# Räkneövning 15-04-16

Kurvintegral: $\int_\gamma F\,dr = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$

Greens formel: $P, Q$ $C^1$ i öppen mängd $\Omega$
$D \subset \Omega$ kompakt, $\partial D$ styckvis $C^1$
positivt orienterad

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D Q_x - P_y \,dxdy$$

Potentialfält: $F = (P, Q)$ potentialfält, konservativ i $\Omega$.
$:\Longleftrightarrow \exists U$ $C^1$ i $\Omega$ : $F = \text{grad}\, U$
$U$... potential $P = U_x$ $Q = U_y$

Sats: $F$ potentialfält, $\gamma$ kurva $\Rightarrow \int_\gamma F\,dr = U(\text{slut}) - U(\text{begynnelse})$
($\Rightarrow \int_\gamma F\,dr$ oberoende av vägen)

Sats: $F$ kontinuerligt i $\Omega$ (bågvis sammanhängande), $\int_\gamma F\,dr$ oberoende av vägen $\Rightarrow \exists U$ potential av $F$

Sats: $F$ har potential $U$ $C^2$ i $\Omega$ $\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$
$\cancel{\Leftarrow}$

Sats: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i $\Omega$ + $\Omega$ enkelt sammanhängande $\Rightarrow \exists U$ potential

9.33) visa att $2xy\,dx - (y^2+3a^2-3x^2)\,dy$ efter multiplikation med en lämplig funktion $g(y)$ blir differentialen av en funktion $U(x,y)$

$\iff$ visa att fältet $F = (P,Q) = (2xy, -y^2 - 3a^2 + 3x^2)$ efter .... blir ett potentialfält / konservativt fält med potentialfunktion $U(x,y)$

vi har $\frac{\partial Q}{\partial x} = +6x$ $\quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$

hur blir de lika? gissa:

$g(y) = y$ : $\frac{\partial Q\cdot g}{\partial x} = 6xy$ $\quad \frac{\partial P\cdot g}{\partial y} = 4xy$ ↯

$g(y) = y^2$ : $\frac{\partial Q\cdot g}{\partial x} = 6xy^2$ $\quad \frac{\partial P\cdot g}{\partial y} = 6xy^2$ !

allmänt: $\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y)\cdot g(y)\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\cdot g(y) = 6x g(y)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(P(x,y)\cdot g(y)\right) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) g(y) + P(x,y)\cdot \frac{\partial g}{\partial y}(y) =$

$= 2x g(y) + 2xy\cdot g'(y)$

$6x\,g(y) = 2x g(y) + 2xy\, g'(y)$

$2x\,g(y) = \cancel{4}xy\, g'(y)$

$2/y = \frac{g'}{g}$

$2 \ln y = \ln g + C$

$C\cdot y^2 = g(y)$

$\Rightarrow$ välj $g(y) = Cy^2$

fältet $\tilde{F} = g(y) F = (2Cxy^3, -Cy^4 - 3Ca^2y^2 + 3Cx^2y^2)$ är definierat i $\mathbb{R}^2$ (enkelt sammanhängande) och $\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \Rightarrow \exists$ potential

$\Rightarrow$ hitta potentialfunktionen $\text{grad}\, U = \cancel{\text{[illegible]}}\ \tilde{F} = (\tilde{P}, \tilde{Q})$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \tilde{P} = 2Cx\cancel{\phantom{2}}y^3 \\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial y} = \tilde{Q} = -Cy^4 - 3Ca^2y^2 + 3Cx^2y^2 \end{cases} \quad \overset{\text{integration}}{\Longrightarrow} U(x,y) = Cx^2y^3 + h(y)$$

$$3Cx^2y^2 + h'(y) = \frac{\partial U}{\partial y} = -Cy^4 - 3Ca^2y^2 + 3Cx^2y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad h'(y) = -Cy^4 - 3Ca^2y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad h(y) = -\frac{C}{5}y^5 - Ca^2y^3 + D$$

$$\Rightarrow U(x,y) = Cx^2y^3 - \frac{C}{5}y^5 - Ca^2y^3 + D \qquad C, D \in \mathbb{R}$$

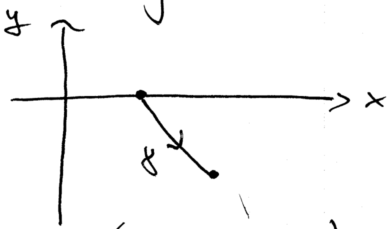
(19) visa: $\int_\gamma \underbrace{(3x^2y^2+2x)}_{P}\,dx + \underbrace{(2x^3y+4y^3)}_{Q}\,dy$ är oberoende av vägen för kurvor $\gamma$ i $\mathbb{R}^2$; värde om $\gamma$ går från $(1,0)$ till $(2,-1)$

•) $\mathbb{R}^2$ är enkelt sammanhängande. vi behöver bara kolla:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \exists\, U \text{ potential} \Rightarrow F=(P,Q) \text{ oberoende av vägen}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y \qquad \text{okej}$$

•) värdet $\gamma: (1,0) \to (2,-1)$




(a) välj $\gamma$ så att parametrisering är $(1+t, -t)$, $t\in[0,1]$
$dx = dt$, $dy = -dt$

$$\Rightarrow \int_\gamma \ldots = \int_0^1 3(1+t)^2(-t)^2 + 2(1+t) - 2(1+t)^3(-t) - 4(-t)^3\,dt$$

$$= \ldots = \int_0^1 5t^4+16t^3+9t^2+4t+2\,dt = \ldots = 12$$

(b) hitta en potential

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2y^2+2x \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 2x^3y+4y^3 \end{cases} \Rightarrow U = x^3y^2+x^2+h(y)$$

$$2x^3y + h'(y) = \partial U/\partial y = 2x^3y + 4y^3$$

$$h'(y) = 4y^3$$

$$h(y) = y^4 + C$$

$$\Rightarrow U(x,y) = x^3y^2 + x^2 + y^4 + C$$

vi kan välja $C=0$ och får

$$\int_\gamma \ldots = U(2,-1) - U(1,0) = 8+4+1 - (0+1+0)$$

$$= 12$$