

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras noggrant. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

1. Beräkna följande gränsvärden:

a). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{xe^x}$ (2p)

b). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{2x - 1}$ (2p)

2. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a). Bestäm alla egenvärden till A , dvs alla tal λ sådana att matrisen $A - \lambda I$ har determinant lika med noll (I betecknar enhetsmatrisen). (2p)

b) Bestäm för vart och ett av egenvärdena i a) en motsvarande egenvektorer, dvs hitta för varje lösning λ i a) en nollskild vektor v som uppfyller att $Av = \lambda v$. (3p)

3. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}.$$

Undersök speciellt stationära punkter, extremvärden, och asymptoter. Ange även funktionens värdemängd. (6p)

4. Bestäm största och minsta värde till funktionen $f(x, y) = y^2 + x^2y$ i området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ och } -x \leq y \leq x\}$. (5p)

5. Beräkna den rotationsvolym som uppstår då funktionsgrafan

$$y = \sqrt{\sin(2x)}, \quad 0 \leq x \leq \pi/6$$

får rotera runt x-axeln. (4p)

6. a). Bestäm en lösning $y = y(x)$ till differentialekvationen $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ som uppfyller begynnelsevilkoret $y(0) = 1$. (3p)

6. b). Bestäm den allmänna lösningen $y = y(t)$ till differentialekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = -\sin(t).$$

(3p)