MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd matematik

Tentamen i MM4000 Utvalda teman i matematik för lärare
Tisdag den 22 augusti 2017
Examinator: Torbjörn Tambour

Lösningar och kommentarer

1. Formulera och bevisa Pythagoras sats. Du kan välja vilket bevis du vill, men argumentationen ska vara klar och hänvisningar till andra satser tydliga. Eventuella figurer ska också vara tydliga.

2. Sidorna i en triangel har längderna a, b och c och de uppfyller sambandet $a^2 + b^2 = c^2$. Måste triangeln vara rätvinklig? Motivera ditt svar noggrant.

Kommentar: Lägg märke till att det här är *omvändningen* till Pythagoras sats. Se kompendiet för ett bevis.

3. Låt a och $n > 1$ vara heltal. Vad menas med att a har ordning m modulo n? Visa att om $a^d \equiv 1 \mod n$, så är d en multipel av ordningen av a modulo n. Bestäm ordningen av 100 modulo 17.

Lösning: Att a har ordningen m modulo n betyder att $a^m \equiv 1 \mod n$ och att m är det minsta positiva heltalet med denna egenskap. Om $a^d \equiv 1$, så dividera d med m: $d = qm + r$, där $0 \le r < m$. Då har vi

$$1 \equiv a^d \equiv a^{qm+r} = (a^m)^q \cdot a^r \equiv a^r \mod n.$$

Men m är den minsta exponenten > 0 som duger, så vi måste ha $r = 0$ och således $m \mid d$.

Eftersom $100 \equiv -2 \mod 17$, så är $o_{17}(100) = o_{17}(-2)$. Men $(-2)^4 = 16 \equiv -1 \mod 17$, så den sökta ordningen är 8.

4. Bestäm alla lösningar till systemet

$$\begin{cases} x \equiv -2 & \mod 5 \\ x \equiv 3 & \mod 9 \\ x \equiv -1 & \mod 13. \end{cases}$$

Lösning: Med beteckningar som i kompendiet är $M = 5 \cdot 9 \cdot 13 = 585$ samt $M_1 = 9 \cdot 13 = 117$, $M_2 = 5 \cdot 13 = 65$ och $M_3 = 5 \cdot 9 = 45$. Vi måste alltså bestämma tal E_i så att

$$\begin{cases} M_1E_1 = 117E_1 \equiv 1 \mod 5 \\ M_2E_2 = 65E_2 \equiv 1 \mod 9 \\ M_3E_3 = 45E_3 \equiv 1 \mod 13 \end{cases}$$

Kongruensen $117E_1 \equiv 1 \mod 5$ ser ju respektingivande ut, men den är enkel att lösa om man lägger märke till att $117 \equiv 2 \mod 5$. Den är alltså ekvivalent med $2E_1 \equiv 1 \mod 5$, som har en lösning $E_1 = 3$. På liknande sätt får vi $E_2 = 5$ och

$E_3 = -2$ (observera att en kongruens av typen $117E_1 \equiv 1 \mod 5$ har oändligt många lösningar, men att det räcker att hitta *en*). En partikulärlösning till systemet i uppgiften är tydligen

$$x_0 = (-2) \cdot 117 \cdot 3 + 3 \cdot 65 \cdot 5 + (-1) \cdot 45 \cdot (-2) = 363.$$

Samtliga lösningar ges av

$$x = x_0 + n \cdot M = 363 + 585n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Kommentar: En synpunkt man kan ha på den här och liknande uppgifter är att de kräver en del beräkningar för hand. Men att kunna utföra enkla beräkningar för hand är en del av matematiken och det är också en del av matematiken att kunna komma på och utföra lämpliga förenklingar, exempelvis att se att $117E_1 \equiv 1 \mod 5$ är ekvivalent med $2E_1 \equiv 1 \mod 5$. Det är vidare lätt att kontrollera svaret i uppgiften och jag kommer därför att vara sträng när det gäller beräkningarna. Det räcker inte med att lösningen är ”i princip” korrekt (dvs innehålla räknefel), utan den måste vara korrekt även vad gäller beräkningarna.

5. Låt $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Definiera diskriminanten D till $p(x)$. Antag att a, b och c är reella. Visa att

$$D \geq 0 \Leftrightarrow \text{alla nollställen till } p(x) \text{ är reella}$$

och att

$$D < 0 \Leftrightarrow p(x) \text{ har ett reellt och två konjugerade icke-reella nollställen.}$$

Lösning: Diskriminanten definieras genom

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2,$$

där x_i är nollställena till $p(x)$. Vi ser omedelbart att om alla nollställen är reella, så är $D \geq 0$. Den andra möjligheten är att ett nollställe, säg x_1, är reellt och de andra två konjugerade icke-reella. Säg att

$$x_2 = \alpha + i\beta, \quad x_3 = \bar{x}_2 = \alpha - i\beta.$$

I så fall är

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - \bar{x}_2)^2 (2i\beta)^2 = -4\beta^2 |x_1 - x_2|^4,$$

som är reellt och < 0. Detta visar implikationerna åt *vänster* i uppgiften. För att få implikationerna åt andra hållet, dvs ekvivalenserna, kan man resonera så här. Antag att $D \geq 0$. Då kan inte två av nollställena vara icke-reella och konjugerade, för i så fall skulle $D < 0$. Alltså är alla nollställena reella. På samma sätt resonerar man om den andra ekvivalensen.

6. Låt x_1, x_2 och x_3 vara rötterna till ekvationen $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$. Bestäm värdet av

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{och} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}.$$

Lösning: Enligt sambanden mellan rötter och koefficienter är

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 & = & 1 \\ x_1x_2x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Alltså är

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2^2 - 2 \cdot 1 = 2$$

och

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{3}.$$