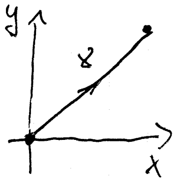
Räkneövning 15-04-09

9.3 $$\int_\gamma (x^2+xy)\,dx + (y^2-xy)\,dy$$

a) γ är linjestycket från $(0,0)$ till $(2,2)$



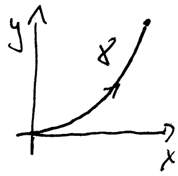
parametrisering: $\gamma: [0,2] \to (x(t), y(t)) = (t, t)$

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = 1 \qquad y'(t) = \frac{dy}{dt} = 1$$

$$\Rightarrow \int_\gamma (x^2+xy)\,dx + (y^2-xy)\,dy = \left[\begin{matrix} x=t,\ y=t \\ dx=dt,\ dy=dt \end{matrix} \ \text{enligt parametrisering}\right]$$

$$= \int_0^2 t^2+t\cdot t + t^2 - t\cdot t \, dt = \int_0^2 2t^2 = \left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

b) γ är parabelbågen $x^2 = 2y$ från $(0,0)$ till $(2,2)$



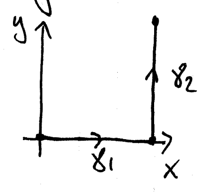
parametrisering $\gamma: [0,2] \to (x(t), y(t)) = \left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ $x=t,\ y=\frac{1}{2}x^2$

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = 1 \qquad \frac{dy}{dt} = y'(t) = t$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \ldots = \int_0^2 \left(t^2 + t\cdot\frac{1}{2}t^2\right)\cdot 1 + \left(\frac{1}{4}t^4 - t\frac{1}{2}t^2\right)\cdot t \, dt$$

$$= \int_0^2 t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^5 - \frac{1}{2}t^4 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{24} - \frac{t^5}{10}\right]_0^2 = \frac{62}{15}$$

c) γ är linjestyckena från $(0,0)$ till $(2,0)$ och från $(2,0)$ till $(2,2)$



parametrisering $\gamma_1: [0,2] \to (t, 0)$ $\quad x'(t) = 1,\ y'(t) = 0$

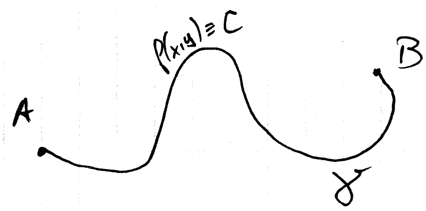
$\gamma_2: [0,2] \to (2, t)$ $\quad x'(t) = 0,\ y'(t) = 1$

$$\int_\gamma \dots = \int_{\gamma_1} \dots + \int_{\gamma_2} \dots = \int_0^2 (t^2 + t\cdot 0)\cdot 1 + (0^2 - 0\cdot t)\cdot 0 \; dt + \int_0^2 (2^2 + 2\cdot t)\cdot 0 + (t^2 - t\cdot 2)\cdot 1 \, dt$$

$$= \int_0^2 t^2 \, dt + \int_0^2 t^2 - 2t \, dt$$

$$= \left[\frac{2t^3}{3} - t^2 \right]_0^2 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

<u>9.6</u> γ går från A till B längs en nivåkurva till $f(x,y)$ vilket arbete utför kraftfältet $F(x,y) = \text{grad} f(x,y)$ där?

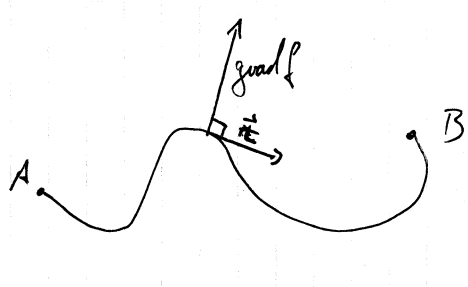


parametrisering:
$\gamma : [0,1] \to (\varphi(t), \psi(t))$ $\quad \gamma(0) = A$, $\gamma(1) = B$

$$\int_\gamma f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy = \int_0^1 f'_x(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t) + f'_y(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(f(\varphi(t),\psi(t))\big)\,dt = \big[f(\varphi(t),\psi(t))\big]_0^1 = f(B) - f(A) = 0$$

eller: gradienten är i rät vinkel med normalvektorn till nivåkurvan



$\Rightarrow$ integrand är noll hela vägen.