MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd matematik

Tentamen i MM4000 Utvalda teman i matematik för lärare
Fredag den 19 maj 2017
Examinator: Torbjörn Tambour

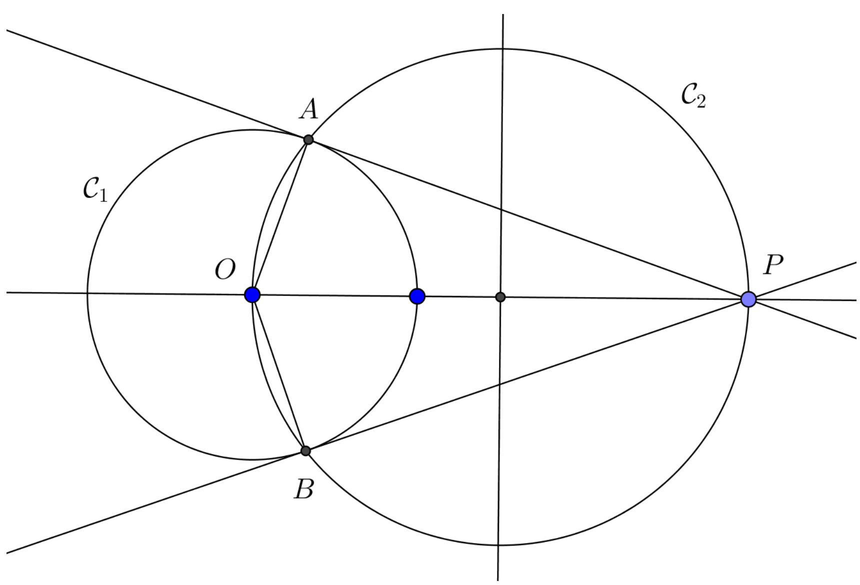
Lösningar

1. Vad menas med omskriven cirkel till en triangel? Bevisa att varje triangel har en omskriven cirkel. Kan en triangel ha fler omskrivna cirklar?

Svar: Det är viktigt att skilja mellan *definitionen* av den omskrivna cirkeln och *beviset* för att den finns samt att det bara finns en enda. I flera inlämnade lösningar står det att den omskrivna cirkeln *tangerar* hörnen i triangeln, och jag förstår självklart vad som menas, men det korrekta språket är att cirkeln *går genom* triangelns hörn eller att triangelns hörn *ligger på* cirkeln. Ett bevis för att varje triangel har en omskriven cirkel måste bygga på egenskaper hos mittpunktsnormalen till en sträcka. För betygen A och B krävs ett resonemang om varför det bara finns en enda omskriven cirkel.

2. I den här uppgiften ska du bevisa att en viss geometrisk konstruktion är korrekt. Låt $\mathcal{C}_1$ vara en cirkel med medelpunkt O och P en punkt utanför cirkeln. Drag en cirkel $\mathcal{C}_2$ med diameter OP och beteckna dess skärningspunkter med $\mathcal{C}_1$ med A och B. Bevisa att linjerna PA och PB är tangenter till $\mathcal{C}_1$. Tips: Börja med att rita en figur.

Lösning: Eftersom OP är en diameter i $\mathcal{C}_2$, så är vinkeln $\wedge OAP$ rät. Alltså bildar radien OA i $\mathcal{C}_1$ en rät vinkel med linjen AP och det följer då att AP är tangent till $\mathcal{C}_1$ i punkten A.



Anmärkning: Uppgiften visar alltså hur man kan konstruera tangenterna till en cirkel från en punkt utanför cirkeln. I euklidisk geometri duger det inte att ta en linjal och ”måtta” en tangent från den givna punkten, utan man måste *konstruera* tangeringspunkterna.

3. På mängden M finns det två operationer, addition $a + b$ och multiplikation $a \cdot b$. De är båda kommutativa och associativa och multiplikation är distributiv över addition. Det finns (minst) ett element 0 sådant att $0 + a = a$ och (minst) ett element 1 sådant att $a \cdot 1 = a$ för alla $a \in M$. Till varje a finns det (minst) ett motsatt element (^{-}a) med egenskapen $a + (^{-}a) = 0$. Mängden M skulle förstås kunna bestå av tal, men behöver inte göra det.

Bevisa med hjälp av enbart räknelagarna i texten ovan att det bara finns ett enda tal 0 med den nämnda egenskapen samt att varje element bara har ett enda motsatt element. Visa också att $0 \cdot a = 0$ för alla tal a.

Lösning: Antag att både 0_1 och 0_2 är ”nollor”, det vill säga att $a + 0_1 = a$ och $a + 0_2 = a$ för alla $a \in M$. Sätter vi $a = 0_2$ i den första likheten, så får vi $0_2 + 0_1 = 0_2$ och sätter vi $a = 0_1$ i den andra, så får vi $0_1 + 0_2 = 0_1$. Men additionen är kommutativ, så vi får

$$0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_1.$$

Antag nu att både b och c är motsatta element eller tal till a, det vill säga att $a + b = a + c = 0$. Då får vi

$$b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c.$$

För att visa att $a \cdot 0 = 0$ gör vi så här:

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a + a \cdot 0.$$

Om vi adderar det motsatta elementet till a till båda leden, så får vi att $a \cdot 0 = 0$.

4. Förklara varför decimalutvecklingen av ett rationellt tal är periodisk. Utgå gärna från ett konkret exempel. Det räcker att du behandlar fallet då nämnaren inte innehåller några faktorer 2 och 5.

Lösning: Alla som har gjort uppgiften har utgått från något konkret exempel, som 8/13 eller 3/7, vilket är helt i sin ordning. För att en lösning ska bli godkänd *måste* det dock framgå att skälet till att decimalutvecklingen är periodisk är att det bara finns ändligt många möjliga rester i de successiva divisionerna.

5. Hur definieras diskriminanten till ett andragradspolynom? Hur kan den uttryckas i polynomets koefficienter? Antag nu att polynomet har reella koefficienter. Vad kan man i så fall säga om polynomets nollställen om man vet att diskriminanten är negativ, noll respektive positiv?

Lösning: Om $f(x) = x^2 + ax + b$ har nollställena x_1 och x_2, så *definieras* diskriminanten som

$$D = (x_1 - x_2)^2.$$

Utveckling och användning av sambanden mellan rötter och koefficienter ger

$$\begin{aligned} D &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 \\ &= (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 \\ &= p^2 - 4q. \end{aligned}$$

Oavsett vilka koefficienterna är, så är det klart att $D = 0$ om och endast om $x_1 = x_2$. Om koefficienterna a och b är reella, så finns det följande möjligheter:

- Båda rötterna är reella och olika. Då är $D > 0$.
- Rötterna är icke-reella och olika. Då är de konjugerade komplexa tal, säg $x_1 = \alpha + i\beta$, $x_2 = \alpha - i\beta$, och vi får
$$D = ((\alpha+i\beta) - (\alpha - i\beta))^2 = (2i\beta)^2 = -4\beta^2 < 0.$$

6. Visa att ekvationen $x^3 - 9x - 9 = 0$ har tre reella rötter. Lös den. Rötterna ska anges utan användning av komplexa tal.

Lösning: Med beteckningar som i kompendiet är

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(-\frac{9}{3}\right)^3 + \left(-\frac{9}{2}\right)^2 = -\frac{3^3}{4} < 0$$

så diskriminanten $-108D > 0$. Alltså har ekvationen tre reella rötter. Enligt Cardanos formler är de

$$\begin{aligned} x_k &= \omega^k \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}} + \omega^{-k} \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{3}\left(\omega^k \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}} + \omega^{-k} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}\right) \end{aligned}$$

där $k = 0, 1, 2$ och $\omega = e^{2\pi i/3}$. På polär form är

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} = e^{\pi i/6},$$

så

$$x_k = \sqrt{3}\left(e^{\pi i/18 + 2k\pi i/3} + e^{-\pi i/18 - 2k\pi i/3}\right) = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right).$$

Rötterna är således

$$\begin{aligned} x_0 &= 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} \\ x_1 &= 2\sqrt{3}\cos\frac{13\pi}{18} = -2\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{18} \\ x_1 &= 2\sqrt{3}\cos\frac{25\pi}{18} = -2\sqrt{3}\cos\frac{7\pi}{18} \end{aligned}$$

Anmärkning: Ett annat sätt att visa att ekvationen har tre reella rötter är förstås att studera kurvan $y = f(x) = x^3 - 9x - 9$. Vi har

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3) = 3(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

och det är lätt att se att f har ett lokalt maximum för $= -\sqrt{3}$ och ett lokalt minimum för $x = \sqrt{3}$. Värdena är $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} - 9 > 0$ respektive $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} - 9 < 0$. Alltså har f tre reella nollställen. Ett ligger tlll vänster om $-\sqrt{3}$ och ett till höger om $\sqrt{3}$, så vi kan dra slutsatsen att minst ett är negativt och ett är positivt. Men vad kan vi säga om det tredje? Jo, vi har $f(0) = -9 < 0$, så enligt satsen om mellanliggande värden har f ett nollställe strikt mellan $-\sqrt{3}$ och 0 och nollstället är därför negativt. Sammanfattningsvis har f två negativa nollställen och ett positivt, vilket stämmer med det vi såg i den algebraiska lösningen ovan.