right)',$$

så

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^k = -x \left(\frac{\ln(1-x)}{x} \right)' = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

9. Potensserier och analytiska funktioner

Det visar sig att det finns ett mycket nära samband mellan komplexa potensserier och analytiska funktioner.

Sats 9.1. *En potensserie* $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ *är en analytisk funktion av z i potensseries konvergensskiva. Dessutom fås den komplexa derivatan genom att derivera termvis.*

Bevis. Detta är en direkt konsekvens av sats 8.3 och anmärkning 8.2. □

Ovanstående sats är inte på något sätt konstig: vi vet ju att polynom är analytiska och potensserier är just en sorts generaliserade polynom.

Vad som är betydligt märkligare är att även omvändningen gäller:

Sats 9.2. *Om $f(z)$ är analytisk i en öppen mångd $\Omega \subset \mathbb{C}$ så kan $f(z)$ uttryckas som en konvergent potensserie i en omgivning till varje punkt i Ω.*

Bevis. Detta bygger på Cauchys integralformel. Potensserieutvecklingen erhålles på följande sätt: Låt γ vara randen till en cirkelskiva med centrum i z_0, i en omgivning till vilken f är analytisk. För z innanför γ får vi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{f(\zeta) d\zeta}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k d\zeta.$$

Eftersom $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$, är konvergensen likformig, så vi kan enligt sats 7.3 och anmärkning 7.1 kasta om ordningen mellan integrationen och summationen:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{där} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}}. \tag{9.1}$$

Men vi kan också gå ytterligare ett steg längre: om vi använder partialintegrationsformeln (4.3) på uttrycket för a_k i (9.1) så ser vi att

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = \frac{1}{k} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k}} = \ldots = \frac{1}{k!} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f^{(k)}(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},$$

där sista steget följer av Cauchys integralformel. □

Vi har därmed även visat:

Följdsats 9.1. *Serieutvecklingen av en analytisk funktion ges av den klassiska Taylor-serien:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Sammanfattningsvis kan vi nu konstatera att vi har fyra ekvivalenta villkor på en funktion för att den ska vara analytisk:

Sats 9.3. *Om real- och imaginärdelarna av $f(z)$ är av klass C^1 i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$ så är följande villkor ekvivalenta:*

(1) $f(z)$ är komplext deriverbar.
(2) $f(z)$ uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer.
(3) Integration är oberoende av vägen i enkelt sammanhängande områden.
(4) I en omgivning till varje punkt ges $f(z)$ av en konvergent potensserie.

En viktig konsekvens är: Om f är analytisk, så är den *alltid* av klass C^∞. Detta i motsats till det reellvärda fallet, där det finns funktioner som är av klass C^1 men ej C^2.

Exempel 9.1. (i) Beräkna $\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2}\, dz$, där Γ är cirkeln $|z| = 1$ orienterad moturs.

Låt $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ för $z \neq 0$ och $f(0) = 1$. Det är klart att f är analytisk för $z \neq 0$. Eftersom $\sin z = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, är $f(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-1}$ och då serien konvergerar i en omgivning av origo, är f analytisk även där enligt sats 9.3. Så f är analytisk för alla z. Nu kan vi använda sats 4.1 (Cauchys integralformel):

$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2}\, dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$

Notera att det är oväsentligt vad a_k ovan är men om vi vill, så kan vi ju använda oss av den kända formeln $\sin z = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{z^{2m-1}}{(2m-1)!}$ i stället.

Här är en annan variant av lösningen: Vi vet att för Maclaurinutvecklingen av $\sin z$ är konvergensradien $R = \infty$. Eftersom $\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-2} = \frac{1}{z} + g(z)$, där $g(z)$ är analytisk för alla z, är

$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2}\,dz = \int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz + \int_\Gamma g(z)\,dz = 2\pi i + 0,$$

där vi har använt exempel 2.1 och sats 3.2.

(ii) Beräkna $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2}\,dz$, där Γ är cirkeln $|z| = 1$ orienterad moturs.

Funktionen är analytisk utom i punkten $z = 0$. Maclaurinutvecklingen ger $\dfrac{e^z}{z^2} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + g(z)$, där g är analytisk. Så

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2}\,dz = \int_\Gamma \frac{1}{z^2}\,dz + \int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz + \int_\Gamma g(z)\,dz = I_1 + 2\pi i + 0$$

och det återstår att beräkna I_1:

$$I_1 = \int_\Gamma \frac{1}{z^2}\,dz = [z = e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi] = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\,dt}{e^{2it}} = i\int_0^{2\pi} e^{-it}\,dt = [-e^{-it}]_0^{2\pi} = 0.$$

10. Potensserier och differentialekvationer

Potensserieutveckling är en viktig metod, både i ren matematik och i tillämpningar. Speciellt inom fysiken kan man knappast överskatta den betydelse som metoden har haft. Orsaken är främst att många av de viktigaste differentialekvationerna som man studerar inte går att lösa exakt med hjälp av elementära funktioner och integreringsmetoder. Som regel kan man inte ens lösa enkla andra ordningens linjära ordinära differentialekvationer. Potensserier erbjuder då ofta ett bra alternativ; å ena sidan får man en lösningsformel som faktiskt är exakt, å andra sidan kan denna användas för att göra numeriska beräkningar med god kontroll över det fel man gör.

Metoden bygger på att man med hjälp av ekvationen bestämmer derivator av högre och högre ordning i en given punkt och dessa bestämmer ju sedan potensserien entydigt; den n:te derivatan av funktionen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

i origo är lika med $n!c_n$.

Exempel 10.1. Betrakta differentialekvationen

$$xf''(x) - f(x) = 0 \qquad f(0) = 0 \quad \text{och} \quad f'(0) = 1. \tag{10.1}$$

Vi ansätter nu lösningen som en potensserie runt origo. Eftersom nollte och första ordningens derivator redan är givna så kan denna skrivas

$$f(x) = x + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k. \tag{10.2}$$

Om vi deriverar med hjälp av sats 9.1 så erhålles

$$f'(x) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k c_k x^{k-1},$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2},$$

$$xf''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)kc_{k+1}x^k.$$

Insättning i ekvationen ger nu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)kc_{k+1}x^k = x + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k.$$

Eftersom en potensserie bestämmer sina koefficienter entydigt så får vi genom att jämföra höger- och vänsterleden:

$$\begin{aligned} c_2 \cdot 2 \cdot 1 &= 1 \\ c_3 \cdot 3 \cdot 2 &= c_2 \\ c_4 \cdot 4 \cdot 3 &= c_3 \\ c_5 \cdot 5 \cdot 4 &= c_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

vilket i sin tur ger

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2} \\ c_3 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ c_4 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \\ c_5 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \\ &\vdots \end{aligned}$$

och allmänt

$$c_k = \frac{1}{k!(k-1)!}.$$

Vi är därmed framme vid den allmänna lösningsformeln

$$f(x) = x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!(k-1)!} x^k. \tag{10.3}$$

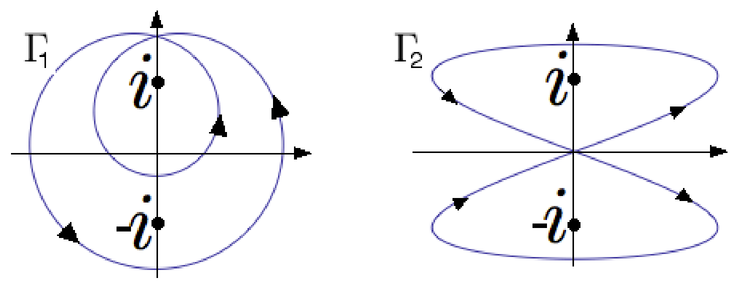
Enligt följdsats 8.1 får vi för konvergensradien

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} k(k+1) = \infty.$$

Formeln (10.3) ger därmed en lösning för alla $x \in \mathbb{R}$. Detta är dock mer än man kan hoppas på i de flesta fall.

11. Övningar

1. Avgör vilka av följande funktioner som är analytiska i $\mathbb{C}$:
   a: $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$
   b: $f(z) = 2xy + x + i(y^2 + y - x^2)$
   c: $f(z) = x^2 - y^2 + i(x^2 + y^2)$
   d: $f(z) = -e^x \sin y + e^x \cos y$
2. Beräkna $\displaystyle\int_\Gamma z e^{z^2}\, dz$ där Γ är kurvan $z(t) = t + i \sin t, 0 \le t \le \pi$.
3. Beräkna $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z}$ där Γ är ellipsen $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$, genomlupen i positiv led.
4. Beräkna $\displaystyle\int_\Gamma \frac{3z-2}{z^2-z} dz$, när a) Γ är cirkeln $|z| = \frac{1}{2}$, b) när Γ är cirkeln $|z| = 2$, (I båda fallen är cirklarna orienterade moturs,)
5. Beräkna $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2 e^z}{2z+i}\, dz$ där Γ är cirkeln $|z| = 1$, orienterad **medurs**.
6. Beräkna $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cos z}{z^3 + 9z}\, dz$ där Γ är cirkeln $|z| = 2$, orienterad moturs.
7. Beräkna $\displaystyle\int_{\Gamma_k} \frac{dz}{z^2+1}$ då $\Gamma_k, k = 1, 2$, är kurvorna i figuren.



8. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.
9. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+4}$.
10. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.
11. Visa att följande funktionsföljder resp. funktionsserier konvergerar likformigt i $\mathbb{R}$:
    a) $\dfrac{\sin kx}{k}$, b) $\dfrac{(-1)^k \arctan kx}{\sqrt{k}}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$, d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(x/k)}{k^{3/2}}$.
12. Undersök om funktionsföljden nedan konvergerar likformigt i det angivna intervallet:
    a) $x^k(1-x^k),\ 0 \le x \le 1$, b) $\dfrac{kx}{1+kx},\ x \ge 1$, c) $\dfrac{kx}{1+kx},\ x > 0$,
    d) $\dfrac{kx}{e^{kx}},\ x \ge 1$, e) $\dfrac{kx}{e^{kx}},\ x > 0$, f)* $kx^k(1-x),\ 0 \le x \le 1$,
    g) $kx^k(1-x),\ 0 \le x \le a$, där $a \in]0,1[$.
13. Visa att följande serier konvergerar i $\mathbb{R}$ och att konvergensen är likformig i varje intervall $[-a, a]$:
    a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+k^2x^2}$, b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x + \sin kx}{1+k^2}$.

14. Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(k+x)^2}$ konvergerar likformigt i intervallet $[0,1]$.

15. * Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2}$ inte är likformigt konvergent i $\mathbb{R}$.

16. Utveckla $f(x) = \frac{1}{2-x}$ som en potensserie i origo. För vilka x konvergerar serien?

17. Utveckla $f(x) = \frac{x^3}{1-2x^2}$ som en potensserie i origo. För vilka x konvergerar serien?

18. Beräkna $\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)x^k$. För vilka x konvergerar serien?

19. Beräkna $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+i)^k k^2}{2^k}$.

20. Beräkna $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+3}$. För vilka x konvergerar serien?

21. Beräkna följande integraler: $\int_\Gamma \frac{\cos z}{z^3}\,dz$, $\int_\Gamma \frac{e^z}{(z-1)^2}\,dz$ och $\int_\Gamma \frac{e^z}{(z-\pi i/2)^2}\,dz$, där Γ är cirkeln $|z| = 2$ orienterad moturs.

22. Visa att om g är en kontinuerlig funktion av en komplex variabel i en öppen enkelt sammanhängande mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$ som innehåller z_0, så är $S(z) = \int_{z_0}^{z} g(\zeta)\,d\zeta$ komplext deriverbar och $S'(z) = g(z)$ i Ω.

23. Visa att om $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ är en analytisk funktion, så är $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ och $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

24. a) Bestäm en analytisk funktion $f(z)$ som har realdelen lika med $2xy$ eller visa att ingen sådan analytisk funktion existerar.
b) Bestäm en analytisk funktion $f(z)$ som har imaginärdelen lika med $x^2 + y^2$ eller visa att ingen sådan analytisk funktion existerar.

Ledning till de sista två uppgifterna: Tänk på definitionen av en analytisk funktion.

12. Svar

1. b) och d) är analytiska, a) och c) är inte analytiska.
2. $\frac{1}{2}\left(e^{\pi^2}-1\right)$.
3. $2\pi i$.
4. a) $4\pi i$, b) $6\pi i$.
5. $\frac{\pi i}{4}e^{-i/2}$.
6. $\frac{2\pi i}{9}$
7. Γ_1: π, Γ_2: 2π.
8. $\frac{\pi}{6}$.
9. $\frac{\pi}{4}$.
10. $\frac{(2e-1)\pi}{6e^2}$.
12. a), c), e), f) nej, b), d), g) ja.
16. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^{k+1}}$, $-2<x<2$.
17. $\sum_{k=0}^{\infty}2^k x^{2k+3}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$.
18. $\frac{2x}{(1-x)^3}$. Konvergerar för $|x|<1$.
19. 6, $-3-i$.
20. $-\frac{1}{x^3}\ln(1-x)-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{3}$, $-1\le x<1$.
21. $-\pi i$, $2\pi e i$, -2π.
24. a) $f(z)=-iz^2$, b) ingen analytisk funktion.