MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd matematik

Tentamen i MM4000 Utvalda teman i matematik för lärare
Måndag den 23 maj 2016
Examinator: Torbjörn Tambour

Svar, lösningar och kommentarer

1. Redogör för något bevis för Pythagoras sats. Var noga med att ange vilka andra satser och resultat som du använder i beviset.

Kommentar: Här kan man välja Euklides bevis, ett bevis med likformighet eller något annat. Det är naturigtvis viktigt att beviset är korrekt, men även att det tydligt framgår vilka andra satser som används.

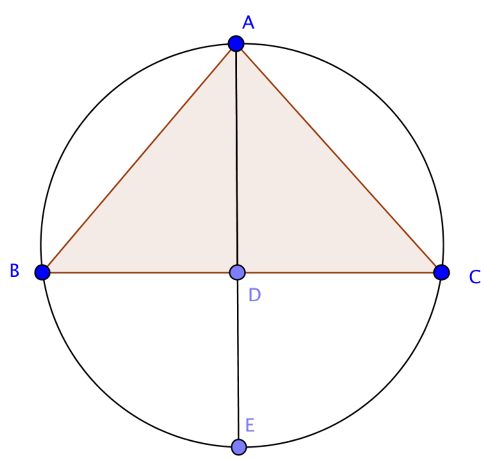
2. En triangel med sidorna 10, 10 och 12 cm är inskriven i en cirkel. Bestäm cirkelns radie. Vilka satser använder du?

Lösning: Låt triangeln vara $\triangle ABC$, där $|AB| = |AC| = 10$ och $|BC| = 12$. Drag höjden från A och beteckna dess fotpunkt på BC med D. Då är D mittpunkt på BC och Pythagoras sats ger $|AD|^2 + 6^2 = 10^2$, alltså $|AD| = 8$. Kordasatsen ger nu $|BD| \cdot |CD| = |AD| \cdot |DE|$, det vill säga $6 \cdot 6 = 8 \cdot |DE|$. Detta ger $|DE| = 9/2$, så cirkelns diameter är $|AD| + |DE| = 8 + 9/2 = 25/2$ och radien $25/4$.

Man kan också använda formeln för omskrivna cirkelns radie. Triangelns area är $T = 12 \cdot 8/2 = 48$, så radien är

$$R = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \frac{25}{4}.$$

En tredje variant är att använda Herons formel för att beräkna arean.



3. Vad menas med ordningen av ett tal modulo ett annat och hur kan man bestämma den? Vilka satser kan man använda för att underlätta beräkningen?

Konstruera själv ett exempel som visar hur man bestämmer ordningen. Exemplet får inte vara trivialt. Vad finns det för samband mellan ordningen av ett heltal modulo ett annat och decimalutveckling av rationella tal? Illustrera med ett exempel.

Svar: Ordningen av a modulo n är det minsta heltalet $k > 0$ sådant att $a^k \equiv 1 \mod n$. Att varje tal *har* en ordning följer till exempel av Euler-Fermats sats och av den följer också att ordningen delar $\varphi(n)$. Längden av perioden i decimalutvecklingen av ett rationellt tal p/q är lika med ordningen av 10 modulo q.

4. Vilka rationella tal har avslutade decimalutvecklingar? Bevisa ditt påstående.

Svar: Ett rationellt tal p/q, där $\gcd(p, q) = 1$, har en avslutad decimalutveckling om och endast om $q = 2^r 5^s$, det vill säga om och endast om nämnaren bara innehåller primfaktorerna 2 och 5. För beviset, antag först att utvecklingen av p/q är avslutad, det vill säga

$$\frac{p}{q} = A.a_1 a_2 \ldots a_m.$$

Då är $10^m p/q = A a_1 a_2 \ldots a_m$ ett heltal, vilket medför att $q$delar $10^m p$. Men $\gcd(p, q) = 1$, så $q \mid 10^m$, vilket innebär att de enda primfaktorerna i q är 2 och 5. För att visa omvändningen antar vi att $q = 2^r 5^s$. Om till exempel $r \geq s$, så är

$$a = 10^r \frac{p}{q} = 10^r \frac{p}{2^r 5^s} = 5^{r-s} p$$

ett heltal och $p/q = a/10^r$ har således en avslutad decimalutveckling.

5. Låt x_1, x_2 och x_3 vara rötterna till tredjegradsekvationen $x^3 - 4x^2 + x - 5 = 0$. Beräkna

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{och} \quad \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_3 x_1}.$$

Lösning: Enligt sambanden mellan rötter och koefficienter är

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 &= 1 \\ x_1 x_2 x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Vi har

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3),$$

så

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4^2 - 2 \cdot 1 = 14.$$

Vidare är

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_3 x_1} = \frac{x_3 + x_1 + x_2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{4}{5}.$$

6. Hur definieras diskriminanten till ett andragradspolynom? Uttryck diskriminanten i polynomets koefficienter. Vilken betydelse har diskriminanten för polynomets nollställen? Illustera med exempel och bevisa dina påståenden.

Svar: Diskriminanten till $p(x) = x^2 + ax + b$ definieras som

$$D = (x_1 - x_2)^2,$$

där x_1 och x_2 är p:s nollställen. Enligt sambanden mellan rötter och koefficienter är $x_1 + x_2 = -a$ och $x_1 x_2 = b$, så

$$D = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = a^2 - 4b.$$

Om $D = 0$, så har p ett dubbelt nollställe. Antag nu att a och b är reella. Om nollställena är reella, så är $D \geq 0$. Om de inte är reella, så är de konjugerade komplexa tal, säg $x_1 = \alpha + i\beta$, $x_2 = \alpha - i\beta$, där $\beta \neq 0$. Då får vi

$$D = ((\alpha + i\beta) - (\alpha - i\beta))^2 = (2i\beta)^2 = -4\beta^2 < 0.$$

Uppgifterna är värda högst 6 poäng per styck. Betygskriterier: För E krävs 18 p, för C krävs 27 p och för A krävs 35 p.

Skrivningsåterlämning och genomgång äger rum fredagen den 27 maj kl 10.00-10.30 i sal 37 i hus 5.