Inledning till flervariabelanalys

Martin Tamm

Matematiska institutionen
Stockholms universitet

Fjärde upplagan
2015

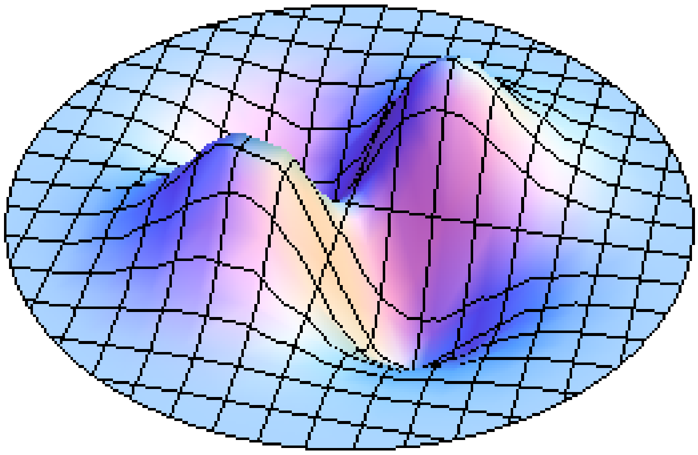
TILLÄMPNINGAR AV ENVARIABELANALYS PÅ PROBLEM I FLERA VARIABLER

1. Inledning

Detta kompendium är avsett att ge första terminens studenter i matematik vid Stockholms Universitet en inblick i flervariabelanalys.
Traditionellt brukar första terminen vid högskolan ägnas åt envariabelanalys, medan flervariabelanalysen i huvudsak läses under andra terminen. Det är då vanligt att utgångspunkten blir sådana delar av teorin som skiljer sig väsentligt från envariabelteorin, t ex egenskaper hos gränsvärden, skillnaden mellan partiell deriverbarhet och differentierbarhet etc. Även om denna utgångspunkt på sitt sätt är naturlig tenderar den att få flervariabelanalysen att framstå som svårare än den behöver vara. I själva verket är de flesta av de metoder som används i tillämpningar tämligen naturliga fortsättningar av envariabelanalysen i kombination med elementär geometri och linjär algebra.
I den här framställningen har jag därför valt att just ta fasta på sådana enkla delar som t ex optimering över enkla områden och dubbelintegraler. Förhoppningen är att detta ska ge dem som endast läser matematik motsvarande en termin heltid en inblick i hur flervariabelanalys fungerar och samtidigt tjäna som en introduktion för dem som ämnar fortsätta med ämnet.
Framställningen är skriven som ett komplement till den ordinarie kurslitteraturen i analys för första årets studenter vid Stockholms Universitet. Referenser i texten ges därför till Persson & Böiers, Analys i en variabel (PB1) och Analys i flera variabler (PB2) av samma författare.
Avsnitt märkta med * ingår inte i kurser som ges vid Stockholms Universitet från och med HT2014, utom i vissa fall kursivt.

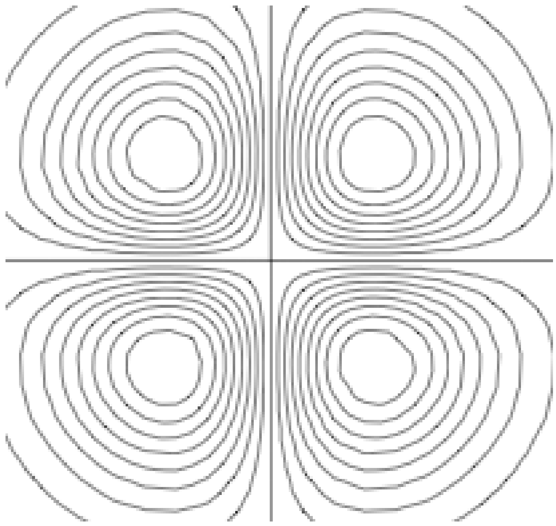
2. Funktioner av två variabler

En graf till en funktion av en variabel, $f(x)$, kan uppfattas som en kurva i planet: punkten (x, y) ligger på kurvan om och endast om $y = f(x)$. En graf till en funktion av två variabler, $f(x, y)$, kan på motsvarande sätt uppfattas som en yta i det tredimensionella rummet: punkten (x, y, z) ligger på ytan om och endast om $z = f(x, y)$. Det bör betonas att funktionsbegreppet i sig inte är svårare i två variabler än i en variabel: en funktion kan fortfarande uppfattas som en maskin som till ett givet argument (en punkt i planet (x, y)) producerar ett värde z. Det som händer är i stället att geometrin kan bli svårare att förstå eftersom vi måste handskas med fler dimensioner.
I figur 1 visas grafen till $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$ i området $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3\}$. Det kan vara besvärligt att åskådliggöra grafer till funktioner av två variabler på papper, men det finns ändå goda möjligheter att föreställa sig dem. Det finns också många datorprogram som kan användas för att studera ytorna ur olika vinklar, t ex Mathematica (som har använts för att rita upp funktionen i figur 1). I bilden framträder något som kan liknas vid ett bergslandskap med två berg med ett pass emellan, samt två dalsänkor på sidorna.
Ett annat sätt att åskådliggöra samma graf är att rita nivåkurvor, dvs mängder av punkter med samma funktionsvärde: $\{(x, y) : f(x, y) = c\}$. Dessa kan jämföras med höjdkurvorna på en vanlig topografisk karta. I figur 2 visas en uppsättning nivåkurvor till samma funktion som i figur 1. Observera att berg och dalar här får samma utseende. Om man vill



FIGUR 1

göra bilden tydligare så kan man markera på varje kurva det funktionsvärde c som kurvan svarar mot eller färglägga kurvorna.



FIGUR 2

Det är lätt att hitta på egna exempel på funktioner av två variabler, t ex $f(x, y) = xy$, $f(x, y) = y \sin(x + y)$, $f(x, y) = xy(x^2 + y^2)^{-1}$, $f(x, y) = x^4 + xy + y^4$ etc. Det är mycket nyttigt att öva sig på enkla funktioner och försöka föreställa sig deras grafer och nivåkurvor, och eventuellt därefter rita upp dem med hjälp av något datorprogram.
Det är också viktigt att understryka att funktioner av två (eller flera) variabler inte på något sätt är abstrakta matematiska påfund. I själva verket beror de flesta storheter som man studerar i tillämpningarna på många variabler. Exempelvis är trycket i en gas beroende av både volym och temperatur, och strömstyrkan i en ledning är beroende av såväl spänning som resistans. Det är nog snarare så att de envariabelfunktioner som vi studerar ofta representerar en mycket idealiserad bild av verkligheten där vi sållat bort alla påverkande faktorer utom en enda.
I fortsättningen ska vi i stort sett endast betrakta funktioner av två variabler som är kontinuerliga i den mängd där vi undersöker dem. Vi konstaterar, utan att gå in på de tekniska detaljerna, att sådana funktioners grafer kan uppfattas som sammanhängande ytor och

att de flesta funktioner som dyker upp i tillämpningarna brukar ha denna egenskap. För en mer precis definition hänvisas till PB2.

2.1. **Hur deriverar man funktioner av flera variabler?** Att generalisera begreppet derivata till två eller flera variabler är i viss mening mindre självklart än att generalisera funktionsbegreppet. I själva verket finns det flera möjligheter. Vi börjar här med den enklaste varianten:

Definition 1. *Låt $z = f(x, y)$ vara en funktion av två variabler. De* **partiella derivatorna** *av funktionen med avseende på x respektive y i punkten (x_0, y_0) definieras som gränsvärdena*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}. \tag{2}$$

Idén är helt enkelt att vi låser den ena variabeln vid ett fixt värde och sedan tar derivatan med avseende på den andra variabeln på samma sätt som vi brukar göra med en vanlig envariabelfunktion. Observera också att vi i beteckningarna till vänster använder symbolen ∂ (som utläses "del") i stället för ett vanligt d. Detta ska uppfattas som en indikation på att den funktion som vi betraktar faktiskt beror även av en eller flera andra variabler förutom den som vi deriverar med avseende på. Att bryta mot denna konvention är mindre ett matematiskt fel än ett sätt att göra texten svårgenomskådlig för läsaren.

Exempel 1. *Om $f(x, y) = xy^2$ så är $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$ och $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$.*

Förutom de ovan angivna finns det, precis som i en variabel, många olika sätt att beteckna partiell derivata som alla har sina egna fördelar och nackdelar. Här är ett urval av beckningar för derivatan med avseende på x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x = z'_x = D_x f = D_1 f. \tag{3}$$

3. Största och minsta värde till en funktion

3.1. **Envariabelfallet.** Från envariabelteorin (se PB1) vet vi att en kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ alltid antar ett största och ett minsta värde. Vidare vet vi att dessa måste antas i punkter av någon av följande typer:

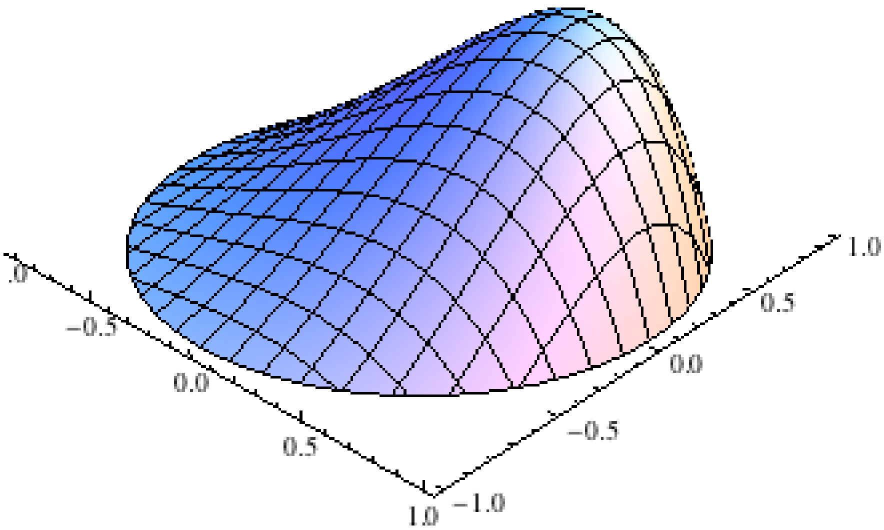
(1) Randpunkter till intervallet (a och b).
(2) Punkter i $]a, b[$ där funktionen inte är deriverbar.
(3) Punkter i $]a, b[$ där funktionens derivata är noll (stationära punkter).

Detta resultat är oerhört användbart. Även om det inte finns någon garanti för att mängden av punkter i 1-3 ovan är ändlig visar det sig i praktiken att så nästan alltid är fallet. Detta medför att problemet att hitta största och minsta värde till en funktion normalt reducerar sig till att jämföra ändligt många funktionsvärden.
I de följande avsnitten ska vi se att största och minsta värde till en funktion av två variabler i princip kan bestämmas på liknande sätt, även om de räknemässiga svårigheterna ofta kan bli betydligt större.

3.2. **Ett exempel i två variabler.** Betrakta funktionen

$$f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)e^{x+y} \tag{4}$$

i området $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$. Hur ska vi gå tillväga för att hitta största och minsta värde (se figur 3)?



FIGUR 3

Till att börja med kan vi konstatera att frågan om minsta värde i det här fallet är trivial: Båda faktorerna är ju större eller lika med noll i D, och eftersom f faktiskt är lika med noll i de punkter i D där $x^2 + y^2 = 1$ så måste minsta värdet vara lika med noll. Å andra sidan är det uppenbart att funktionen är strikt positiv i alla punkter (x, y) med $x^2 + y^2 < 1$, så om vi utgår från att det finns ett största värde så bör det rimligtvis antas i någon av dessa.
Om vi antar att det största värdet antas i punkten (x_0, y_0) så måste detta också vara det största värde som de deriverbara funktionerna

$$g(x) = f(x, y_0) \qquad \text{och} \qquad h(y) = f(x_0, y) \tag{5}$$

antar i omgivningar till punkterna x_0 respektive y_0. Det följer därför från envariabelteorin att $g'(x_0) = h'(y_0) = 0$. Enligt definitionen av de partiella derivatorna i Definition 1 ovan har vi alltså visat att

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'(y_0) = 0. \tag{6}$$

I vårt fall får vi med produktregeln för derivering:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = (1 - x^2 - y^2)e^{x+y} - 2xe^{x+y} = (1 - x^2 - y^2 - 2x)e^{x+y}, \tag{7}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = (1 - x^2 - y^2)e^{x+y} - 2ye^{x+y} = (1 - x^2 - y^2 - 2y)e^{x+y}. \tag{8}$$

Eftersom exponentialfaktorn alltid är skild från 0 kan den divideras bort och vi får därför följande icke-linjära ekvationssystem för x och y:

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - 2x &= 0, \\ 1 - x^2 - y^2 - 2y &= 0. \end{cases} \tag{9}$$

Icke-linjära ekvationssystem kan ofta vara mycket svåra eller omöjliga att lösa. I det här fallet kan vi dock helt enkelt subtrahera den undre ekvationen från den övre vilket ger $2y - 2x = 0$, dvs $x = y$. Insättning av detta i någon av ekvationerna ger andragradsekvationen $1 - x^2 - x^2 - 2x = 0$, vilket också kan skrivas som

$$x^2 + x - \frac{1}{2} = 0. \tag{10}$$

Denna ekvation har rötterna $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$, vilket ger de två punkterna

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \qquad \text{och} \qquad \left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right). \tag{11}$$

Men det är bara den första av dessa punkter som uppfyller $x^2 + y^2 < 1$, varför vi inte har mer än ett val för den punkt där det största värdet antas. Detta blir lika med

$$f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = (\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}-1}. \tag{12}$$

Därmed har vi beräknat både det största och det minsta värdet till funktionen i det givna området.

3.3. **Största och minsta värde, en generell metod.** Exemplet i föregående avsnitt är valt för att vara enkelt. Ändå innehåller det de väsentliga delarna i en extremvärdesundersökning: dels måste vi leta efter nollställen till de partiella derivatorna, dels måste vi undersöka randkurvan till området.
Innan vi går vidare kan det vara lämpligt att fundera lite över vilka egenskaper området ska ha för att en extremvärdesundersökning ska vara genomförbar. I en variabel vet vi att kontinuerliga funktioner antar största och minsta värde om mängden är ett slutet och begränsat intervall, men att detta inte behöver gälla om mängden är av annan typ, t ex ett öppet eller halvöppet intervall. Vi kan nu fråga oss om det finns någon klass av mängder i planet som generaliserar begränsade, slutna intervall i den meningen att kontinuerliga funktioner alltid måste anta största och minsta värde. Vi observerar därför först två egenskaper som kännetecknar dessa mängder: de har begränsad utsträckning och de innehåller alla sina randpunkter.

Definition 2. *En begränsad mängd $M \subset \mathbb{R}^2$ som innehåller alla sina randpunkter kallas* **kompakt.**

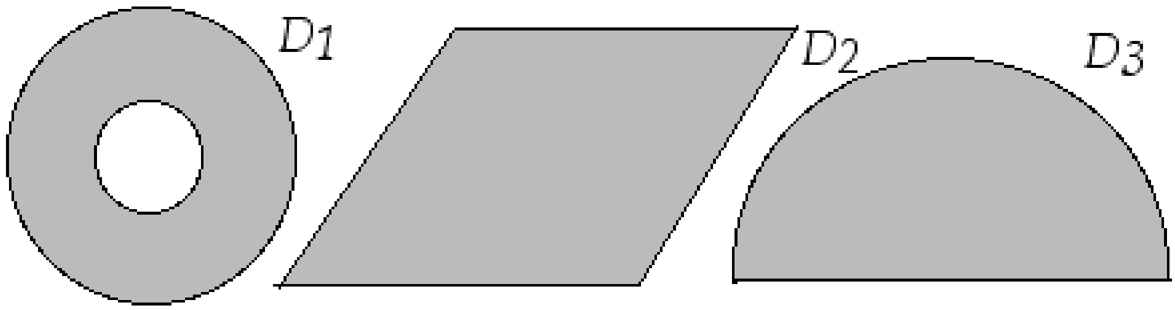
Kompakta mängder kan ha en ganska komplicerad struktur och det kan ibland vara besvärligt att avgöra vad begreppet randpunkt egentligen betyder. Det finns en precis matematisk definition, men i de fall som vi kommer att betrakta kommer det inte att vara något problem: randen kommer alltid att bestå av ett ändligt antal kurvor som går att parametrisera på ett enkelt sätt.
Man kan nu visa att en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd alltid antar ett största och ett minsta värde. Och precis som i en variabel kan man visa följande

Sats 1. *Extremvärdena måste antas i punkter av någon av följande typer:*

(1) *Randpunkter till mängden.*
(2) *Punkter inuti området där funktionen inte är partiellt deriverbar.*
(3) *Punkter inuti området där de partiella derivator är noll (stationära punkter).*

Beviset för existensen av största och minsta värde är ganska besvärligt. Men om vi tar existensen för given så är beviset för att extremvärdena antas i punkter av någon av ovanstående typer nästan trivialt: om den punkt där t ex det största värdet antas inte är en randpunkt och funktionen dessutom är partiellt deriverbar i punkten (dvs punkten är inte av typ 1 eller 2), så följer på samma sätt som i exemplet i avsnitt 3.2 att de partiella derivatorna måste vara noll (dvs punkten måste vara av typ 3).
Det kan också tilläggas att de flesta funktioner som vi kommer att betrakta kommer att vara partiellt deriverbara, vilket medför att punkter av typ 2 sällan kommer att spela någon roll.

3.4. **Ytterligare exempel på extremvärdesundersökningar.** De tre exemplen nedan (cirkelskiva, triangel och kvadrat), skall bara ses som ett urval. Om man har förstått tekniken så kan den utan svårighet användas på många andra typer av områden, t ex sådana som finns exemplifierade i figur 4.



Figur 4

3.4.1. *Cirkelskiva.* I det här exemplet betraktar vi, precis som i avsnitt 3.2 en funktion definierad i en cirkelskiva, men randundersökningen blir något mer komplicerad. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = 3\ln(1 + x^2 + y^2) - 2x + 2y \tag{13}$$

i området

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}. \tag{14}$$

Eftersom randkurvan i det här fallet är enhetscirkeln kan vi parametrisera denna genom att sätta $x = \cos t$ och $y = \sin t$. Vi kan nu införa funktionen $h(t) = f(\cos t, \sin t) = 3\ln 2 - 2\cos t + 2\sin t$. När t varierar så kommer funktionen $h(t)$ att anta precis samma värden som funktionen $f(x,y)$ antar på randen. Om speciellt f antar ett största eller minsta värde på randen i punkten (x_0, y_0) så kommer även $h(t)$ att anta sitt största respektive minsta värde för det argument t_0 som har egenskapen att $(x_0, y_0) = (\cos t_0, \sin t_0)$. Eftersom h är deriverbar så måste alltså gälla att $h'(t_0) = 0$. Eftersom $h'(t) = 2\sin t + 2\cos t$ följer att $2\sin t_0 + 2\cos t_0 = 0$ vilket ger att $\tan t_0 = -1$, dvs $t_0 = -\pi/4 + k\cdot\pi$. Om vi sätter in dessa värden i funktionen $h(t)$ så får vi värdena $3\ln 2 - 2\sqrt{2}$ och $3\ln 2 + 2\sqrt{2}$.

Anmärkning 1. *Här har vi använt det faktum att en periodisk deriverbar funktion av en variabel alltid antar största och minsta värde i punkter där derivatan är noll,*

Det vi hittills gjort kan sammanfattas med att säga att vi har bestämt det största och det minsta värdet som funktionen kan anta på randen. Men är dessa värden också de största och minsta värdena som funktionen kan anta i hela D? Vi måste även undersöka vad som händer i det inre av området. Eftersom funktionen överallt är partiellt deriverbar reducerar sig problemet därmed till att hitta punkter där de partiella derivatorna är noll. Vi får

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{6x}{1 + x^2 + y^2} - 2, \tag{15}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6y}{1 + x^2 + y^2} + 2. \tag{16}$$

Om vi adderar ekvationerna får vi

$$\frac{6x}{1 + x^2 + y^2} + \frac{6y}{1 + x^2 + y^2} = 0. \tag{17}$$

Om vi sedan multiplicerar med faktorn $(1+x^2+y^2)$ och dessutom delar med 6 får vi kvar ekvationen $x + y = 0$, eller alternativt $y = -x$. Om vi sätter in detta i (15) ovan får vi ekvationen

$$0 = \frac{6x}{1+2x^2} - 2 \Leftrightarrow 6x = 2 + 4x^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2} \tag{18}$$

som har lösningarna $x = 1$ och $x = \frac{1}{2}$, vilket svarar mot punkterna $(1, -1)$ och $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Den första av dessa ligger inte i D eftersom $1^2+(-1)^2 = 2 > 1$ och kan därför inte komma i fråga. Den andra däremot ligger i D eftersom $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1$, och är därför en möjlig extrempunkt. Funktionsvärdet blir $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 3\ln(3/2) - 2$.
Sammanfattningsvis har vi nu kommit fram till en lista på tre tal, $3\ln 2-2\sqrt{2}$, $3\ln 2+2\sqrt{2}$ och $3\ln(3/2) - 2$ som alltså måste innehålla både det största och det minsta värdet.
Ett överslag ger att $3\ln 2 + 2\sqrt{2}$ är betydligt större än de två andra ($\approx 4,9$) och är alltså det sökta största värdet. Men vilket är minst av $3\ln(3/2) - 2$ och $3\ln 2 - 2\sqrt{2}$?
En approximativ beräkning ger att $3\ln 2 - 2\sqrt{2} \approx 3 \cdot 0,6931 - 2 \cdot 1,4142 = -0,7491$, och $3\ln(3/2) - 3 \approx 3 \cdot 1,0961 - 3 \cdot 0,6931 - 2 = -0,7835$. Värdet i den inre stationära punkten är något mindre än minimum på randen. Sammanfattningsvis antas det största värdet på randen men det minsta antas i det inre.

Anmärkning 2. *Ofta kan det, precis som i en variabel, vara en svårighet att faktiskt jämföra de olika möjliga funktionsvärdena, särskilt om man inte har tillgång till närmevärden. För ögonblicket koncentrerar vi oss emellertid på de problem som hänger ihop med det faktum att vi har flera variabler.*

3.4.2. *Triangel.* I följande exempel betraktar vi en partiellt deriverbar funktion som är definierad i en triangel. Grundprinciperna är desamma som i fallet med cirkelskivan, men eftersom det inte är praktiskt att försöka parametrisera hela randen på en gång, kommer vi i stället undersöka de tre sidorna i triangeln var och en för sig. Det kan då vara praktiskt att redan från början konstatera att största och minsta värde måste antas i punkter som tillhör följande typer:

(1) Hörn.
(2) Stationära punkter längs någon av sidorna.
(3) Stationära punkter i det inre.

Med stationär punkt längs någon sida menas här en stationär punkt till den envariabelfunktion som vi får då vi parametriserar sidan.
Betrakta funktionen

$$f(x, y) = (x + y)e^{-xy} \tag{19}$$

i området

$$D = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 2\}. \tag{20}$$

Hörnen är i det här fallet punkterna $(0, 0)$, $(2, 0)$ och $(0, 2)$. Vi undersöker nu de tre sidorna var och en för sig:
Sidan mellan $(0, 0)$ och $(2, 0)$. Denna är en del av x-axeln så vi väljer $t = x$ som parameter, $0 \leq t \leq 2$. Vi sätter alltså $h_1(t) = f(t, 0) = t$. h_1 saknar tydligen stationära punkter eftersom $h_1'(t) = 1$ i alla punkter. På samma sätt kan vi välja $t = y$ som parameter längs sidan mellan $(0, 0)$ och (0.2). Om vi definierar $h_2(t) = f(0, t) = t$ så ser vi att det inte heller längs denna sida finns några stationära punkter.
Det återstår alltså att undersöka sidan mellan $(0, 2)$ och $(2, 0)$. Här går det att parametrisera linjestycket på flera olika sätt som alla ter sig naturliga. Vi kan t ex sätta $x = t, y = 2 - t$ och får då funktionen.

$$h_3(t) = f(t, 2 - t) = 2e^{-t(2-t)} = 2e^{t^2-2t}, \tag{21}$$

Om vi deriverar med avseende på t får vi

$$h_3'(t) = 4(t-1)e^{t^2-2t}, \tag{22}$$

som uppenbarligen har ett nollställe i $t = 1$, vilket svarar mot den stationära punkten $(1, 1)$ på sidan.

För att hitta stationära punkter i det inre undersöker vi de partiella derivatorna. Vi får

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-xy} - y(x+y)e^{-xy} = e^{-xy}(1 - y(x+y)), \tag{23}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-xy} - x(x+y)e^{-xy} = e^{-xy}(1 - x(x+y)). \tag{24}$$

Om vi subtraherar den undre ekvationen från den övre får vi

$$(x-y)(x+y)e^{-xy} = 0. \tag{25}$$

Eftersom exponentialfaktorn alltid är positiv och dessutom både x och y är positiva kan vänsterledet bli noll endast om den första faktorn är noll dvs om $x = y$. Insättning i (23) eller (24) ovan ger

$$1 - 2x^2 = 0, \tag{26}$$

som har den entydiga positiva lösningen $x = 1/\sqrt{2}$. Detta ger den unika stationära punkten $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Sammanfattningsvis har vi nu en lista på fem punkter, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$ och $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ som innehåller de möjliga extrempunkterna. Det kan nu vara lämpligt att avsluta undersökningen med en liten tabell:

(x, y)	$(0, 0)$	$(2, 0)$	$(0, 2)$	$(1, 1)$	$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
$f(x, y)$	0	2	2	$2e^{-1}$	$\sqrt{2}e^{-1/2}$
	min	max	max		

Båda de sista värdena ligger uppenbarligen mellan 0 och 1, varför det framgår att de största och minsta värdena antas i hörnen, och är lika med 2 respektive 0.

3.4.3. *Kvadrat.* I det sista exempel undersöker vi en kvadrat. Tekniken i det här fallet är i stort sett densamma som för triangeln.

Betrakta funktionen

$$f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4 \tag{27}$$

i området

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}. \tag{28}$$

Hörnen är i det här fallet punkterna $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ och $(0, 2)$. Vi undersöker först de fyra sidorna:

Sidan mellan $(0, 0)$ och $(2, 0)$. Denna är en del av x-axeln så vi väljer $t = x$ som parameter, $0 < t < 2$. Vi sätter $h_1(t) = f(t, 0) = t^4$. h_1 saknar tydligen stationära punkter eftersom $h_1'(t) = 4t^3 > 0$ i hela intervallet.

Sidan mellan $(2, 0)$ och $(2, 2)$. Här väljer vi $t = y$ och definierar $h_2(t) = f(2, t) = 16-8t+t^4$. Derivation ger $h_2'(t) = -8 + 4t^3$ som har nollstället $t = \sqrt[3]{2}$. Detta svarar mot punkten $(2, \sqrt[3]{2})$ i kvadraten.

De övriga två sidorna kan behandlas på samma sätt. Men vi kan också helt enkelt observera att både område och funktion är symmetriska med avseende på x och y, vilket innebär att de stationära punkterna också kommer att ligga spegelsymmetriskt med avseende på linjen $y = x$. Vi får alltså ingen punkt på sidan mellan $(0, 0)$ och $(0, 2)$ och punkten $(\sqrt[3]{2}, 2)$ på sidan mellan $(0, 2)$ och $(2, 2)$.

För att hitta stationära punkter i det inre undersöker vi de partiella derivatorna. Vi får

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y, \tag{29}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y^3. \tag{30}$$

Den första ekvationen ger att $y = x^3$, vilket instoppat i den andra ekvationen ger att $x^9 - x = 0$. Detta kan också skrivas $x(x^8 - 1) = 0$ av vilket framgår att rötterna är $x = 0$ och $x = \pm 1$. Via sambandet $y = x^3$ får vi nu punkterna $(-1, -1)$, $(0, 0)$ och $(1, 1)$, men endast den sista ligger i det inre av kvadraten. ($(0, 0)$ är ett hörn, och har alltså redan tagits med som sådant.)
Sammanfattningsvis har vi nu en lista på sju punkter, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, \sqrt[3]{2})$, $(\sqrt[3]{2}, 2)$ och $(1, 1)$ som innehåller de möjliga extrempunkterna. Vi får tabellen:

(x, y)	$(0, 0)$	$(2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 2)$	$(2, \sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, 2)$	$(1, 1)$
$f(x, y)$	0	16	16	16	$16 - 6\sqrt[3]{2}$	$16 - 6\sqrt[3]{2}$	-2
		max	max	max			min

Största värde är alltså 16 och minsta värde är -2.

Anmärkning 3. *Att det minsta värdet är -2 kan även inses på följande elementära sätt via kvadratkompletteringar:*

$$\begin{aligned} x^4 - 4xy + y^4 &= x^4 - 2x^2 + 2(x - y)^2 - 2y^2 + y^4 = \\ &= (x^2 - 1)^2 + 2(x - y)^2 + (y^2 - 1)^2 - 2. \end{aligned} \tag{31}$$

Av denna omskrivning framgår att funktionen alltid är större än eller lika med -2 (eftersom kvadraterna är icke-negitiva) och att den antar värdet -2 om $x^2 = 1, y^2 = 1$ och $x = y$, vilket inträffar i punkterna $(1, 1)$ och $(-1, -1)$.
Att visa att maximum antas i tre av hörnen kräver dock en mer ingående analys.

3.5. **Flera dimensioner*.** De metoder som vi studerat i detta avsnitt kan generaliseras till fler än två variabler. Att beräkna de stationära punkterna till en funktion av t ex tre variabler går till ungefär på samma sätt som i två variabler, och uppdelningen i tre olika fall i Sats 1 gäller fortfarande. Det som är den stora skillnaden är att randen nu blir två-dimensionell: vi kan inte längre betrakta problemet att hitta max och min på randen som ett en-variabelproblem. Genom att parametrisera med två variabler kan man dock reducera problemet till ett problem av samma typ som vi har studerat i detta avsnitt.
Allmänt kan vi säga att analogin till Sats 1 kan reducera ett extremvärdesproblem till ett motsvarande problem med en dimension mindre. Genom upprepad användning av detta resonemang kan man lösa problem i godtyckligt hög dimension. Det ska dock sägas att de räknemässiga svårigheterna kan bli enorma. I praktiken kan det vara bättre att använda andra metoder.
För första terminens studier räcker det gott med två variabler, och vi låter därför problem med fler variabler än så anstå till senare kurser.

3.6. **Övningar.**

(1) Bestäm största och minsta värde till funktionen

$$f(x, y) = xy - \ln(x^2 + y^2)$$

i området $D = \{(x, y) : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(2) Bestäm största och minsta värde till funktionen

$$f(x, y) = 3x - 4x^3 + 12xy$$

i det område som bestäms av olikheterna $x \geq 0, y \geq 0$ och $x + y \leq 1$.

(3) Bestäm största och minsta värde till funktionen

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3\ln(x+y+2)$$

i cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{8}$.

(4) Bestäm största och minsta värde till funktionen

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2\ln(x+y+1)$$

i triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(0,2)$ och $(2,0)$.

(5) Bestäm största och minsta värde till funktionen

$$f(x,y) = \ln(x+y) - \frac{1}{16}(x^2 + y^2)$$

i det område som definieras av att $2 \leq x + y \leq 8$ och att $x, y \geq 0$.

(6) Bestäm största och minsta värde till funktionen

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + |\sin(x+y)|$$

i rektangeln med hörn i $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(0,\pi)$ och (π,π).

4. Volymberäkning och dubbelintegraler

I PB1 finns redovisat hur man bestämmer volymen av en rotationskropp med hjälp av integralkalkyl. Faktum är att samma typ av resonemang kan användas för att bestämma volymen av betydligt mer allmänna områden. På detta sätt leds vi naturligt fram till begreppet dubbelintegral.

4.1. **En allmän version av skivformeln.** Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vara ett begränsat område och låt för varje $x \in \mathbb{R}$, Ω_x vara det två-dimensionella området $\{(y,z) : (x,y,z) \in \Omega\}$. Låt vidare $A(x)$ beteckna arean av Ω_x. Eftersom Ω är begränsat kan vi anta att $A(x) = 0$ utanför något intervall $[a,b]$.

Sats 2. *Under mycket allmänna förutsättningar om området gäller följande formel för volymen av* Ω*:*

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_a^b A(x)\,dx. \tag{32}$$

Det finns även motsvarande formler för integration i y*- respektive* z*-led.*

Motiveringen till formel är helt enkelt att den del av området som ligger mellan två plan som båda är parallella med yz-planet och som ligger på avståndet dx från varandra kan, för små värden på dx, approximeras med en cylinder med bottenyta $A(x)$ och höjd dx. Detta ger ett volymsbidrag

$$dV = A(x)\,dx. \tag{33}$$

Ett standardförfarande ger därefter satsen efter en gränsövergång, se vidare PB1.
Vi ska här inte gå in på precis vilka villkor som bör ställas på mängden D för att satsen ska gälla utan konstaterar bara att dessa är tillräckligt allmänna för de tillämpningar som görs nedan om funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig.

Följdsats 1 (Skivformeln)**.** *Volymen av den rotationskropp som uppstår då funktionskurvan* $z = f(x)$, $a \leq x \leq b$ *får rotera runt* x*-axeln är*

$$\pi \int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

Det finns även en annan nära besläktad sats för beräkning av rotationsvolymer (se PB1):

Sats 3 (Cylinderskalsformeln). *Volymen av den rotationskropp som uppstår då området* $\{(x,z) : 0 \le z \le f(x), a \le x \le b\}$, *($f(x) \ge 0$) får rotera runt z-axeln är*

$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Motiveringen här liknar den för skivformeln: vi undersöker volymen som uppstår då den del av området som svarar mot x-värden i ett litet intervall av längd dx roterar runt z-axeln. Detta kan ses som ett tunt cylinderskal med höjd $f(x)$ och basarea lika med produkten av cylinderskalets tjocklek ($= dx$) och dess omkrets ($\approx 2\pi \cdot x$), vilket ger volymen

$$dV = 2\pi x f(x)\, dx. \tag{34}$$

Samma typ av standardförfarande som för skivformeln ger nu Sats 3.

4.2. **Fallet med en positiv funktion, definierad på en rektangel.** Låt oss nu betrakta en funktion $f(x,y)$ som är kontinuerlig, icke-negativ och definierad på en rektangel $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ ($= \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$). Låt vidare $\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Delta, 0 \le z \le f(x,y)\}$. Enligt Sats 2 ges nu volymen av Ω av

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_a^b A(x)\, dx, \tag{35}$$

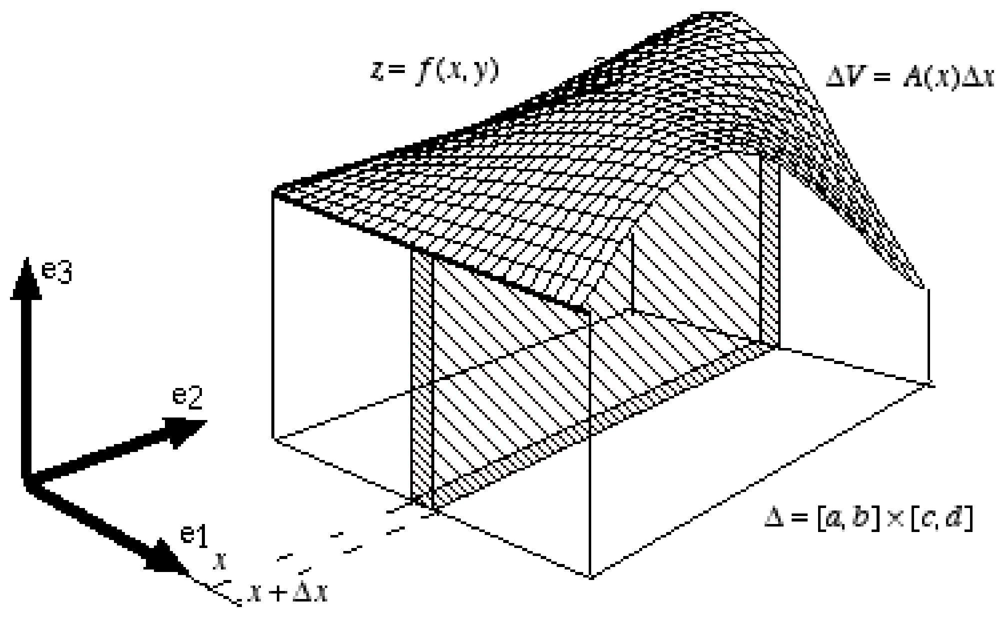
där $A(x)$ är arean av området $\Omega_x = \{(y,z) : c \le y \le d, 0 \le z \le f(x,y)\}$. Men enligt tolkningen av en vanlig integral som area ser vi att

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\, dy, \tag{36}$$

vilket insatt i (32) ger formeln

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx. \tag{37}$$

Ett uttryck av den här typen kallas för en itererad enkelintegral. Vi har alltså visat att volymer av områden av den typ vi studerar kan uttryckas med hjälp av sådana itererade enkelintegraler. Observera att vi precis lika gärna hade kunnat kasta om rollerna mellan x



FIGUR 5

och y: vi hade kunnat använda skivformeln i y-led som en integral av motsvarande areafunktion och sedan skrivit om denna som en integral i x-led, vilket hade givit upphov till formeln

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy. \tag{38}$$

4.3. **Definition av begreppet dubbelintegral.** I (37) och (38) har vi kommit fram till två olika uttryck för volymen av samma område. Eftersom båda uttrycken är lika korrekta så måste de alltså vara lika. Det ligger därför nära till hands att införa en gemensam beteckning:

Definition 3. *Vi definierar* **dubbelintegralen** *av $f(x, y)$ över rektangeln $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ som vilken som helst av de itererade enkelintegralerna*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx \quad \text{och} \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy. \tag{39}$$

Dubbelintegralen av $f(x, y)$ över Δ betecknas

$$\iint_\Delta f(x, y)\, dxdy. \tag{40}$$

Anmärkning 4. *Definitionen ovan motiverades med utgångspunkt från ett intuitivt volymsbegrepp. När definitionen väl en gång är gjord finns det emellertid inte någon egentlig anledning att hålla fast vid kravet på att $f(x, y)$ ska vara icke-negativ; vi kan under alla omständigheter definiera dubbelintegralen av $f(x, y)$ som vilken som helst av de itererade enkelintegralerna ovan. Egentligen borde vi då också ge ett strikt bevis för att de itererade enkelintegralerna är lika under lämpliga förutsättningar. Det är fullt möjligt att göra detta, men ofta väljer man i mer rigorösa framställningar en mer teknisk definition av dubbelintegralen som inte bygger på Sats 2 och visar sedan i stället att denna dubbelintegral kan beräknas med hjälp av itererade enkelintegraler. En sådan framställning finns t ex i PB2. För denna inledande diskussion av dubbelintegraler räcker det dock med Definition 3.*
I fortsättningen kommer vi, precis som ovan, ibland att motivera olika påståenden om dubbelintegraler genom att behandla dem som om integranden alltid vore positiv. Det är inget stort problem att utsträcka argumenten till godtyckliga integrander, men detta får anstå till en mer rigorös genomgång av ämnet.

4.4. **Exempel på enkla dubbelintegraler.** Med den definition vi har valt blir beräkningen av dubbelintegraler över rektanglar en relativt enkel tillämpning på vanlig integralkalkyl. Det kan dock noteras att vi dessutom måste göra ett val mellan de två formlerna i (39). I många fall spelar det inte någon större roll vilken variant vi väljer. Men i andra fall kan den ena metoden ge betydligt längre räkningar än den andra, och i bland kan man t o m stöta på principiella svårigheter i det ena fallet som helt försvinner i det andra.

4.4.1. *Exempel 1.* Vi beräknar dubbelintegralen

$$\iint_\Delta xe^{xy}\, dxdy, \qquad \Delta = [0, 1] \times [-1, 2]. \tag{41}$$

Vilken av formlerna i (39) ska vi använda? Om vi integrerar funktionen xe^{xy} med avseende på x så får vi börja med en partialintegration, men om vi integrerar med avseende på y så får vi direkt den primitiva funktionen e^{xy}. Även om detta inte ger någon garanti för att det blir lättare med y-integrationen innerst så ger det i alla fall en antydan om att så är fallet. Vi får

$$\iint_\Delta xe^{xy}\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-1}^2 xe^{xy}\, dy \right) dx = \tag{42}$$

$$= \int_0^1 \left[e^{xy}\right]_{y=-1}^{y=2} \, dx = \int_0^1 \left(e^{2x} - e^{-x}\right) \, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} + e^{-x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 + e^{-1} - \frac{3}{2}.$$

Läsaren kan själv kontrollera att den andra formeln i (39) ger samma resultat men efter något längre räkningar.

4.4.2. *Exempel 2.* Som nästa exempel tar vi dubbelintegralen

$$\iint_\Delta e^{2x+y} \, dxdy, \qquad \Delta = [0,1] \times [0,2]. \tag{43}$$

I det här fallet är integranden en produkt av en funktion som bara beror på x och en funktion som bara beror på y: $e^{2x+y} = e^{2x} \cdot e^y$. Det visar sig då att dubbelintegralen själv faktoriserar sig som en produkt av två enkelintegraler:

$$\iint_\Delta e^{2x+y} \, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^1 e^{2x} \cdot e^y \, dx\right) \, dy = \tag{44}$$

$$= \int_0^2 e^y \left(\int_0^1 e^{2x} \, dx\right) \, dy = \int_0^1 e^{2x} \, dx \int_0^2 e^y \, dy. \tag{45}$$

I de båda sista leden har vi använt att konstanter i integrationen kan brytas ut ur integranden och sättas framför integralen: först har vi brutit ut faktorn e^y ur integralen med avseende på x och sedan har vi brutit ut hela integralen över x ur y-integralen. Sammantaget får vi alltså

$$\iint_\Delta e^{2x+y} \, dxdy = \int_0^1 e^{2x} \, dx \int_0^2 e^y \, dy = \tag{46}$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 \left[e^y\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)\left(e^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)^2$$

Eftersom dubbelintegraler där integranden kan faktoriseras som i exemplet ovan är mycket vanliga kan det vara lämpligt att sammanfatta resonemanget i (44) och (45) som en sats:

Sats 4. *Om $f(x,y) = g(x)h(y)$ och $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ så gäller att*

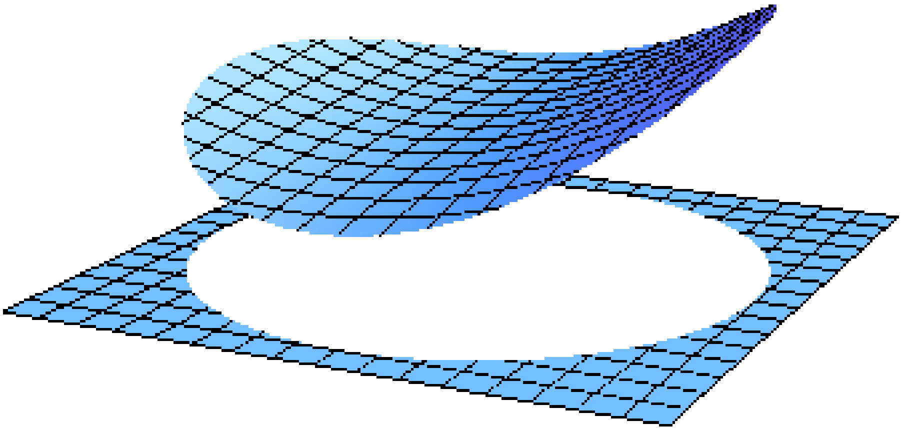
$$\iint_\Delta f(x,y) \, dxdy = \int_a^b g(x) \, dx \int_c^d h(y) \, dy. \tag{47}$$

4.5. **Dubbelintegraler över allmännare områden.** Hittills har vi endast definierat begreppet dubbelintegral då integrationsområdet utgörs av en rektangel i xy-planet med sidorna parallella med axlarna. Men ofta är man intresserad av att integrera funktioner över betydligt mer allmänna områden. Hur gör vi t ex om vi har en funktion $f(x,y)$ som är definierad i D och vill beräkna volymen av det område som definieras av

$$\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \le z \le f(x,y)\}, \tag{48}$$

där D är ett begränsat men inte nödvändigtvis rektangulärt område? Faktum är att det finns ett enkelt sätt att formellt reducera definitionen av dubbelintegral i detta fall till det fall som vi redan har behandlat: vi väljer en rektangel $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ så att $D \subset \Delta$ och definierar en utvidgning $f_D(x,y)$ av $f(x,y)$ genom att sätta $f_D(x,y) = f(x,y)$ då $(x,y) \in D$ och $f_D(x,y) = 0$ då $(x,y) \notin D$. Sedan definierar vi helt enkelt dubbelintegralen av $f(x,y)$ över D genom att sätta

$$\iint_D f(x,y) \, dxdy = \iint_\Delta f_D(x,y) \, dxdy. \tag{49}$$



FIGUR 6

I det fall då $f(x,y) \geq 0$ i D är det intuitivt uppenbart att volymen av Ω är precis lika med volymen av området

$$\Omega_\Delta = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Delta, 0 \leq z \leq f_D(x,y)\}. \tag{50}$$

Den del av rektangeln Δ som svarar mot punkter $(x,y) \notin D$ tillför ju ingen volym (se figur 6). Men även om denna definition är rimlig är den inte helt oproblematisk: funktionen $f_D(x,y)$ blir normalt diskontinuerlig längs randen till D, vilket gör att vi måste vara försiktiga även med definitionen av dubbelintegral över rektanglar. I själva verket är det ganska komplicerat och tekniskt att hitta tillräckliga villkor på $f(x,y)$ och D för att definitionen i (49) ska vara meningsfull, något som vi inte kommer att göra här (se PB2). Men det finns också ett annat problem: definitionen i (49) ger som den står ingen bra metod att beräkna dubbelintegraler. För att komma tillrätta med detta problem ska vi först titta på en speciell typ av områden.

Definition 4. *Vi säger att området $D \subset \mathbb{R}^2$ är av* **intervalltyp** *i y-led om det kan skrivas på formen*

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}, \tag{51}$$

där $a \leq b$ och $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är två kontinuerliga funktioner på intervallet $[a,b]$ sådana att $\alpha(x) \leq \beta(x)$.
På samma sätt säger vi att D är av **intervalltyp** *i x-led om det kan skrivas på formen*

$$D = \{(x,y) : c \leq y \leq d, \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\}, \tag{52}$$

där $c \leq d$ och $\phi(y)$ och $\psi(y)$ är två kontinuerliga funktioner på intervallet $[c,d]$ sådana att $\phi(y) \leq \psi(y)$.

Sats 5. *Om området D är av intervalltyp i y-led och funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig i D så gäller följande formel för dubbelintegralen av $f(x,y)$ över D:*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{53}$$

På motsvarande sätt gäller om D är av intervalltyp i x-led:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{54}$$

Argumentet är ganska enkelt när vi en gång definierat rätt typ av mängder. T ex inses den första formeln så här (om vi sätter $m = \min \alpha(x)$, $M = \max \beta(x)$ och $\Delta = [a, b] \times [m, M]$):

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_\Delta f_D(x, y)\, dxdy = \tag{55}$$

$$\int_a^b \left(\int_m^M f_D(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

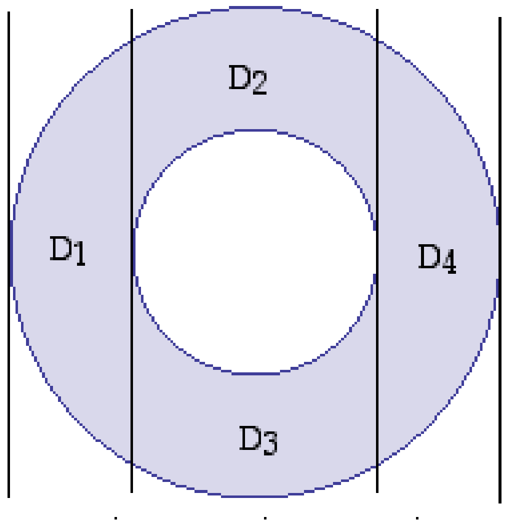
Här har vi använt att

$$\int_m^M f_D(x, y)\, dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy, \tag{56}$$

vilket följer av att $f_D(x, y) = 0$ då $m \leq y < \alpha(x)$ och $\beta(x) < y \leq M$, samt att $f_D(x, y) = f(x, y)$ då $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$.

Även om många av de områden som man stöter på i praktiken är av intervalltyp i x- eller y-led (eller i båda) så finns det naturligtvis också många områden som inte är det. Ett enkelt exempel utgörs av det ringformade området

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}, \tag{57}$$



Figur 7

Även om området inte är av intervalltyp visas i figur 7 hur man kan dela upp området i fyra delar som alla är av intervalltyp i y-led. Det är i praktiken mycket ovanligt att man råkar ut för områden som inte kan delas upp i ett ändligt antal delområden som alla är av intervalltyp.

4.5.1. *Exempel 1.* Betrakta dubbelintegralen

$$\iint_D xy\, dxdy, \tag{58}$$

där $D = \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ är den del av enhetscirkelskivan som ligger i första kvadranten.

I det här fallet kan vi välja vilken som helst av formlerna i Sats 5. Om vi skriver om definitionen av D som

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}, \tag{59}$$

ser vi genast att vi kan välja $a = 0$, $b = 1$, $\alpha(x) = 0$ och $\beta(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Vi får

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy \right) dx = \tag{60}$$

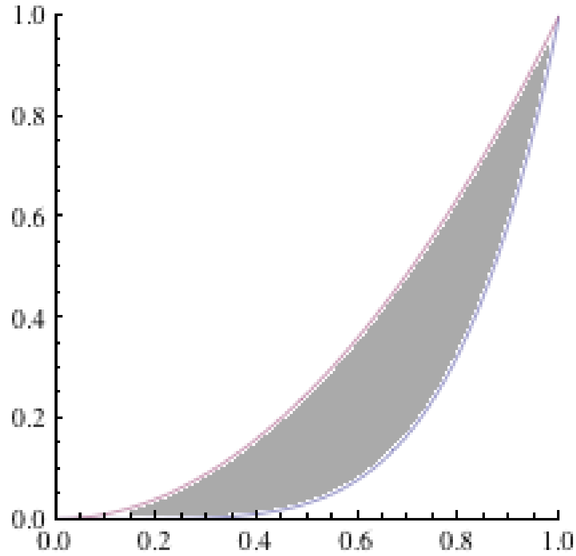
$$\int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x(1-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

4.5.2. *Exempel 2.* Ett annat exempel ges av

$$\iint_D x^2\,dxdy, \tag{61}$$

där D är det begränsade område i planet som definieras av kurvorna $y = x^2$ och $y = x^5$. Lite eftertanke visar att kurvorna skär varandra i punkterna $(0,0)$ och $(1,1)$, och att



Figur 8

området D kan skrivas som

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^5 \leq y \leq x^2\}. \tag{62}$$

Vi får

$$\iint_D x^2\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^5}^{x^2} x^2\,dy \right) dx = \tag{63}$$

$$\int_0^1 \left[x^2 y\right]_{y=x^5}^{y=x^2} dx = \int_0^1 (x^4 - x^7)\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{8}x^8\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}.$$

Observera att vi även i det här fallet kan välja den andra formeln i Sats 5. Området kan nämligen också skrivas

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, y^{1/2} \leq x \leq y^{1/5}\}. \tag{64}$$

Räkningarna blir i så fall kanske aningen otympligare.

4.6. **Övningar.**

(1) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x^2y\,dxdy$$

där D är kvadraten $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

(2) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x + xy)\,dxdy$$

där D är rektangeln $0 \le x \le 1, 1 \le y \le 4$.

(3) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D xy\,dxdy$$

där D är triangeln $0 \le x, 0 \le y, x + y \le 1$.

(4) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2}\,dxdy$$

där D är det område som definieras av olikheterna $1 \le y \le 2$ och $0 \le x \le y$.

(5) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{y/x}\,dxdy$$

där D är det begränsade område som definieras av olikheterna $x^2 \le y \le x^3 \le 8$.

(6) Beräkna den itererade enkelintegralen

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\,dx\right) dy.$$

5. Variabelbyte i dubbelintegraler

Även om metoderna i avsnitt 4 ger oss möjlighet att beräkna många relevanta dubbelintegraler så kan metoden att dela upp i grafiska områden vara mycket opraktisk i vissa fall. I så fall kan lösningen vara att byta variabler. Vi kommer här inte gå igenom hela den allmänna teorin. I stället betraktar vi några typiska fall och formulerar sedan den allmänna satsen utan bevis.

5.1. **Exempel polära koordinater.** Betrakta t ex dubbelintegralen

$$\iint_D \ln(x^2 + y^2)\,dxdy \qquad \text{där} \qquad D = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}. \tag{65}$$

I princip är det möjligt att dela upp området som i figur 7 och sedan skriva om integralen över vart och ett av delområdena som en itererad enkelintegral. Men både uppdelningen i sig och de integraler som därvid uppkommer blir mycket klumpiga. En förklaring till detta ligger i att det ursprungliga problemet är rotationssymmetriskt: både området och funktionen förblir oförändrade vid en vridning runt origo. Men uppdelningen i områden av intervalltyp förstör just denna rotationssymmetri och det är detta som ger upphov till svårigheterna. En bättre metod är då att i stället försöka utnyttja rotationssymmetrin till något positivt. I själva verket kan dubbelintegralen i (65) beräknas med hjälp av cylinderskalsformeln (Sats 3). Den svarar ju mot volymen av det område som uppstår då

$$\{(x, z) : 0 \le z \le \ln x^2, 1 \le x \le 2\} \tag{66}$$

får rotera runt z-axeln. Resultatet blir

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy = 2\pi \int_1^2 x \ln x^2\,dx = 4\pi \int_1^2 x \ln x\,dx = \tag{67}$$

$$4\pi \left(\left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx \right) = 4\pi \left(2\ln 2 - \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_1^2 \right) = 8\pi \ln 2 - 3\pi. \tag{68}$$

Samma teknik fungerar naturligtvis för vilket ringformat område som helst om integranden enbart är en funktion av avståndet till origo. Vi kan sammanfatta detta som

Sats 6. *Låt $f(x,y)$ vara en funktion som enbart beror av avståndet till origo, dvs $f(x,y) = g(r)$ där $r = \sqrt{x^2+y^2}$, och låt D vara ett ringformigt område på formen $D = \{(x,y) : a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2\}$. Då gäller att*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = 2\pi \int_a^b g(r)r\,dr.$$

Även om denna formel är mycket användbar så täcker den långt ifrån allt som vi behöver. Vad hade vi gjort om vi i stället för integralen i (65) ovan hade behövt beräkna följande integral?

$$\iint_D x^2y^2\,dxdy \qquad \text{där} \qquad D = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}. \tag{69}$$

Här är området fortfarande lika opraktiskt att dela upp i bitar av intervalltyp, men det går inte heller att använda Sats 6, eftersom integranden inte bara beror av avståndet till origo. Vad vi behöver är en allmän metod för att gå över till polära koordinater:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{cases} \tag{70}$$

Vi vill med andra ord byta ut våra variabler x och y mot nya variabler r och θ, dvs vi vill göra ett variabelbyte i dubbelintegralen. Det visar sig att satsen ovan kan generaliseras på ett mycket behändigt sätt:

Sats 7. *Låt D vara ett ringformigt område på formen $D = \{(x,y) : a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2\}$ och låt $f(x,y)$ vara en godtycklig kontinuerlig funktion på D. Då gäller att*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta,$$

där E är rektangeln $[a,b] \times [0,2\pi]$ i $r\theta$-planet.

Anmärkning 5. *Observera att Sats 6 är ett specialfall av Sats 7. Om $f(x,y) = g(r)$ så kan vi separera integralen i två enkelintegraler som i Sats 4, där θ-delen direkt kan integreras till 2π.*

Med denna sats kan vi direkt beräkna integralen i (65) ovan:

$$\iint_D x^2y^2\,dxdy = \iint_E (r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2 r\,drd\theta = \tag{71}$$

$$= \int_1^2 r^5\,dr \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2(\sin\theta)^2\,d\theta = \left[\frac{1}{6}r^6\right]_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)\,d\theta = \tag{72}$$

$$= \frac{21}{2}\left[\frac{1}{8}(\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta)\right]_0^{2\pi} = \frac{21\pi}{8}. \tag{73}$$

(Vi har här först skrivit om $(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta$ med formeln för sinus för dubbla vinkeln och sedan använt formeln för sinus för halva vinkeln för att skriva om $\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$.)

Det finns många olika sätt att visa Sats 7 som bygger på mer eller mindre direkta sätt att uppskatta dubbelintegraler. Vi ska här skissera en metod som bygger på Sats 6 och som är den minst tekniska metoden, men som å andra sidan kräver ett visst mått av geometrisk insikt. För mer direkta (men betydligt länge) bevis, se t ex PB2.

Givet funktionen $f(x, y)$ i Sats 7 ovan, låt oss börja med att för varje vinkel θ införa den nya funktion $f_\theta(x, y)$ som fås genom att rotera den ursprungliga funktionens graf runt z-axeln vinkeln θ i positiv led. I den linjära algebran visas hur en rotation i planet ser ut, och det är inte svårt att se att $f_\theta(x, y)$ ges av formeln

$$f_\theta(x, y) = f((\cos\theta)x + (\sin\theta)y, -(\sin\theta)x + (\cos\theta)y). \tag{74}$$

Men vi kommer egentligen inte att behöva räkna med denna. Däremot är det viktigt att konstatera att

$$\iint_D f_\theta(x, y)\, dxdy = \iint_D f(x, y)\, dxdy \tag{75}$$

för alla θ: båda integralerna mäter ju samma volym, eftersom volymen inte ändras vid rotation runt z-axeln. Men då följer också enkelt att

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\iint_D f_\theta(x, y)\, dxdy\right) d\theta. \tag{76}$$

I själva verket är ju dubbelintegralen oberoende av θ så den kan brytas ut och sättas framför θ-integralen, varefter denna uppenbarligen blir 2π. Nästa steg är i viss mening både trivialt och tankeväckande. Påståendet är att vi kan kasta om integrationsordningen mellan dubbelintegralen och θ-integralen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\iint_D f_\theta(x, y)\, dxdy\right) d\theta = \iint_D \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\theta(x, y)\, d\theta\right) dxdy. \tag{77}$$

Varför kan vi göra det? Svaret är att skälet är precis detsamma som skälet till att de två itererade enkelintegralerna i (39) är lika: båda uttrycken beräknar volymen av samma område, fast i det här fallet måste man tänka sig att det handlar om fyrdimensionell volym.

Betrakta nu den inre integralen. Denna kommer att vara en funktion av x och y:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\theta(x, y)\, d\theta. \tag{78}$$

Men egentligen beror detta uttryck bara på avståndet till origo och kan därför skrivas som $g(r)$! För vilken punkt (x, y) vi än tar, så representerar ju $g(x, y)$ medelvärdet av f:s värden i alla punkter som ligger på samma avstånd från origo som (x, y). Tittar vi i stället på någon annan sådan punkt på samma avstånd från origo så blir g:s värde i denna medelvärdet av f:s värden i precis samma punkter. Detta medelvärde kan också uttryckas med polära koordinater. Vi får:

$$g(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\theta(x, y)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta. \tag{79}$$

Men när vi har kommit så här långt så kan vi nu tillämpa Sats 6 på uttrycket i (77):

$$\iint_D \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\theta(x, y)\, d\theta\right) dxdy = \iint_D g(r)\, dxdy = 2\pi\int_a^b g(r) r\, dr. \tag{80}$$

I sista steget sätter vi nu tillbaka uttrycket i (79) för $g(r)$ och får

$$= \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta\right) r\, dr, \tag{81}$$

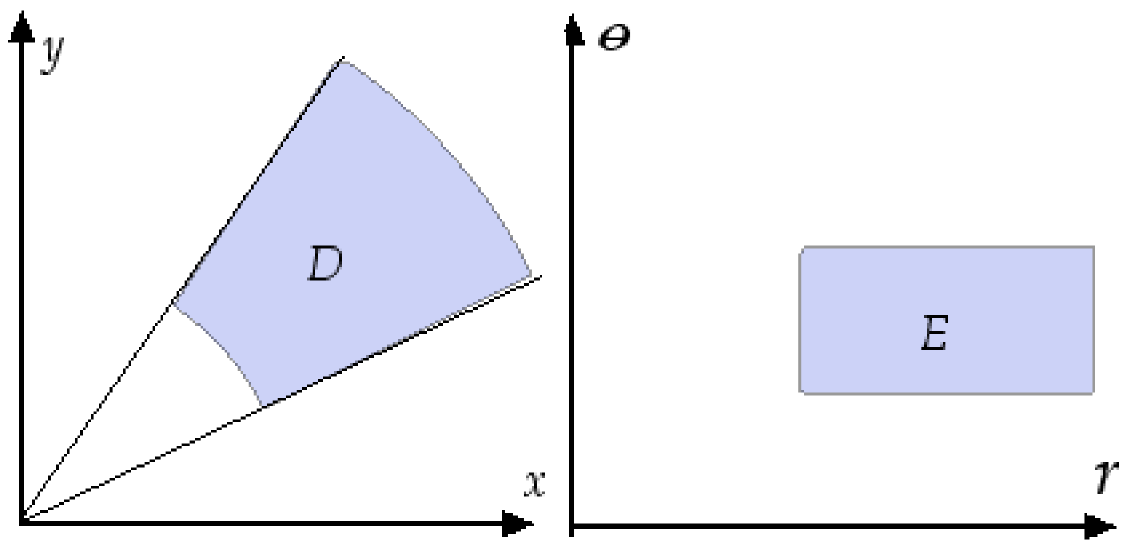
vilket enligt vår definition av dubbelintegral är lika med

$$= \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\, dr d\theta. \tag{82}$$

Faktum är att vi nu kan ge en ännu allmännare variant av Sats 7. Betrakta ett område D i xy-planet som begränsas av två strålar från origo som bildar vinklarna α och β mot den positiva x-axeln, och två cirkelbågar med radier a respektive b och centrum i origo. Vi kan skriva:

$$D = \{(x, y) : a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}. \tag{83}$$

Samma område svarar i polära koordinater mot en rektangel $E = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ i $r\theta$-planet (figur 9).



FIGUR 9

Sats 8. *För områden D och E som ovan och för en funktion $f(x, y)$ som är kontinuerlig i D gäller att*

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\, dr d\theta. \tag{84}$$

Detta följer lätt av föregående sats. Vi kan helt enkelt, som i definitionen av dubbelintegral över icke-rektangulära områden (49), definiera en utvidgning $f_D(x, y)$ av $f(x, y)$ genom att sätt $f_D(x, y) = f(x, y)$ då $(x, y) \in D$ och $f_D(x, y) = 0$ då $(x, y) \notin D$. Tillämpning av Sats 7 på $f_D(x, y)$ ger direkt Sats 8.

5.1.1. *Exempel 1.* 1. Vi återvänder nu till dubbelintegralen i (65), men ersätter området D med den delmängd D_1 av D som består av punkter där $y \ge |x|$. Detta svara mot att θ varierar mellan $\pi/4$ och $3\pi/4$. Vi får

$$\iint_{D_1} \ln(x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_{E_1} \ln(r^2)r\, dr d\theta = \iint_{E_1} 2r \ln r\, dr d\theta, \tag{85}$$

där $E_1 = [1, 2] \times [\pi/4, 3\pi/4]$. Med hjälp av Sats 4 kan vi faktorisera dubbelintegralen ovan till

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_1^2 2r \ln r\, dr = \frac{\pi}{2} \int_1^2 2r \ln r\, dr = \frac{\pi}{2} \left[r^2 \ln r\right]_1^2 - \frac{\pi}{2} \int_1^2 r^2 \cdot \frac{1}{r}\, dr = \tag{86}$$

$$2\pi \ln 2 - \frac{\pi}{2} \int_1^2 r\, dr = 2\pi \ln 2 - \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_1^2 = 2\pi \ln 2 - \frac{3}{4}\pi.$$

5.1.2. *Exempel 2.* 2. Betrakta nu i stället dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2}\,dxdy \tag{87}$$

där D är det område som bestäms av olikheterna $1 \le x^2 + y^2 \le 4, 0 \le y \le x\}$.

$$\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}\,dxdy = \int\limits_1^2 \int\limits_0^{\pi/4} r\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta dr = \int\limits_1^2 r\,dr \int\limits_0^{\pi/4} \tan^2\theta\,d\theta = \tag{88}$$

$$\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \int\limits_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{3}{2}\Big[(\tan\theta - \theta)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{3}{2}(1-\frac{\pi}{4}).$$

5.2. **En generaliserad integral.** Hittills har vi sett flera exempel på hur envariabelteori kan användas för att uppnå resultat om funktioner av två variabler. Men det kan faktiskt också hända att man kan använda teorin för funktioner av två variabler för att visa satser om envariabelfunktioner. I det här avsnittet ska vi visa hur man kan använda dubbelintegraler för att beräkna den generaliserade integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx. \tag{89}$$

Anmärkning 6. *Denna integral är mycket viktig i statistik i samband med den så kallade normalfördelningen, men även i fysik och Fourieranalys.*

För att beräkna I ska vi använda en övergång till polära koordinater som i avsnitt 5. I själva verket ska vi här betrakta generaliserade dubbelintegraler och förutsätta att det som vi tidigare sagt fungerar även för sådana. Det är inget stort problem att visa att så är fallet, men vi ska inte gå in på de tekniska detaljerna (se PB2).
I stället för att betrakta I direkt väljer vi att först beräkna I^2:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) \tag{90}$$

Här har vi bara ändrat namnet på integrationsvariabeln från x till y i den andra faktorn, vilket naturligtvis inte påverkar värdet av integralen.

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \tag{91}$$

Här har vi använt Sats 4 baklänges: planet $\mathbb{R}^2$ kan uppfattas som en rektangel med oändligt långa sidor. Men eftersom planet lika väl kan uppfattas som en cirkel med oändlig radie kan vi nu enligt Sats 7 skriva om integralen som

$$I^2 = \iint_E e^{-r^2} r\,drd\theta, \tag{92}$$

där $E = [0,\infty[\times[0,2\pi]$. Genom att använda Sats 4 igen får vi

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi. \tag{93}$$

Sammanfattningsvis har vi alltså visat att $I^2 = \pi$. Eftersom I uppenbarligen måste vara ett positivt tal så följer

Sats 9.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{94}$$

5.3. **Affina koordinatbyten.** Metoden att beräkna dubbelintegraler som itererade enkelintegraler fungerar mycket bra när integrationsområdet är en rektangel med sidor parallella med koordinataxlarna: vi behöver bara använda Definition 3.
Men hur gör vi om området i stället är en parallellogram med sidor som inte är parallella med axlarna? I princip kan det gå att dela upp området i delar av intervall-typ, men räkningarna blir lätt mycket otympliga. Då är det oftast bättre att byta koordinater.
Ett affint koordinatbyte från variablerna x, y till variablerna u, v kan skrivas

$$\begin{cases} x &= x_0 + \alpha u + \beta v \\ y &= y_0 + \gamma u + \delta v \end{cases} \qquad \text{där} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{95}$$

Samma samband kan även skrivas genom att man löser ut u och v:

$$\begin{cases} u &= u_0 + ax + by \\ v &= v_0 + cx + dy, \end{cases} \tag{96}$$

där sambandet mellan $x_0, y_0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ och u_0, v_0, a, b, c, d är lätt att beräkna i praktiken.
I den linjära algebran, där denna typ av koordinatbyten studeras mer i detalj, inför man även koordinatbytets determinant. Denna definieras i vårt fall som

$$J = \alpha\delta - \beta\gamma. \tag{97}$$

I den linjära algebran visar man också att absolutbeloppet av determinanten geometriskt kan tolkas som en "area-förstoringsfaktor": om vi betraktar ett område E i uv-planet med area $\text{area}(E)$ och sedan det område D i xy-planet som består att bildpunkterna till E under avbildningen i (95) , så gäller att

$$\text{area}(D) = |J| \cdot \text{area}(E). \tag{98}$$

Det är lätt att se att denna area-förstoringsfaktor/determinant har en avgörande betydelse när man byter variabler i dubbelintegraler. Om vi t ex betraktar den mycket enkla dubbelintegralen

$$I = \iint_D dxdy, \qquad \text{där} \qquad D = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}, \tag{99}$$

så är det lätt att se att $I = 4$. Men om vi inför de nya variablerna $x = 2u, y = 2v$ så kommer det område E i uv-planet som svarar mot D att vara $E = \{(u,v) : -\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2}\}$. En lika trivial räkning som i xy-koordinaterna ger att

$$I' = \iint_E dudv = 1. \tag{100}$$

Det som har hänt är att vi får värden på I och I' som skiljer sig just med determinanten till variabelbytet, som i det här fallet ges av $J = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4$, att jämföra med sambandet $I = 4 \cdot I'$.
Det visar sig att precis samma fenomen inträffar för ett allmänt affint koordinatbyte, även om vi utelämnar beviset. Följande sats är analog med Sats 7:

Sats 10. *Under mycket allmänna villkor på den kompakta mängden D i xy-planet (som vi inte specificerar här), gäller för en godtycklig kontinuerlig funktion $f(x,y)$ på D att*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(x_0 + \alpha u + \beta v, y_0 + \gamma u + \delta v)|J|\,dudv,$$

där E är den mängd i uv-planet som svarar mot mängden D i xy-planet under variabelbytet $x = x_0 + \alpha u + \beta v, y = y_0 + \gamma u + \delta v$, och där $J = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Det vanligaste fallet då man vill tillämpa satsen är då man vill överföra ett problem för en parallellogram i allmän position till en rektangel med sidor parallella med koordinataxlarna:

5.3.1. *Exempel 1.* Vi betraktar dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 - y^2)^8 \, dxdy \tag{101}$$

där $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$. I det här fallet visar lite eftertanke att området är en kvadrat i xy-planet med hörn i punkterna $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ och $(0, -1)$ som begränsas av de fyra linjerna $x + y = \pm 1$ och $x - y = \pm 1$. Det ligger nu nära till hands att införa de nya variablerna u, v enligt

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ y &= \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u &= x + y \\ v &= x - y, \end{cases} \tag{102}$$

eftersom begränsningslinjerna då övergår i $u = \pm 1$ och $v = \pm 1$, dvs i linjer parallella med koordinat-axlarna. Vi observerar att $J = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, så det är viktigt att komma ihåg absolutbeloppet. Sats 10 ger nu (om vi observerar att $x^2 - y^2 = uv$) att

$$\iint_D (x^2 - y^2)^8 \, dxdy = \left| -\frac{1}{2} \right| \iint_E (uv)^8 \, dudv = \tag{103}$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} u^8 \, du \int_{-1}^{1} v^8 \, dv = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9} u^9 \right]_{-1}^{1} \left[\frac{1}{9} v^9 \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{9^2} = \frac{2}{81}.$$

5.3.2. *Exempel 2.* I avsnitt 5.2 såg vi hur man kunde beräkna integralen

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} \, dxdy = \pi, \tag{104}$$

med hjälp polära koordinater. Men hur hade vi gjort om exponenten hade varit ett mer komplicerat andragradspolynom? Låt oss t ex betrakta integralen

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 + xy - y^2} \, dxdy. \tag{105}$$

I det här fallet hjälper det inte att direkt gå över till polära koordinater, därför att exponenten då kommer att innehålla trigonometrisla uttryck som det kan vara besvärligt att hantera. Lösningen består i stället i att först kvadratkomplettera och sedan göra ett affint koordinatbyte. Vi får $-x^2 + xy - y^2 = -(x - \frac{1}{2}y)^2 - \frac{3}{4}y^2$ och sätter sedan

$$\begin{cases} u &= x - \frac{1}{2}y \\ v &= \quad + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= u + \frac{1}{\sqrt{3}}v \\ y &= \quad + \frac{2}{\sqrt{3}}v \end{cases}, \tag{106}$$

vilket ger $J = 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Variabelsunstitutionsformeln ger nu

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 + xy - y^2} \, dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2 - v^2} \frac{2}{\sqrt{3}} \, dudv = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi, \tag{107}$$

där vi i sista steget har använt (104). Denna typ av integral är mycket viktig i t ex matematisk statistik.

5.4. **Den allmänna variabelsubstitutionsformeln*.** Vi har hittills undersökt två typer av variabelsubstitutioner, övergång till polära koordinater och affina koordinatbyten. I själva verket visar sig båda fallen vara specialfall av en allmän sats. För att formulera denna behöver vi först följande

Definition 5. *Låt funktionerna $x = x(u, v)$ och $y = y(u, v)$ definiera en avbildning från en delmängd E i uv-planet till xy-planet. Om dessa funktioner är partiellt deriverbara så definieras funktionaldeterminanten $J(u, v)$ till avbildningen som*

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

På samma sätt som determinanten till en linjär avbildning kan tolkas som en area-förstoringsfaktor, så kan man säga att funktionaldeterminanten representerar en lokal area-förstoringsfaktor som talar om hur mycket arean förändras i närheten av varje punkt. För icke-linjära avbildningar varierar denna faktor dock över området.

Sats 11. *Antag att funktionerna $x = x(u, v)$ och $y = y(u, v)$ definierar en bijektion från den kompakta mängden E i uv-planet till den kompakta mängden D i xy-planet. Under vissa kontinuitets- och deriverbarhetsantaganden på avbildningen gäller för varje kontinuerlig funktion $f(x, y)$ på D följade likhet:*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|\,dudv.$$

Om vi speciellt betraktar affina avbildningar så är det klart att funktionaldeterminanten blir detsamma som den vanliga determinanten. Därför blir Sats 10 ett specialfall av Sats 11. Men även övergång till polära koordinater är det specialfall av Sats 11. Om vi nämligen låter $u = r, v = \theta$ och som tidigare sätter $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, så följer nämligen att

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta \cdot r\cos\theta - \sin\theta(-r\sin\theta) = r, \qquad (108)$$

vilket visar att variabelsubstitutionsformeln i detta fall övergår i Sats 8.

5.5. **Integration med godtyckligt många variabler*.** Precis som för andra problemställningar i detta kompendium så kan man se fallet med dubbelintegraler som ett enkelt specialfall av motsvarande teori för godtyckligt många variabler. Integraler i 3, 4, 5 eller flera variabler kan, precis som vi har gjort i två variabler, införas med hjälp av itererade enkelintegraler. T ex gäller att trippelintegralen av den kontinuerliga trevariabelfunktionen $g(x, y, z)$ över rätblocket $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ kan definieras genom

$$\iiint_D g(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f g(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx, \qquad (109)$$

eller alternativt genom någon av de fem andra möjliga permutationerna av variablerna x, y, z. Generaliseringen till godtyckliga kompakta områden går till precis som i (49), och det går även att generalisera omskrivningarna som itererade enkelintegraler i Sats 5.
När antalet variabler $x_1, x_2, \ldots x_n$ blir stort så kan beteckningarna bli mycket otympliga. Då skriver man ofta bara ut ett integral-tecken och en integration-symbol:

$$\int_D g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \iint \cdots \int_D g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \qquad (110)$$

Även variabelsubstitutionsformeln i Sats 11 ovan kan på ett naturligt sätt generaliseras till ett godtyckligt antal variabler. I själva verket kan vi med den kompakta notationen ovan skriva formeln på ett sätt som formellt blir likadant för såväl enkelintegraler och dubbelintegraler som för integraler av ett godtyckligt antal variabler! Med en notation som är analog med den i Sats 11 och med en bijektiv avbildning $\Phi : E \to D$ får vi:

$$\int_D g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_E g(\Phi(\mathbf{u}))|J_\Phi(\mathbf{u})|\,d\mathbf{u}. \qquad (111)$$

Sett ur det här perspektivet så är skillnaden mellan enkelintegraler och integraler av många variabler inte så stor. Men det ska kanske betonas att skillnaden kan bli högst påtaglig när det kommer till konkreta beräkningar. T ex kräver beräkningen av J_Φ kunskap om $n \times n$-determinanter.
Det ska också betonas att den mycket kortfattade beskrivningen här inte ska ses som något som man behöver behärska på den här nivån, utan snarare avser att ge en föraning om vad som kommer i senare kurser.

5.6. **Övningar.**

(1) Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D x^2y^2\,dxdy$$
där $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$.

(2) Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D x^2\ln(x^2+y^2)\,dxdy$$
där $D = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$.

(3) Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D \frac{x}{x^2+2y^2}\,dxdy$$
där D är det område som definieras av olikheterna $1 \le x^2+y^2 \le 4$ och $0 \le x \le y$.

(4) Beräkna den generaliserade dubbelintegralen
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy.$$

(5) Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D e^{x+y}\,dxdy$$
där $D = \{(x,y) : |x|+|y| \le 2\}$.

(6) Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$$
där D är den parallellogram som har hörn i punkterna $(0,0), (2,1), (1,2)$ och $(3,3)$.

(7) Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D e^{-x^2-y^2-x-y}\,dxdy$$
där D är hela planet $\mathbb{R}^2$.

(8) Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D e^{-2x^2-4xy-4y^2}\,dxdy$$
där D är den första kvadranten.

6. Tangentapproximation

Låt oss börja med att påminna om situationen i en variabel:

6.1. **Tangentapproximation i en variabel.** Något förenklat kan man säga att själva grundidén med differentialkalkyl är att approximera en funktion med dess tangent, som i viss mening är en linjär funktion. Genom denna approximation övergår i princip analysen av komplicerade grafer till en sorts linjär algebra, åtminstone om vi begränsar oss till förstaderivator och om vi betraktar problemen i tillräckligt små omgivningar.
Approximationen av den deriverbara funktionen $y = f(x)$ i en omgivning av punkten x_0 kan skrivas
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), \tag{112}$$

eller alternativt

$$y \approx y_0 + \frac{dy}{dx}(x - x_0), \tag{113}$$

där vi på vanligt sätt skrivit $y_0 = f(x_0)$ och $\frac{dy}{dx} = f'(x_0)$. Om vi försummar det lilla felet i (113) och sätter $\Delta y = y - y_0$, $\Delta x = x - x_0$ kan detta skrivas

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x. \tag{114}$$

Denna approximation kallas tangentapproximation eller differentialapproximation. Observera att möjligheten att approximera en envariabelfunktion med dess tangent inte bara är en följd av deriverbarheten utan faktiskt är ekvivalent med den.

6.2. **Tangentplansapproximation i två variabler.** Det ligger nu nära tillhands att fortsätta analogin med envariabelteorin och betrakta approximationer av tvåvariabelfunktioners grafer med tangentplan på samma sätt som vi i föregående sektion approximerat envariabelfunktioners grafer med linjer. Det visar sig dock att det finns vissa komplikationer med detta. T ex kan en funktion mycket väl ha väldefinierade partiella derivator i en punkt utan att dess graf för den skull kan approximeras med ett tangentplan.
Att reda ut villkoren för existensen av tangentplan ligger utanför ramen för denna framställning. För en sådan utredning hänvisas i stället till t ex PB2. I fortsättningen ska vi i stället helt enkelt anta att alla grafer som vi vill studera har tangentplan i alla punkter av intresse. Anledningen till att det är rimligt att göra detta antagande är att praktiskt taget alla funktioner som dyker upp i tillämpningarna har denna egenskap, och att man också kan visa generella och användbara kriterier för detta.
Så den fråga som vi nu ställer oss blir därför: om vi antar att grafen till funktionen $z = f(x, y)$ har ett tangentplan i en given punkt (x_0, y_0), hur ser då detta ut? Som tidigare kan vi angripa problemet genom att undersöka en variabel i taget. I planet $y = y_0$ kan vi betrakta z som funktion av bara x: $z = f(x, y_0)$. Tangenten till denna blir

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0), \tag{115}$$

som alltså ska uppfattas som en linje i planet $y = y_0$. På samma sätt kan vi också hålla x fixt och då erhålla en tangentlinje i planet $x = x_0$:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{116}$$

Ett rimligt villkor på tangentplanet till funktionen är att det ska innehålla dessa båda linjer. Två icke-parallella linjer genom en punkt bestämmer ett entydigt plan som i det här fallet uppenbarligen blir

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{117}$$

(Genom att begränsa oss till planet $y = y_0$ eller $x = x_0$ får vi ju just tillbaka linjerna i (115) och (116).) Precis som i (113) ovan kan vi sätta $z_0 = f(x_0, y_0)$, $\Delta z = z - z_0$, $\Delta x = x - x_0$ och $\Delta y = y - y_0$ samt skriva $\frac{\partial z}{\partial x}$ och $\frac{\partial z}{\partial y}$ för $f'_x(x_0, y_0)$ respektive $f'_y(x_0, y_0)$. Sedan kan (117) skrivas på den alternativa formen

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{118}$$

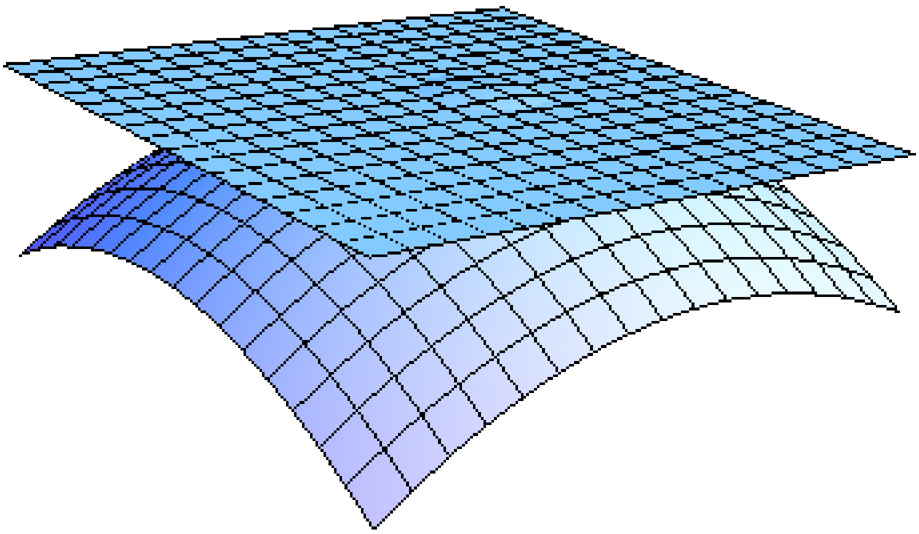
6.2.1. *Exempel på tangentplan till en graf.* Betrakta funktionen $f(x, y) = xy^2$. Vi bestämmer tangentplanet i punkten $(1, 1, 1)$. Observera först att $f'_x(x, y) = y^2$ och $f'_y(x, y) = 2xy$. I punkten $(1, 1)$ får vi därför $f(1, 1) = 1$, $f'_x(1, 1) = 1$ och $f'_y(1, 1) = 2$. Enligt (117) blir därför tangentplanets ekvation

$$z = 1 + 1 \cdot (x - 1) + 2(y - 1) \qquad \Leftrightarrow \qquad z = x + 2y - 2. \tag{119}$$

Som ett annat exempel bestämmer vi tangentplanet till funktionen $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ i punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{11}{16})$. I det här fallet blir $f'_x(x, y) = -2x$ och $f_y(x, y) = -2y$, vilket ger att $f'_x(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -1$ och $f'_y(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$. Insättning i (117) ger

$$z = \frac{11}{16} - 1 \cdot (x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(y - \frac{1}{4}) \qquad \Leftrightarrow \qquad z = -x - \frac{1}{2}y + \frac{21}{16}. \tag{120}$$

I figur 10 visas funktionen tillsammans med dess tangentplan.



FIGUR 10

6.3. **Övningar.**

(1) Bestäm tangentplanet till ytan

$$z = f(x, y) = x\sqrt{x + 3y}$$

i punkten $(1, 1, 2)$.

(2) Antag att tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(0, 0, 2)$ ges av $z = Ax + By + 2$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = 1/f(x, y)$ i punkten $(0, 0, \frac{1}{2})$.

7. Differentialkalkyl och differentialekvationer

Partiella derivator kan användas till mycket annat än till bestämning av största och minsta värde. T ex spelar differentialekvationer som innehåller partiella derivator, så kallade partiella differentialekvationer, en stor roll i många tillämpningar. Därför har det varit en viktig uppgift för matematiken av utveckla systematiska metoder för att hantera sådana problem.

I en variabel finns en uppsättning räkneregler för derivator som bör vara välbekant vid det här laget: additionsregeln, produktregeln (Leibniz regel), kvotregeln, kedjeregeln, regeln för derivatan av en invers. Men hur ser motsvarande räkneregler ut i två variabler?

När det gäller de tre första reglerna är det hela ganska problemfritt. Att derivera partiellt innebär ju egentligen bara att vi ger den ena variabeln ett fixt värde och sedan räknar med det som blir kvar som med en vanlig envariabelfunktion. Följaktligen kan vi direkt tillämpa våra envariabelregler utan problem. T ex får vi på detta sätt en uppenbar produktregeln för derivation med avseende på x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x, y)g(x, y)\right) = f(x, y)\frac{\partial}{\partial x}\, g(x, y) + g(x, y)\frac{\partial}{\partial x}\, f(x, y). \tag{121}$$

Men när vi kommer till de två sista räknereglerna så upptäcker vi att det inte alls är lika uppenbart hur dessa ska översättas till flervariabelteorin. Hur ska vi t ex derivera följande enkla sammansatta funktion?

$$z = f(x(t), y(t)). \tag{122}$$

Även om z faktiskt är en funktion av en enda variabel t, så beror den hastighet med vilken z förändrar sig då t ändras både på hur snabbt $f(x, y)$ ändrar sig i x-led och i y-led.

7.1. **Kedjeregeln i två variabler.** Nyckeln till att förstå hur derivatan av (122) ska se ut ligger i formel (118). Denna talar ju precis om hur förändringen i z beror av förändringarna i x och y. Dessutom är den ju också en linjär approximation vilket medför att problemet reduceras till en sorts linjär algebra: funktionen beskrivs lokalt som ett plan och de partiella derivatorna identifieras med planets lutning i x- respektive y-led.
Om vi återgår till funktionen i (122) ovan så vet vi från (118) att

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y, \tag{123}$$

Å andra sidan följer det från (114) att

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t \qquad \text{och} \qquad \Delta y = \frac{dy}{dt}\Delta t. \tag{124}$$

Substituerar vi nu dessa uttryck för Δx och Δy i (123) får vi

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\Delta t = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\Delta t. \tag{125}$$

Men proportionalitetskonstanten mellan Δz och Δt är ju enligt (114) ingenting annat än derivatan av z med avseende på t vilket motiverar följande

Sats 12 (Kedjeregeln i två variabler)**.**

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{126}$$

Anmärkning 7. *Ovanstående argument är i princip helt korrekt, men det bör påpekas att det är viktigt att funktionen $f(x, y)$ verkligen kan approximeras med ett tangentplan i en precis mening. I senare kurser visas bl a att ett tillräckligt villkor både för att funktionen ska ha ett tangentplan och att kedjeregeln ska gälla är att funktionens partiella derivator är kontinuerliga (se PB2). Det bör också hållas i minnet att ett strikt bevis kräver att vi verkligen kontrollerar att felet i approximationerna är så litet att det inte påverkar resultatet.*

I många tillämpningar, speciellt i fysik, använder man ofta följande begrepp:

Definition 6. Gradienten ∇f *till funktionen $f(x, y)$ i punkten (x_0, y_0) definieras som vektorn*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

Om vi dessutom definierar tangentvektorn $T(t)$ till kurvan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ som derivatan

$$T(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t)), \tag{127}$$

så kan kedjeregeln uttryckas med hjälp av skalärprodukt som

$$\frac{d}{dt}\left(f(\mathbf{r}(t))\right) = T \cdot \nabla f. \tag{128}$$

På liknande sätt som i (122) kan vi betrakta en sammansatt funktion av typen

$$z = f(x(s, t), y(s, t)), \tag{129}$$

och försöka beräkna de partiella derivatorna av z med avseende på s och t. I det här fallet ersätter vi då (124) med

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial x}{\partial t}\Delta t \qquad \text{och} \qquad \Delta y = \frac{\partial y}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial y}{\partial t}\Delta t. \tag{130}$$

Insatt i (123) får vi

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial x}{\partial t}\Delta t\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial y}{\partial t}\Delta t\right) = \tag{131}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\Delta s + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Delta t.$$

Det vi har här är tangentapproximationen av z som funktion av s och t, dvs vi har uttryckt Δz som en linjär funktion av Δs och Δt. Jämförelse med den vanliga formen

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial z}{\partial t}\Delta t, \tag{132}$$

ger att

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \tag{133}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{134}$$

7.2. **Derivation av en invers avbildning*.** En vanlig funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$ har ingen invers. Den kan inte vara bijektiv: i själva verket finns till varje funktionsvärde normalt en hel kurva av argument. Däremot kan man tala om inversen till en avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$. Sådana avbildningar är vanligt förekommande. Vi har t ex redan stött på polära koordinater i (70). Dessa formler kan ju uppfattas som att vi till varje punkt i $r\theta$-planet ordnar en punkt i xy-planet. Vi kan också lätt beräkna de partiella derivatorna av x och y med avseende på r och θ:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta. \tag{135}$$

Men hur ska vi göra om vi i stället vill beräkna derivatorna av r och θ med avseende på x och y? I det här fallet kan vi faktiskt i viss mening lösa ut r och θ som funktioner av x och y och derivera dessa, men så är inte alltid fallet. Då är det ofta bättre att gå till tangentapproximationerna som i det här fallet kan skrivas

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\Delta\theta = \cos\theta\Delta r - r\sin\theta\Delta\theta, \tag{136}$$

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\Delta\theta = \sin\theta\Delta r + r\cos\theta\Delta\theta. \tag{137}$$

Sen är det bara att lösa dessa linjära ekvationer för Δr och $\Delta\theta$. En kort räkning ger

$$\Delta r = \cos\theta\Delta x + \sin\theta\Delta y. \tag{138}$$

$$\Delta\theta = -\frac{\sin\theta}{r}\Delta x + \frac{\cos\theta}{r}\Delta y. \tag{139}$$

Om vi jämför med de vanliga tangentapproximationerna

$$\Delta r = \frac{\partial r}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial r}{\partial y}\Delta y. \tag{140}$$

$$\Delta\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \theta}{\partial y}\Delta y, \tag{141}$$

så kan vi nu direkt läsa av att

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta,\quad \frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta,\quad \frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}. \tag{142}$$

Anmärkning 8. *Vi vet från envariabelteorin att om y är en inverterbar funktion av x så gäller att*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \tag{143}$$

Men observera att motsvarande inte alls behöver gälla i två variabler. Om vi jämför (135) med (142) ser vi direkt att t ex

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}\neq\frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial x}}. \tag{144}$$

eftersom vänsterledet är lika med $-r\sin\theta$ medan högerledet är lika med $-r(\sin\theta)^{-1}$. Det som däremot faktiskt är sant är (uttryckt i matrisspråk) att

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{145}$$

men vi ska inte gå djupare in på detta här.

7.3. **Partiella differentialekvationer*.** En vanlig differentialekvation är ett samband mellan en envariabelfunktion och dess derivator. Sådana differentialekvationer kallas ofta ordinära. Men man kan också betrakta partiella differentialekvation som utgör samband mellan en flervariabelfunktion och dess partiella derivator. Sådana partiella differentialekvationer är lika vanligt förekommande i tillämpningarna som ordinära, och litteraturen om dem är mycket omfattande.

I detta avsnitt ska vi titta på exempel på mycket enkla partiella differentialekvationer och visa hur de kan lösas med hjälp av den differentialkalkyl som vi har utvecklat.

7.3.1. *Exempel 1.* Betrakta ekvationen

$$3\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{146}$$

Hur ska vi gå till väga för att finna en funktion som uppfyller detta villkor? Problemet är att vi måste arbeta med båda variablerna samtidigt. Det hjälper inte att integrera med avseende på t ex x, eftersom den andra termen inte förenklas av detta. Ett bättre sätt är att försöka byta till lämpliga nya variabler. I det här fallet försöker vi med

$$\begin{cases} u &= x \;-3y, \\ v &= \quad\;\; y. \end{cases} \tag{147}$$

Med hjälp av kedjeregeln får vi

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}, \tag{148}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-3\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v},$$

där vi använt att

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-3,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=1. \tag{149}$$

Insatt i vänsterledet i (146) ger detta att

$$3\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=3\frac{\partial f}{\partial u}+\left(-3\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial f}{\partial v}, \tag{150}$$

vilket betyder att ekvationen reducerar sig till

$$\frac{\partial f}{\partial v}=0. \tag{151}$$

Tack vare variabelbytet har vi nu kommit fram till en ekvation som bara innehåller en sorts derivata, och som därför är mycket lättare att lösa. Det (151) säger är ju faktiskt att f, som funktion av v är konstant. Med andra ord kan f bara bero av u, dvs

$$f=g(u), \tag{152}$$

där $g(u)$ är en envariabelfunktion. Uttryckt i de ursprungliga x- och y-variablerna betyder detta att

$$f(x,y)=g(x-3y), \tag{153}$$

vilket är den allmänna lösningen till (146).
Vi noterar att den allmänna lösningen till ekvationen ovan inte bara innehåller en godtycklig konstant som är det vanliga för en första ordningens ordinär differentialekvation, utan faktiskt en godtycklig (deriverbar) envariabelfunktion. Det finns i den meningen normalt mycket fler lösningar till partiella differentialekvationer än till ordinära. Om vi vill att lösningen ska vara entydigt bestämd (vilket är det normala i tillämpade problem) så måste vi därför lägga in ytterligare villkor. Ett vanligt sätt att göra detta på är att kräva att funktionen ska anta givna värden längs någon viss kurva.

7.3.2. *Exempel 2.* Lös differentialekvationen

$$2\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=ye^x \qquad \text{med bivillkoret} \qquad f(x,0)=e^x. \tag{154}$$

I det här fallet är det inte givet något lämpligt koordinatbyte som överför ekvationen till en mer hanterlig form. Vi försöker med ett linjärt koordinatbyte av samma typ som i exemplet ovan:

$$\begin{cases} u &= x + ay, \\ v &= y. \end{cases} \tag{155}$$

Vi får

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}, \tag{156}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=a\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}, \tag{157}$$

vilket insatt i vänsterledet ger

$$2\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial f}{\partial u}-\left(a\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)=(2-a)\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial v}. \tag{158}$$

Vi ser att om vi väljer $a=2$ så kommer den första termen att försvinna. Det inversa koordinatbytet blir då

$$\begin{cases} x &= u - 2v, \\ y &= v, \end{cases} \tag{159}$$

vilket medför att vi även kan transformera högerledet. Vi får

$$\frac{\partial f}{\partial v}=-ve^{u-2v}. \tag{160}$$

För fixt u kan vi nu integrera båda sidor med avseende på v:

$$f = -\int ve^{u-2v}\,dv = -e^u \int ve^{-2v}\,dv = e^u \left(\frac{1}{2}ve^{-2v} - \frac{1}{2}\int e^{-2v}\right) = \tag{161}$$

$$= e^u \left(\frac{1}{2}ve^{-2v} + \frac{1}{4}e^{-2v} + C\right) = \frac{1}{2}ve^{u-2v} + \frac{1}{4}e^{u-2v} + Ce^u.$$

Lägg märke till integrationskonstanten C. Denna är mycket riktigt en konstant med avseende på v. Men eftersom vi utfört integrationen för ett fixt u så finns det ingenting som säger att vi inte kan få olika värden på C för olika värden på u! Slutsatsen blir att C i själva verket kan vara en godtycklig funktion av u. Därmed bli även hela termen $C(u)e^u$ en godtycklig funktion av u som vi i analogi med föregående exempel betecknar med $g(u)$. Om vi nu återgår till de ursprungliga variablerna x och y så får vi följande allmänna lösning till ekvationen.

$$f(x, y) = \frac{1}{2}ye^x + \frac{1}{4}e^x + g(x - 2y). \tag{162}$$

Det återstår nu att anpassa denna lösning till bivillkoret $f(x, 0) = e^x$. Om vi sätter $y = 0$ i (162) och sätter in i bivillkoret får vi

$$e^x = f(x, 0) = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot e^x + \frac{1}{4}e^x + g(x), \tag{163}$$

vilket ger

$$g(x) = \frac{3}{4}e^x. \tag{164}$$

När vi nu bestämt $g(x)$ får vi den specifika lösningen genom att sätta in detta uttryck i (162):

$$f(x, y) = \frac{1}{2}ye^x + \frac{1}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{(x-2y)}. \tag{165}$$

Metoden att transformera den partiella differentialekvationen med ett linjärt koordinatbyte till en ekvation som bara innehåller en av de partiella derivatorna fungerar alltid för ekvationer av typen

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = h(x, y), \qquad a, b \quad \text{konstanter}. \tag{166}$$

Men i princip kan man även angripa betydligt allmännare första ordningens partiella differentialekvationer på samma sätt. Haken är bara att man i så fall måste hitta rätt (icke-linjära) koordinatbyte, och det kan visa sig vara ungefär lika svårt som att lösa den ursprungliga ekvationen!

Det finns utvecklade matematiska metoder för att lösa detta problem, men de ligger långt utanför ramen för denna framställning. Och i avsaknad av sådana ska man inte överskatta användbarheten hos metoden med variabelbyte. Dock finns det en hel del exempel på ekvationer där man av olika skäl kan gissa sig till att problemet blir enklare i nya koordinater. Det viktigaste sådana exemplet utgörs av problem som man kan förvänta sig har någon form av rotationssymmetri. Vi avslutar med ett sådant exempel där en övergång till polära koordinater löser problemet.

7.3.3. *Exempel 3.* Lös differentialekvationen

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \text{med bivillkoret} \qquad f(x, 0) = e^{-x^2}. \tag{167}$$

Vänsterledet innehåller här en differentialoperator som fysikaliskt är nära relaterad till rotation. Vi uttrycker den i polära koordinater med hjälp av formlerna i (142):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \tag{168}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \tag{169}$$

Om vi stoppar in dessa uttryck i vänsterledet och dessutom kommer ihåg att $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ så får vi

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = (r\sin\theta)\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) - (r\cos\theta)\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \tag{170}$$

$$= \frac{-r\sin^2\theta - r\cos^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Differentialekvationen övergår därför helt enkelt i

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0. \tag{171}$$

I likhet med Exempel 1 kan vi dra slutsatsen att funktionen f i själva verket är oberoende av θ och därför endast beror av r, dvs

$$f(x, y) = h(\sqrt{x^2 + y^2}) \tag{172}$$

för någon deriverbar envariabelfunktion $h(t)$.
Om vi nu stoppar in denna lösning i bivillkoret så får vi

$$e^{-x^2} = f(x, 0) = h(|x|), \tag{173}$$

vilket har den uppenbara lösningen $h(t) = e^{-t^2}$. Insatt i (172) får vi därför slutligen

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}. \tag{174}$$

Ovanstående variabelbyte är inte alls det enda som kan användas för att lösa denna differentialekvation. Läsaren kan som övning lösa samma problem med hjälp av variablerna $u = x^2 + y^2$ och $v = y$ i stället (vilket ger något kortare räkningar).

7.4. **Övningar.**

(1) Funktionen $f(x, y)$ har i origo gradienten $\nabla f(0, 0) = (2, -3)$. Beräkna derivatan av funktionen $g(t) = f(\sin t, 2t)$ för $t = 0$.

(2) Om funktionen $f(x, y)$ vet vi att $f(t, t) = 2t + 3t^2$ och att $f(t, -t) = -t + t^3$. Bestäm de partiella derivatorna till f i origo.

(3) Vi betraktar en sammansatt funktion $k(s, t) = f(g(s, t), h(s, t))$. Använd nedanstående tabell för att beräkna $\frac{\partial k}{\partial s}$ och $\frac{\partial k}{\partial t}$ i punkten $(1, 1)$.

	f	$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\frac{\partial f}{\partial y}$	g	$\frac{\partial g}{\partial s}$	$\frac{\partial g}{\partial t}$	h	$\frac{\partial h}{\partial s}$	$\frac{\partial h}{\partial t}$
$(1, 1)$	4	2	-1	2	3	5	1	-3	7
$(1, 2)$	3	-2	3	-5	1	0	7	-8	2
$(2, 1)$	-2	5	-7	3	-3	4	-1	5	-1
$(2, 2)$	5	3	-4	9	-6	2	4	-2	6

(4) Bestäm den allmänna lösningen till den partiella differentialekvationen

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

(5) Lös den partiella differentialekvationen

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = x \sin y \qquad \text{med bivillkoret} f(x,0) = \sin x.$$

(6) Lös den partiella differentialekvationen

$$2y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \qquad f(x,0) = e^x,$$

t ex genom att införa de nya variablerna $u = x - y^2$ och $v = y$.

(7) Transformera den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + f = 0$$

till polära koordinater i området $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Bestäm sedan den lösning som är konstant lika med 1 på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

Avsnitt 3:

(1) Minsta värde är $-2 - 2\ln 2$. Största värde är $\frac{1}{8} + 2\ln 2$.
(2) Minsta värde är -1. Största värde är 4.
(3) Minsta värde är $\frac{1}{8} - 3\ln(5/2)$. Största värde är $\frac{1}{8} - 3\ln(3/2)$.
(4) Minsta värde är $1/2 - 2\ln 2$. Största värde är $4 - 2\ln 3$.
(5) Minsta värde är $\ln 8 - 4$. Största värde är $\ln 4 - \frac{1}{2}$.
(6) Minsta värde är 0. Största värde är $3\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Avsnitt 4:

(1) $1/6$.
(2) $21/4$.
(3) $1/24$.
(4) $\frac{1}{2}\ln 2$.
(5) $\frac{1}{2}e^4 - e^2 - \frac{1}{2}e$.
(6) $\frac{1}{2}(e-1)$.

Avsnitt 5:

(1) $\pi/24$.
(2) $8\pi\ln 2 - 15\pi/8$.
(3) $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(4) π.
(5) $2(e^2 - e^{-2})$.
(6) 16.
(7) $\sqrt{e}\pi$.
(8) $\pi/16$.

Avsnitt 6:

(1) $z = \frac{9}{4}x + \frac{3}{4}y - 1$.
(2) $z = -\frac{A}{4}x - \frac{B}{4}y + \frac{1}{2}$.

Avsnitt 7:

(1) $g'(0) = -4$.
(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{3}{2}$.
(3) $\frac{\partial k}{\partial s}(1,1) = 36, \qquad \frac{\partial k}{\partial t}(1,1) = -24$.
(4) $f(x,y) = g(3x - 2y)$. (Även t ex $g(x - \frac{2}{3}y)$ går bra.)
(5) $f(x,y) = x - 2y - x\cos y + 2\sin y + \sin(x - 2y)$.
(6) $f(x,y) = y^2 + e^{x-y^2}$.
(7) $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$.

Innehåll