Introduktion

Linjär algebra är ett av de mest centrala och mångsidiga matematiska områdena, och fungerar som motorn bakom många av de tekniker vi använder dagligen:

(1) **Datorgrafik och bildbearbetning:**
- *3D-modellering och rendering:* Linjär algebra används för att representera och manipulera 3D-objekt genom transformationer som rotation, skalning och translation.
- *Bildkomprimering och bildförbättring:* Algoritmer som JPEG bygger på matristransformationer (t.ex. diskret cosinustransform), och även tekniker för filtrering, brusreducering och kantdetektion bygger på linjär algebra.

(2) **Sökmotorer:**
- *Rangordning av webbsidor:* Googles PageRank-algoritm använder egenvärden och egenvektorer för att analysera länkstrukturer och bestämma sidors relevans.
- *Dokumentrepresentation:* Metoder som TF-IDF kombinerat med vektorrumsmodeller representerar texter som vektorer, vilket gör det möjligt att använda linjär algebra för att mäta likhet och relevans mellan dokument.

(3) **Maskininlärning och AI:**
- *Datarepresentation:* Data representeras som vektorer och matriser, vilket gör linjär algebra till grunden för hur modeller tränas och används.
- *Algoritmer:* Många tekniker – som linjär regression, huvudkomponentanalys (PCA), support vector machines (SVM), neurala nätverk (inklusive språkmodeller och bildigenkänning) – bygger på linjära transformationer, matrismultiplikationer och optimering.

(4) **Ingenjörskonst:**
- *Strukturanalys:* Stora linjära system används för att analysera och designa konstruktioner som broar, byggnader och flygplan.
- *Elektronik och signalbehandling:* Linjär algebra används för att analysera elektriska kretsar och för att bearbeta signaler.
- *Kontrollsystem:* Dynamiska system, som robotar och fordon, modelleras och styrs med hjälp av tillståndsmodeller baserade på matriser.

(5) **Vetenskapliga beräkningar och forskning:**
- *System av linjära ekvationer:* Centralt för nästan alla naturvetenskapliga och tekniska tillämpningar.
- *Numeriska metoder:* Algoritmer som Gauss-eliminering och LU-faktorisering är fundamentala för beräkningar inom fysik, kemi och biologi.

- *Storskaliga simuleringar:* Väderprognoser, klimatmodeller och molekylär dynamik bygger på omfattande matriskalkyler, vilket gör linjär algebra till en kärnteknik i superdatorer och högpresterande beräkningar.

Detta är bara ett axplock av de många tillämpningarna av linjär algebra och den som läser den här kursen kan vara säker på att den använder någon tillämpning av linjär algebra varje dag.

Vad är linjär algebra? Linjär algebra är teorin om linjer, plan och högdimensionella *linjära* rum och avbildningar mellan dessa. Till skillnad från många andra matematiska områden är linjär algebra en teori som vi verkligen förstår väl, vilket är en av anledningarna till dess många tillämpningar. Ett citat från William Stein lyder: *"Matematik är konsten att reducera vilket problem som helst till linjär algebra"*.

Det kanske mest typiska problemet i linjär algebra är att lösa system av linjära ekvationer, dvs. att hitta lösningar till ekvationer av formen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m\,, \end{aligned}$$

där a_{ij} och b_i är kända konstanter och x_i är variabler. Dessa ekvationer kan skrivas på matrisform som $Ax = b$ där A är en matris med koefficienterna a_{ij}, där x är en kolumnvektor med variablerna x_i och b är en kolumnvektor med konstanterna b_i:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matrisen A representerar en *linjär avbildning* från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, dvs. den avbildar vektorer i $\mathbb{R}^n$ till vektorer i $\mathbb{R}^m$. Lösningen x är en vektor i $\mathbb{R}^n$ som avbildas på vektorn b i $\mathbb{R}^m$.

I den här kursen kommer vi inte längre att begränsa oss till $\mathbb{R}^n$ utan kommer att arbeta i en mer abstrakt kontext med allmänna vektorrum över en kropp k. Vi kommer att se många exempel på vektorrum, inklusive vektorrum av oändlig dimension. Under kursens gång kommer vi dock att inse att vi faktiskt kan identifiera varje vektorrum av ändlig dimension n med k^n.

1. Vektorrum

1.1. **Definitionen av ett vektorrum.** Ett vektorrum är mängd med *mycket* struktur, vilket gör att de är lätta att arbeta med, men något krångliga att definiera. Kort sagt så är ett vektorrum en *abelsk grupp* som är en *modul* över en *kropp*. Men för att förstå vad det betyder så behöver vi först definiera dessa begrepp.

Definition 1.1. En *abelsk grupp* är en mängd A tillsammans med en funktion $+\colon A \times A \to A$ (skrivs $(a, b) \mapsto a + b$) som uppfyller följande egenskaper:

(A1) `Kommutativitet:` För alla $a, b \in A$ gäller $a + b = b + a$ (dvs *abelsk*).
(A2) `Associativitet:` För alla $a, b, c \in A$ gäller $(a + b) + c = a + (b + c)$.
(A3) `Identitet:` Det finns ett element $0 \in A$ sådant att för alla $a \in A$ gäller $a + 0 = a$.
(A4) `Invers:` För varje $a \in A$ finns ett element $-a \in A$ sådant att $a+(-a) = 0$.

Heltalen $\mathbb{Z}$, reella talen $\mathbb{R}$ och komplexa talen $\mathbb{C}$ är alla exempel på abelska grupper under addition. Notera att ingen av dessa exempel är grupper under multiplikation. Om A är en abelsk grupp så är även

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A\},$$

med addition komponentvis (se Exempel 1.1 längre ner), en abelsk grupp för varje positivt heltal n. Dvs $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$ är alla exempel på abelska grupper under komponentvis addition.

Sats 1.1 (Cancellationslagen)**.** *Låt A vara en abelsk grupp. Om $a, b, c \in A$ och $a + b = a + c$, så gäller att $b = c$.*

Bevis. Vi har $b = (-a) + (a + b) = (-a) + (a + c) = c$. □

Diskussionsfrågor 1.1

(1) Vilka av axiomen (A1)-(A4) använde vi i beviset?
(2) Kan du ge ett exempel på en grupp som ej är kommutativ?

Följdsats 1.2 (Unik-identitet-och-invers)**.** *Elementet* 0 *i* $(A3)$ *och elementet* $-a$ *i* $(A4)$ *är båda unika. Det finns alltså endast ett nollelement och endast en invers till varje element.*

Notera att vi hittills inte har utnyttjat axiomet (A1), dvs. [Cancellationslagen] (Sats 1.1) och [Unik-identitet-och-invers] (Följdsats 1.2) gäller även för icke-abelska grupper.

I vår nästa definition kommer vi att axiomatisera egenskaperna hos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ och $\mathbb{F}_p$.

Definition 1.2. En *kropp* är en mängd k tillsammans med två funktioner $k \times k \to k$ som vi kallar *addition* (skrivs $(a, b) \mapsto a + b$) och *multiplikation* (skrivs $(a, b) \mapsto ab$) som uppfyller följande egenskaper:

(A) k är en abelsk grupp under addition,
(B) $k \setminus \{0\}$ är en abelsk grupp under multiplikation (identiteten kallar vi 1),
(D) `Distributivitet:` För alla $a, b, c \in k$ gäller $a(b + c) = ab + ac$.

I den här kursen kommer vi mestadels att arbeta med kropparna $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Diskussionsfrågor 1.2

(1) Är $\mathbb{Z}$ en kropp?
(2) Är $\mathbb{R}^2$ en kropp?

Nu ska vi definiera vektorrum. Poängen är att försöka kapsla in egenskaperna hos $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$, men som vi kommer att se så innefattar begreppet vektorrum många fler exempel än dessa.

Definition 1.3. Ett *vektorrum* över en kropp k är en mängd V tillsammans med två funktioner: *addition* $+ \colon V \times V \to V$ (skrivs $(v, w) \mapsto v + w$) och *skalärmultiplikation* $k \times V \to V$ (skrivs $(a, v) \mapsto av$), som uppfyller följande egenskaper:

(A) V är en *abelsk grupp* under addition, dvs:

(A1) `Kommutativitet:` För alla $v_1, v_2 \in V$ gäller $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.

(A2) `Associativitet:` För alla $v_1, v_2, v_3 \in V$ gäller $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$.

(A3) `Identitet:` Det finns ett element $0 \in V$ sådant att för alla $v \in V$ gäller $v + 0 = v$.

(A4) `Invers:` För varje $v \in V$ finns ett element $-v \in V$ sådant att $v + (-v) = 0$.

(M) V är en *modul* över k i den mening att, utöver (A) så har vi att:

(M1) `Identitet:` För alla $v \in V$ gäller $1v = v$.

(M2) `Associativitet:` För alla $a, b \in k$ och $v \in V$ gäller $a(bv) = (ab)v$.

(M3) `Distributivitet-1:` För alla $a \in k$ och $v_1, v_2 \in V$ gäller $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$.

(M4) `Distributivitet-2:` För alla $a, b \in k$ och $v \in V$ gäller $(a + b)v = av + bv$.

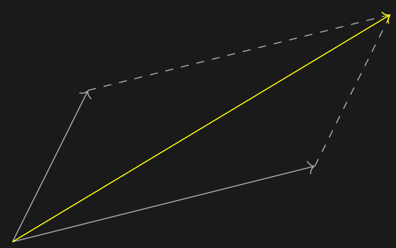
Elementen i ett vektorrum brukar kallas för *vektorer* eller *punkter*.

Ett vektorrum är alltså en *abelsk grupp som är en modul över en kropp*. Den som finner det hjälpsamt kan minnas axiomen som

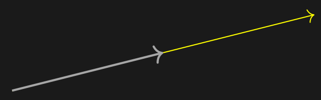
`KAIIIADD`, `K-AIIIA-DD`, eller `KAII-IADD`,

där de första fyra är axiomen för en abelsk grupp och de fyra sista är de ytterligare axiom som gör V till en modul över k, dvs. en *modul* är en abelsk grupp som uppfyller (M). Notera att de första fyra axiomen inte nämner k.

Vektoraddition i $\mathbb{R}^n$ kan visualiseras som en parallellogram, där $v_1 + v_2$ är den diagonala linjen i parallellogrammen med hörn 0, v_1 och v_2:



Skalärmultiplikation i $\mathbb{R}^n$ kan visualiseras som en förlängning/förkortning av en vektor, där av är vektorn v multiplicerad med skalären a:



Sats 1.3 (Identitetselement)**.** *Låt V vara ett vektorrum över en kropp K och låt $a \in k$ och $v \in V$. Då gäller att*

(1) $0v = 0$,
(2) $(-1)v = -v$,
(3) $a(0) = 0$,
(4) om $av = 0$ så har vi $a = 0$ eller $v = 0$.

Bevis. (1): Vi har av (M4) att $v = (1+0)v = 1v + 0v = v + 0v$ och av [Cancellationslagen] (Sats 1.1) följer det att $0v = 0$. (2): Nu ser vi att $0 = 0v = (1 + -(1))v = 1v + (-1)v = v + (-1)v$, dvs $-v = (-1)v$. (3): Vi har $a(0) = a(v + (-v)) = av + a(-v) = av + (a(-1))v = av + (-1)av = av + (-(av)) = 0$. (4): Slutligen, om $av = 0$ och $a \neq 0$ så har vi $v = 1v = (a^{-1}a)v = a^{-1}av = a^{-1}0 = 0$. $\square$

Exempel 1.1. Det mest typiska exemplet på ett vektorrum är k^n där $n \in \mathbb{N}$ och k är en kropp, t.ex. $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Här är vektorerna ordnade n-tupler $v = (v_1, \ldots, v_n)$ där $v_i \in k$. Vektoraddition och skalärmultiplikation definieras komponentvis:

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n), \quad av = (av_1, av_2, \ldots, av_n)\,.$$

Vektorrum kan se ut på olika sätt och det finns många exempel på vektorrum som inte är lika konkreta som $\mathbb{R}^n$. Här är några exempel:

Exempel 1.2. Låt k vara en kropp och M en godtycklig mängd. Då är mängden k^M av alla funktioner från M till k ett vektorrum över k. Vektoraddition och skalärmultiplikation definieras punktvis: $(f_1 + f_2)(m) = f_1(m) + f_2(m), \quad (af)(m) = af(m)$. Notera att $\mathbb{R}^n$ är ett specialfall av detta eftersom vi kan identifiera $\mathbb{R}^n$ med mängden av alla funktioner från $\{1, \ldots, n\}$ till $\mathbb{R}$.

Exempel 1.3. Ett specialfall av föregående exempel är $k^{\mathbb{N}}$ som kan identifieras med mängden av *potensserier*

$$k[[x]] := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n : a_n \in k \right\}.$$

Vektoraddition och skalärmultiplikation definieras genom

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) x^n, \quad a\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (ac_n) x^n .$$

Diskussionsfrågor 1.3

(1) Om $V_1, \dots V_n$ är vektorrum över en kropp k, är då $V_1 \times \cdots \times V_n$ ett vektorrum över k?
(2) Är mängden av alla 2×2 matriser med reella tal som element (addition och skalärmultiplikation komponentvis) ett vektorrum över $\mathbb{R}$?
(3) Är $\mathbb{C}$ ett vektorrum över $\mathbb{R}$?

1.2. **Delrum.** När vi betraktar delmängder av vektorrum så är det ofta användbart att veta när en delmängd är ett vektorrum i sig. Det leder oss till definitionen av ett *delrum*:

Definition 1.4. Ett *delrum* W av ett vektorrum V över en kropp k är en delmängd av V som är ett vektorrum över k med samma operationer som V, dvs

(1) W är slutet under addition: $w_1 + w_2 \in W$ om $w_1, w_2 \in W$,
(2) W är slutet under skalärmultiplikation: $aw \in W$ om $w \in W$ och $a \in k$,
(3) W tillsammans med addition och skalärmultiplikation uppfyller alla 8 axiomen för ett vektorrum.

Diskussionsfrågor 1.4

(1) Är $\{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2v_1 - v_2 + 5v_3 = 0\}$ ett delrum av $\mathbb{R}^3$?
(2) Är $\{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2v_1 - v_2 + 5v_3 = 1\}$ ett delrum av $\mathbb{R}^3$?
(3) Är $\{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1\}$ ett delrum av $\mathbb{R}^3$?
(4) Är $\{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0\}$ ett delrum av $\mathbb{R}^3$?
(5) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är $\{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = a\}$ ett delrum av $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (Exempel 1.2)?

Exempel 1.4. Mängden av *polynom* med koefficienter i k,

$$k[x] = \left\{ \sum a_n x^n : a_n \in k, a_n = 0 \text{ för alla utom ändligt många } n \right\},$$

är ett delrum av $k[[x]]$ (Exempel 1.3). Mängden av *polynom av grad högst n* är ett delrum av $k[x]$:

$$k[x]_{\leq n} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i : a_i \in k \right\}.$$

Exempel 1.5. Mängden av alla *kontinuerliga* funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är ett delrum av $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (Exempel 1.2).

Nu ska vi visa att man faktiskt inte behöver kontrollera alla 8 axiomen för att verifiera att en delmängd är ett delrum. Det räcker med att kontrollera tre egenskaper, vilket gör det mycket enklare att avgöra om en delmängd är ett delrum eller inte.

Sats 1.4 (Delrumstest)**.** *Låt V vara ett vektorrum och $W \subseteq V$ vara en delmängd. Då är W ett delrum av V om och endast om W har följande tre egenskaper:*

(1) Innehåller nollvektorn: $0 \in W$ där 0 är nollvektorn i V,
(2) Sluten under addition: $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$,
(3) Sluten under skalärmultiplikation: $v \in W$, $a \in K \Rightarrow av \in W$.

Bevis. Anta att W är ett delrum av V. Då håller (2) and (3) per definition och det återstår att verifiera att $0 \in W$. Låt 0_W vara nollvektorn i W. Eftersom $0_W = 0_W + 0_W$ i W (och då även i V) så har vi att $0 + 0_W = 0_W = 0_W + 0_W$ i V. Av cancellationslagen får vi att $0_W = 0$.

Å andra sidan, låt W är en delmängd av V som uppfyller (1), (2) och (3). Notera att $(A1)$, $(A2)$, $(M1)$, $(M2)$, $(M3)$ och $(M4)$ är uppfyllda i W eftersom de är uppfyllda i V. Vi behöver nu visa att $(A3)$ och $(A4)$ är uppfyllda i W. Vi ser direkt att $(A3)$ är uppfyllt eftersom $0 \in W$. Att (A4) är uppfyllt följer av (3): om $w \in W$ så har vi $(-1)w = -w \in W$. $\square$

Diskussionsfrågor 1.5

(1) Är delmängden $\{(a_1, 1, a_3) : a_1, a_3 \in k\} \subseteq k^3$ ett delrum av k^3?
(2) Är delmängden $\{ax + bx^2 : a, b \in k\} \subseteq k[x]$ ett delrum av $k[x]$?
(3) Är unionen av två delrum ett delrum?
(4) Är snittet av två delrum ett delrum?
(5) Är mängden av alla polynom i $k[x]$ med grad exakt n ett delrum av $k[x]$?