Modelltenta 1

1. Låt $D = \{(x,y) : 1 \le xy \le 4,\ x^2 \le y \le 2x^2\}$. Beräkna $\iint_D x^3y^3\,dxdy$. (Analys III, 070509-4)

2. Kurvan Γ ges av $\mathbf{r}(t) = (t, e^t)$, där t går från 0 till 1. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma \left(3x^{11}y - 3x^8y^5\right)dx + \left(\frac{1}{4}x^{12} - \frac{5}{3}x^9y^4 + 2y\right)dy.$$

(Analys IV, 130815-2)

3. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

där $\mathbf{F} = (x^3, y^3, 1)$ och Y är ytan $z = \cos(x^2+y^2)$, $x^2+y^2 \le \frac{\pi}{2}$ (normalen uppåt). (Analys IV, 130116-3)

4. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

där $\mathbf{F} = (y^2z, 2xyz+x, xy^2+2z)$ och kurvan γ definieras av $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos^4 t \sin^2 t)$, där $0 \le t \le 2\pi$. (Analys IV, 130528-3)

5. Beräkna den komplexa kurvintegralen

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)},$$

då Γ är den positivt orienterade slutna kurva i halvplanet $\operatorname{Im} z \ge 0$ som ges av
a) en halvcirkel med centrum i origo och radie 2, tillsammans med intervallet $[-2,2]$.
b) en halvcirkel med centrum i origo och radie 4, tillsammans med intervallet $[-4,4]$.
(Analys IV, 130815-4)

6. Undersök om följden $\dfrac{kx}{1+kx}$ konvergerar likformigt: a) i intervallet $x \ge 1$,
b) i intervallet $x > 0$. (T övn. 12bc)

Modelltenta 2

1. Beräkna den generaliserade integralen $\iint_D \dfrac{dxdy}{1+x^2y^2}$, där $D = \{(x,y) : xy \ge 1,\ y \le x \le 2y\}$, eller visa att integralen är divergent. (Analys III, 110507-5)

2. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{-y^2dx + 2xydy}{x^2+y^4}$$

från $(-1,0)$ till $(1,0)$ längs kurvan $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t, 2t^2-2)$, $-1 \le t \le 1$. (Analys IV, 130116-2)

3. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot N dS.$$

$\mathbf{F} = (x, y, z)$ och ytan Y är den del av grafen $z = 2 - (x^2 + y^2)^2$ där $z \geq 1$ (normalen uppåt). (Analys IV, 130815-3)

4. Ytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = 1 - y^2$ skär varandra i en sluten kurva. Låt γ vara denna kurva orienterad så att dess positiva riktning i punkten $(1, 0, 1)$ ges av vektorn $(0, 1, 0)$. Beräkna

$$\int_\gamma \left(y^2 + z\right) \, dx + z \, dy + xy \, dz.$$

(Analys IV, 121220-2)

5. Låt $f(z)$ vara en analytisk funktion med egenskapen $f(0) = 0$. Antag att vi vet att $\mathrm{Re} f(z) = x^3 - x^2 - 3xy^2 + y^2 + 2y$, där $z = x + iy$. Bestäm funktionen $f(z)$. (Ledning: använd Cauchy-Riemanns ekvationer!) (Analys IV, 130116-4)

6. Visa att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(k+x)^2}$ konvergerar likformigt i intervallet $[0, 1]$. (T övn. 14)

Två uppgifter som inte fick plats här, men som definitivt är tänkbara:

5'. Beräkna den komplexa kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{\sin 2z \, dz}{z^2},$$

där γ är randen till den rektangel i $\mathbb{C}$ som har hörn i punkterna $1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$, genomlupen i positiv led. (Analys IV, 121220-4)

6'. Beräkna summan av serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+1)2^k}.$$

(Analys IV, 130116-5b)