Trippel- & multipelintegraler.

Definitionen av <u>trippelintegraler </u>av en funktioner $f(x,y,z)$ över rätblock $\Delta = [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ med hjälp av trappfunktioner är mycket lik motsvarande definition för dubbelintegraler och vi kan även skriva dom som itererade enkelintegraler:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_e^f (\int_c^d (\int_a^b f(x,y,z)dx)dy)dz$$

där det nu finns sex (ekvivalenta) sätt att välja mellan.

Utvidgningen till allmänna områden görs på samma sätt som i två variabler:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz \overset{def}{=} \iiint_\Delta f_D(x,y,z)dxdydz, \quad D\subset\Delta.$$

Vi har nu flera olika iterationsformler:

$$D=\left\{(x,y,z):\alpha(x,y)\le z\le\beta(x,y),(x,y)\in E\right\}$$

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_E\left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

Vi kan även dela upp trippelintegralen som

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{D_x} f(x,y,z)\,dydz \right) dx$$

I teorin är det ganska lite som skiljer teorin för trippelintegraler från motsvarande teori för dubbelintegraler. Skillnaden ligger i ställe i att det kan krävas betydligt större geometriska insikter för att beräkna dem.

För att förstå hur ett tredimensionellt område ser ut kan det vara till hjälp att titta på skärningen av området med tvådimensionella plan.

Ex 2. $z = x^2 + y^2$. Ex 3. $z = x^2 + 4y^2$.

Ex 4. $z = x^2 + y^4$. Ex 5. $z = x^2 + 2x + 2y^2 - 4y + 5$.
Samma metod kan användas för att förstå andra klassiska exempel på kvadratiska ytor.

Ex 6. $z^2 = x^2 + y^2$ (Kon)

Ex 7. $z^2 = x^2 + 2y^2 - 1$ (enmantlad hyperboloid).

Ex 8. $z^2 = x^2 + 2y^2 + 1$ (tvåmantlad hyperboloid).

Självfallet har de flesta ytor som man stöter på en mer komplicerad karaktär. Och det finns inte heller någon garanti för att man ska kunna bena upp den med enkla medel, men man kan alltid försöka.

Ex 9. Hur ser området

$$D = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + \left(z - x^2 \right)^2 \leq 1 \right\} \text{ ut?}$$

Ex 10. Hur ser området

$$D = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1 \right\} \text{ ut?}$$

För att illustrera det hela ska vi nu räkna ut olika volymer med hjälp av trippelintegraler. En lämplig formel att arbeta med (som i själva verket är en definition) är

<u>**Def**</u>: $Vol(D) = \iiint_D 1\, dxdydz$.

Ex 11. Bestäm volymen av den mängd punkter som ligger under planet z=3-2y och över paraboloiden z=x^2+y^2.

Ex 12. Bestäm volymerna av områdena i Ex 9 och 10.

Vi kan nu utveckla integralbegreppet vidare genom att införa multipelintegraler:

$$\iint \ldots \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int_D f(\bar{x})\,d\bar{x}$$

Precis som tidigare kan dessa beräknas, i fallet $D=[a_1,b_1]\mathrm{x}[a_2,b_2]\mathrm{x}\ldots\mathrm{x}[a_n,b_n]$, som itererade enkelintegraler:

$$\int_{a_1}^{b_1}\Big(\int_{a_2}^{b_2}\ldots\Big(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n\Big)\ldots dx_2\Big)dx_1.$$

(n! ekvivalenta varianter) och sedan generaliseras till allmännare områden.
Alla tidigare iterationsformler kan nu sammanfattas i en enda: Låt D vara ett begränsat område i $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^k \mathrm{x} \mathbf{R}^{n-k}$ och låt $D' = \pi(D)$ vara projektionen av D på $\mathbf{R}^k$. För $x' \in \mathbf{R}^k$ sätt $D_{x'}=\{x'' \in \mathbf{R}^{n-k}: (x', x'') \in D\}$. Då blir

$$\int_D f(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_{D'}\Big(\int_{D_{x'}} f(\bar{x}', \bar{x}'')\,d\bar{x}''\Big)\,d\bar{x}'\ .$$