Räkneövning 15-05-04

Enklare: Rotation $\operatorname{rot} \overline{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \left(5xz, -5yz, 10(x^4 - y^4)\right) \neq (0,0,0)$

$\Rightarrow \exists \gamma$ sluten: $\int_\gamma \overline{F} \cdot d\overline{r} = \iint_Y \operatorname{rot} \overline{F} \cdot N \, dS \neq 0$

(47) $\displaystyle\int_\gamma 2y^5 dx + 2x^5 dy + 5xyz\, dz$

-) visa att kurvintegralen inte är oberoende av vägen
hitta en enkel sluten kurva γ så att $\int_\gamma \dots \neq 0$

-) enhetscirkel i xy-planet fungerar inte eftersom i så fall

$$\int_\gamma 2y^5 dx + 2x^5 dy + 5xyz\, dz \underset{z=0}{=} \int_\gamma 2y^5 dx + 2x^5 dy =$$

$$\underset{\substack{\partial D = \gamma \\ D = \{x^2+y^2 \leq 1\}}}{\overset{\text{Green}}{=}} \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(2x^5) - \frac{\partial}{\partial y}(2y^5)\, dx dy = 0$$

-) enhetscirkel i yz-parallellt plan $x=1$: bättre:

$$\int_\gamma 2y^5 dx + 2x^5 dy + 5xyz\, dz \underset{\substack{dx=0 \\ x=1}}{=} \int_\gamma 2dy + 5yz\, dz =$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \iint_D \frac{\partial}{\partial y}(5yz) - \frac{\partial}{\partial z}(2)\, dy dz = \iint_D 5z\, dy dz = 0$$

pga symmetrier

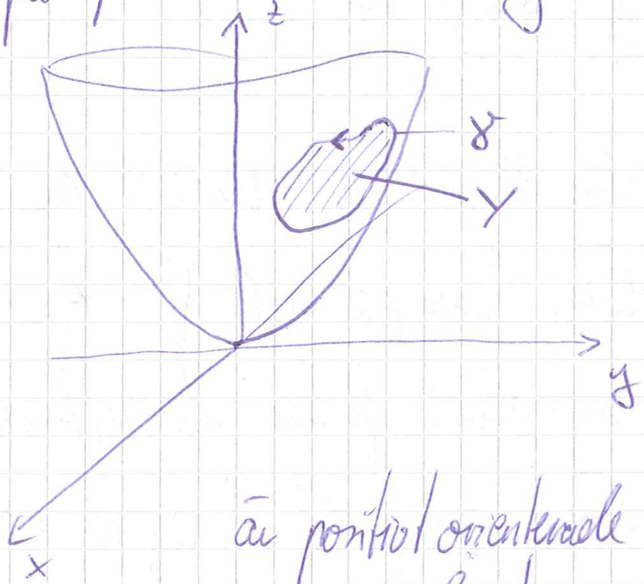
-) en cirkel i yz-parallellt plan $x=1$ med medelpunkt $(1,1,1)$

$$\int_\gamma \dots = \iint_{\tilde{D}} 5z\, dy dz > 0$$

eftersom $5z > 0$ på $\tilde{D}$

där $\tilde{D} = \{(x,y,z) : x=1 \text{ och } (y-1)^2 + (z-1)^2 < 1\}$

·) visa att kurvintegralen är oberoende av vägen för kurvor γ på paraboloiden $z=x^2+y^2$



vi vill använda Stokes:

$r(s,t)=(s,t,s^2+t^2)$

$$r_s \times r_t = \begin{pmatrix}1\\0\\2s\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2s\\-2t\\1\end{pmatrix}$$

orientering uppåt passar till kurvor γ som är positivt orienterade om man projicerar dem ner i xy-planet

$F=(2y^5, 2x^5, 5xyz)$ $\quad$ $\text{rot } F=(5xz, -5yz, 10(x^4-y^4))$

$$\int_\gamma F\,dr = \iint_Y \text{rot } F\cdot N\,dS = \iint_D \left(5s(s^2+t^2), -5t(s^2+t^2), 10(s^4-t^4)\right)\cdot\begin{pmatrix}-2s\\-2t\\1\end{pmatrix} ds\,dt$$

$$= \iint_D -10s^2(s^2+t^2)+10t^2(s^2+t^2)+10(s^4-t^4)\,ds\,dt =$$

$$= 10\iint_D -s^4+t^4+s^4-t^4\,ds\,dt = 0 \quad \forall\gamma$$

·) $\int_\gamma F\,dr$ $\quad$ γ går på $Y: z=x^2+y^2$ från $(-1,0,1)$ till $(1,1,2)$

$\gamma: t \mapsto (2t-1, t, (2t-1)^2+t^2) = (2t-1, t, 5t^2-4t+1) = r(t)$ $\quad 0\le t\le 1$

$r'(t)=(2,1,10t-4)$

$$\int_\gamma F\,dr = \int_0^1 F(r(t))\cdot r'(t)\,dt = \int_0^1 2t^5\cdot 2+2(2t-1)^5\cdot 1+$$
$$+5(2t-1)t(5t^2-4t+1)\cdot(10t-4)\,dt =$$
$$= \ldots = 2\int_0^1 284t^5-505t^4+360t^3-125t^2+20t-1\,dt = \ldots = \underline{\underline{\frac{22}{3}}}$$

Lättare: $(-1,0,1) \longrightarrow (1,0,1) \longrightarrow (1,1,2)$

$r_1(t)=(2t,0,4t^2)$ $\quad r_1'(t)=(2,0,8t)$ $\Rightarrow \int_{\gamma_1}=0$

$r_2(t)=(1,t,1+t^2)$ $\quad r_2'(t)=(0,1,2t)$ $\Rightarrow \int_{\gamma_2}=\frac{22}{3}$