Matematik II, Matematisk Analys del B
Bonusuppgifter omgång 2
Lämnas in 23 november

1. Betrakta kurvan $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, f(t))$, $0 \le t \le 2\pi$, där f är en deriverbar funktion.
   a) Visa att $\mathbf{r}(t)$ och $\mathbf{r}'(t)$ är vinkelräta i de punkter på kurvan där $f(t) = 0$ eller $f'(t) = 0$ och i inga andra punkter.
   b) Visa att $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$ aldrig är lika med nollvektorn.
   c) När är vektorerna $\mathbf{r}'(t)$ och $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$ vinkelräta?
2. Bestäm en enkel, sluten, positivt orienterad, kontinuerligt deriverbar kurva Γ i planet så att integralen
$$\int_\Gamma (5x^4y^3 - 4y + y^3)\,dx + (2x - 2x^3 + 3x^5y^2)\,dy$$
   blir så stor som möjligt. Beräkna integralen för denna kurva.
3. Asteroidkurvan γ ges av parametriseringen
$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$
   Skissera kurvan i grova drag och beräkna arean av det område som γ innesluter. (Ö, uppgift 9.25)
4. Beräkna $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{3x^2+4y^2}\,dx + \frac{x}{3x^2+4y^2}\,dy$, där γ är:
   a) kurvan $x^2 + y^2 = 4$ tagen ett varv i positiv riktning,
   b) kurvan $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ tagen ett varv i negativ riktning.
5. Beräkna $\displaystyle\int_\gamma (x^5y^6 - xy)\,dx + (y + x^6y^5)\,dy$, där γ är kvartscirkeln $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \ge 0$, från $(1,0)$ till $(0,1)$.