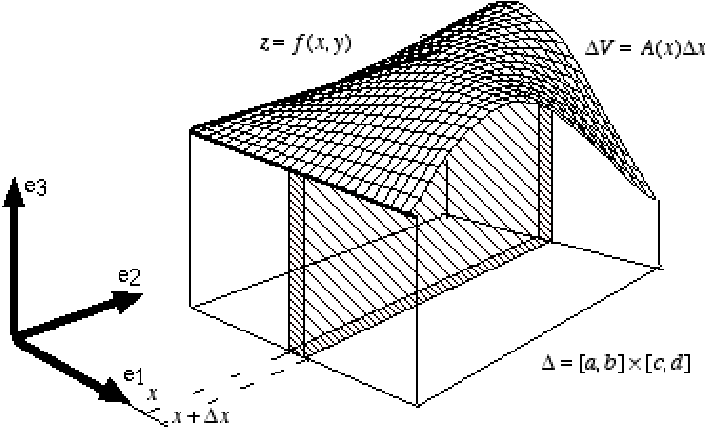
Volym och dubbelintegraler över en rektangel

Alla funktioner nedan antas vara kontinuerliga.

Om $f(x) \geq 0$ i intervallet $[a, b]$, så är arean av mängden $\{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x),\ a \leq x \leq b\}$ lika med integralen $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ och låt $f(x, y) \geq 0$ i Δ.
Nu vill vi bestämma volymen av den tredimensionella mängden $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq f(x, y),\ (x, y) \in \Delta\}$.



Fixerar vi ett x, så har mängden $\{(y,z) : 0 \leq z \leq f(x,y),\ c \leq y \leq d\}$ en area som är beroende av valet av x och som vi betecknar med $A(x)$.

På bilden ovan är $A(x)$ arean av den (streckade) vertikala ytan som ligger längst bort från oss.

Om Δx är litet, så är volymen av den del av kroppen som ligger mellan x och $x + \Delta x$ ungefär lika med $A(x)\Delta x$.

Detta leder till volymformeln $V = \int_a^b A(x)\,dx$.

Men $A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, så $V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$.

Eftersom det går att kasta om rollerna mellan x och y, får vi slutligen

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Uttrycken ovan kallas för itererade enkelintegraler.

I envariabelfallet, om man inte antar att $f \geq 0$, så får man "area med tecken": man får arean med plustecken av den delen där $f > 0$ och arean med minustecken av den delen där $f < 0$, dvs. av den delen som ligger under x-axeln.

Motsvarande gäller i tvåvariabelfallet: man får minus volymen av den delen där $f < 0$, dvs. av den delen som ligger under xy-planet.

Om man inte vill göra en koppling till volymen, så definerar man dubbelintegralen av f över rektangeln Δ som ettdera av de itererade enkelintegralerna

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx \text{ och } \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Dubbelintegralen betecknas med symbolen $\iint_\Delta f(x, y)\, dxdy$.

Vanligtvis definierar man dubbelintegralen på ett annat sätt och sedan visar man att om f är kontinuerlig, så är

$$\begin{aligned}\iint_\Delta f(x,y)\,dxdy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.\end{aligned}$$

Exempel. Beräkna $\displaystyle\iint_\Delta x^2y\,dxdy$, där $\Delta = [0,1]\times[0,2]$.

Vi integrerar m.a.p. x först. $\displaystyle\int_0^1 x^2y\,dx = \left[x^3y/3\right]_{x=0}^{x=1} = y/3$.

Så $\displaystyle\iint_\Delta x^2y\,dxdy = \int_0^2 y/3\,dy = [y^2/6]_0^2 = 2/3$.

Integrerar vi m.a.p. y först, får vi

$$\iint_\Delta x^2y\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^2y\,dy\right) dx =$$

$$\int_0^1 \left[x^2y^2/2\right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 2x^2\,dx = [2x^3/3]_0^1 = 2/3.$$

Här spelar det ingen roll om man integrerar m.a.p. x eller y först men ibland kan det göra det.

Exempel. Beräkna $\displaystyle\iint_\Delta xe^{xy}\,dxdy$, där $\Delta = [0,1]\times[0,2]$.

$$\int_0^2 xe^{xy}\,dy = [xy = t,\ x\,dy = dt] = \int_0^{2x} e^t\,dt = e^{2x} - 1.$$

Så

$$\iint_\Delta xe^{xy}\,dxdy = \int_0^1 (e^{2x}-1)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - x\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}.$$

Att integrera m.a.p. x först är svårare eftersom det kräver en partialintegration (och även y-integralen blir sedan svårare att beräkna).

Om $f(x,y) = g(x)h(y)$ och $\Delta = [a,b] \times [c,d]$, så är
$\iint_\Delta f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta g(x)h(y)\,dxdy =$
$\int_c^d \left(\int_a^b g(x)h(y)\,dx \right) dy =$ [bryt ut h(y)] $=$
$\int_c^d h(y) \left(\int_a^b g(x)\,dx \right) dy = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy.$
Alltså får vi

$$\iint_\Delta g(x)h(y)\,dxdy = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy$$

Exempel. Beräkna $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[2,4]} xe^{x+y}\,dxdy.$

Eftersom $xe^{x+y} = xe^x e^y$, får vi
$\displaystyle\iint_{[0,1]\times[2,4]} xe^{x+y}\,dxdy = \int_0^1 xe^x\,dx \int_2^4 e^y\,dy.$

Dubbelintegraler över mer generella områden

Låt D vara en kompakt mängd och låt f vara definierad och kontinuerlig på D. Man kan då välja $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ så att $D \subset \Delta$.

Definiera nu $f_D(x, y) = f(x, y)$ för alla $(x, y) \in D$ och $f(x, y) = 0$ för övriga (x, y).

Definiera sedan $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_\Delta f_D(x, y)\, dxdy$

förutsatt att uttrycket i högerledet är meningsfullt (f kallas då integrerbar över D).

Observera att f_D oftast är diskontinuerlig på randen till D - den är faktiskt kontinuerlig enbart i de randpunkter där $f = 0$.

Det visar sig dock att för en stor klass av områden D är f integrerbar om den är kontinuerlig i D och dubbelintegralen kan beräknas genom itererad integration.

Sats. Låt f vara kontinuerlig i D.
(i) Om $D = \{(x, y) : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x),\ a \leq x \leq b\}$, där α, β är kontinuerliga funktioner, så är f integrerbar över D och

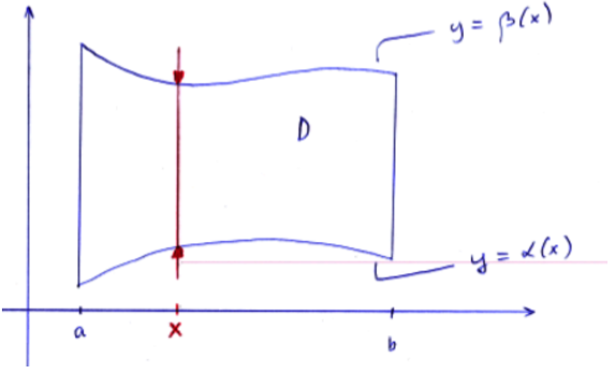
$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

(ii) Om $D = \{(x, y) : \phi(y) \leq x \leq \psi(y),\ c \leq y \leq d\}$, där ϕ, ψ är kontinuerliga funktioner, så är f integrerbar över D och

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Mängden D i (i) kallas för ett område av intervalltyp i y-led och i (ii) ett område av intervalltyp i x-led.

Här är ett exempel på område av intervalltyp i y-led:



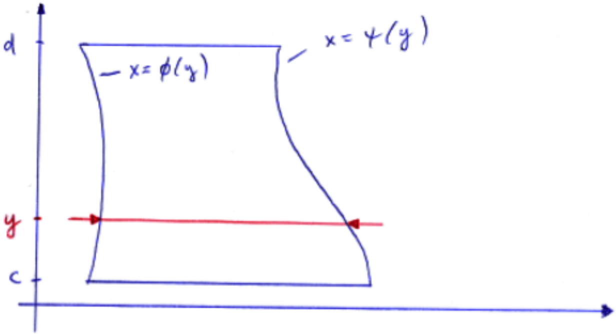
När man integrerar m.a.p. y, så är x fixerat. Man går in i området vid den nedersta röda pilen och går ur området vid den översta, dvs. man integrerar över linjestycket $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$.

Därför blir den inre integralen lika med $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy$.

Sedan får man ta alla linjestycken för alla olika $x \in [a, b]$.

Detta ger $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right)\,dx.$

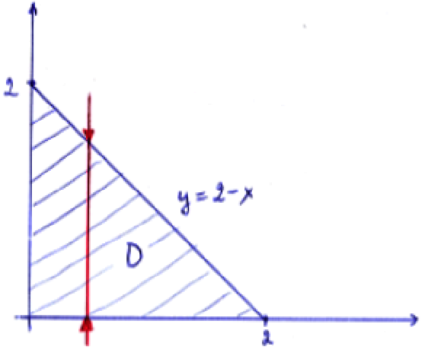
Ett exempel på område av intervalltyp i x-led:



Vid integration m.a.p. x går man in i området då $x = \phi(y)$ och går ur då $x = \psi(y)$. Därför blir den inre integralen lika med $\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$ den här gången.

Exempel. Beräkna dubbelintegralen $I = \iint_D e^{x+y}\,dxdy$, där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,2)$.

Det underlättar om man ritar en figur:



Vi integrerar m.a.p. y först. $I = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} e^x e^y\,dy \right) dx =$

$$\int_0^2 [e^x e^y]_{y=0}^{y=2-x}\,dx = \int_0^2 (e^x e^{2-x} - e^x)\,dx = \int_0^2 (e^2 - e^x)\,dx$$

$= [e^2 x - e^x]_0^2 = e^2 + 1.$
Vi kunde lika gärna ha integrerat m.a.p. x först.

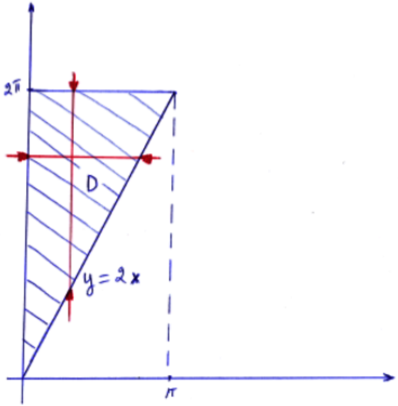
OBS! Ett vanligt förekommande allvarligt fel är att man skriver om integralen som $\iint_D e^{x+y}\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^2 e^x e^y\,dy \right) dx.$
Då har man inte integrerat över området D utan över det större området som är kvadraten $[0, 2] \times [0, 2]$.

Ett annat vanligt förekommande fel:

$$\iint_D e^{x+y}\,dxdy = \int_0^2 e^x\,dx \int_0^{2-x} e^y\,dy = (e^2 - 1)(e^{2-x} - 1).$$

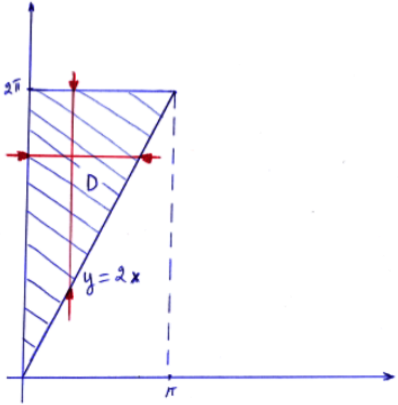
Då har man inte fått integralens värde utan en funktion av x (integralens värde skall ju vara ett tal).

Exempel. Beräkna dubbelintegralen $I = \iint_D \frac{\sin y}{y}\, dxdy$, där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(0,2\pi)$ och $(\pi,2\pi)$.



Integrerar vi m.a.p. y först, får vi $I = \int_0^{\pi} \left(\int_{2x}^{2\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy \right) dx$.

Men $(\sin y)/y$ har ingen primitiv funktion som kan uttryckas i (ändligt många) elementära funktioner. Så vi fastnar.

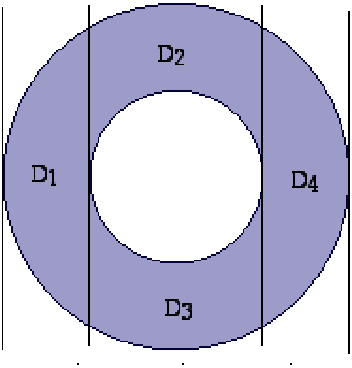


Integrerar vi m.a.p. x först, får vi

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{y/2} \frac{\sin y}{y}\, dx \right) dy = \int_0^{2\pi} \left[x \frac{\sin y}{y} \right]_{x=0}^{x=y/2} dy =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin y \, dy = 0.$$

De områden D som i praktiken förekommer är oftast antingen av intervalltyp eller kan delas in i sådana områden. Nedan följer ett exempel:



Områdena D_1-D_4 är av intervalltyp i y-led och integralen över D (det blåa området) blir lika med summan av integralerna över D_1-D_4.