

2. Bas, linjärt oberoende och dimension

2.1. Linjärkombination och linjärt hölje. När man arbetar med ett konkret vektorrum är det ofta möjligt att hitta en liten mängd vektorer som kan kombineras på olika sätt för att generera hela rummet eller ett specifikt delrum. Detta görs genom att använda linjärkombinationer av vektorer. En linjärkombination är en summa av vektorer där varje vektor multipliceras med en skalär från kroppens element.

Definition 2.1. Låt V vara ett vektorrum över en kropp k . En *linjärkombination* av vektorerna $v_1, \dots, v_n \in V$ ($n \in \mathbb{N}$) är ett uttryck av formen

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n,$$

där $a_i \in k$ för alla i .

Exempel 2.1.

- (1) Varje element i $\mathbb{R}^2$ är en linjärkombination av vektorerna $(1, 0)$ och $(0, 1)$.
- (2) Varje element i $\mathbb{R}^2$ är en linjärkombination av vektorerna $(1, 2)$ och $(1, -1)$.
- (3) Varje element i $k[x]$ (Exempel 1.4) är en linjärkombination av vektorerna $1, x, x^2, x^3, \dots$.

Notera att en linjärkombination byggs upp av ett *ändligt* antal vektorer men att vi inte kräver att dessa är unika, dvs att vi kan ha $v_i = v_j$ för vissa $i \neq j$.

Definition 2.2. Låt V vara ett vektorrum över en kropp k och låt $S \subseteq V$ vara en delmängd. Mängden av alla linjärkombinationer av vektorerna i S kallas det *linjära höljet* (eller *spannet*) av S och betecknas $\text{Span}(S)$. Om $\text{Span}(S) = V$ så sägs att S *spänner upp* eller *genererar* V . Om $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ så skriver vi $\text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ istället för $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\})$. Vi definierar även $\text{Span}(\emptyset) = \{0\}$ där 0 är nollvektorn i V .

Exempel 2.2. Låt $V = \mathbb{R}^3$ och låt $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$. Då är $\text{Span}(S)$ mängden av alla vektorer av formen $(a_1, a_2, 0)$ där $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Detta är ett plan

i $\mathbb{R}^3$ som innehåller z-axeln. Om vi lägger till vektorn $(0, 0, 1)$ i S , så att $S' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ så är $\text{Span}(S') = \mathbb{R}^3$.

Exempel 2.3. Låt $V = k[x]$ vara mängden av alla polynom med koefficienter i en kropp k . Låt $S = \{1, x + 103, x^2\}$. Då är $\text{Span}(S) = K[x]_{\leq 2}$: mängden av alla polynom av grad högst 2, dvs alla polynom av formen $a_0 + a_1x + a_2x^2$ där $a_i \in k$.

Sats 2.1 (Karaktärisering av Span). *Låt V vara ett vektorrum över en kropp k och låt $S \subseteq V$ vara en delmängd. Då är $\text{Span}(S)$ ett delrum av V . Mer specifikt, $\text{Span}(S)$ det minsta delrummet av V som innehåller S , det vill säga, om W är ett delrum av V som innehåller S , så har vi att $\text{Span}(S) \subseteq W$.*

Bevis. Vi måste visa att $\text{Span}(S)$ är ett delrum av V . För att göra detta, måste vi visa att $\text{Span}(S)$ är sluten under addition och skalärmultiplikation, samt att den innehåller nollvektorn. Detta är trivialt om $S = \emptyset$ så vi antar att $S \neq \emptyset$.

- Nollvektorn: Låt $v \in S$. Då är $0 \cdot v = 0$ en linjärkombination av vektorer i S , så nollvektorn är i $\text{Span}(S)$.
- Sluten under addition: Om $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ och $w = b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$ är linjärkombinationer av vektorer i S , så är

$$v + w = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$$

en linjärkombination av vektorer i S .

- Sluten under skalärmultiplikation: Likt ovan, om $c \in k$ så har vi

$$cv = c(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = ca_1v_1 + \cdots + ca_nv_n$$

vilket är en linjärkombination av vektorer i S .

Antag nu att $S \subseteq W$ där W är ett delrum av V . Givet en linjärkombination $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ där $v_i \in S$ för alla i , så är varje term $a_iv_i \in W$ eftersom W är sluten under skalärmultiplikation och W innehåller S . Därmed är summan $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in W$ eftersom W är sluten under addition. Detta visar att $\text{Span}(S) \subseteq W$. $\square$

Diskussionsfrågor 2.1

- (1) Om $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 4, 2)$ och $v_3 = (-1, 2, 0)$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$, kan varje vektor i $\mathbb{R}^3$ skrivas som en linjärkombination av v_1, v_2 och v_3 ? Vad är $\text{Span}(v_1, v_2, v_3)$?
- (2) Kan du hitta två vektorer $v_1, v_2 \in k[x]_{\leq 2}$ så att $\text{Span}(v_1, v_2) = \{p(x) \in k[x] \mid p(0) = 0\}$?

2.2. Linjärt oberoende, bas och dimension. Givet en mängd S med vektorer som spänner upp ett vektorrum $\text{Span}(S)$, kan vi fråga oss om det finns några redundanta vektorer i mängden. Om en vektor v kan skrivas som en linjärkombination av de andra vektorerna i S , så är den redundant och om vi tar bort denna vektor så förändrar vi inte spannet: $\text{Span}(S \setminus \{v\}) = \text{Span}(S)$. Detta leder oss till begreppet *linjärt oberoende*.

Definition 2.3. Låt V vara ett vektorrum över en kropp k och låt $S \subseteq V$ vara en delmängd. Vi säger att S är *linjärt oberoende* om den enda linjärkombinationen av vektorerna i S som ger nollvektorn är den triviala kombinationen där alla skalärer är noll, det vill säga:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_i = 0 \text{ för alla } i.$$

Om S inte är linjärt oberoende så sägs den vara *linjärt beroende*.

Notera att vi endast betraktar linjärkombinationer av ett *ändligt* antal vektorer i S även om mängden S är oändlig.

Exempel 2.4. Låt $V = \mathbb{R}^3$ och låt $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Då är S linjärt oberoende eftersom den enda linjärkombinationen som ger nollvektorn är den triviala kombinationen där alla skalärer är noll. Om vi lägger till vektorn $(1, 1, 1)$ i S , så att $S' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ så är S' linjärt beroende eftersom $(1, 1, 1) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1)$.

Definition 2.4. Låt V vara ett vektorrum över en kropp k . En (ordnad) *bas* för V är en (ordnad) delmängd $\beta \subseteq V$ som är både linjärt oberoende och spänner upp hela rummet, det vill säga $\text{Span}(\beta) = V$ och β är linjärt oberoende.

Poängen med en (ändlig) *ordnad* bas för ett vektorrum V är att den hjälper oss att identifiera V med k^n . Detta kommer att bli tydligt i Kapitel 4.

Exempel 2.5. Låt $V = \mathbb{R}^3$. Då är mängden $\beta = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ en bas för V eftersom den är linjärt oberoende och spänner upp hela rummet.

Exempel 2.6. Låt $V = k[x]$ vara mängden av alla polynom med koefficienter i en kropp k . Då är mängden $\beta = \{1, x, x^2, \dots\}$ en bas för V eftersom den är linjärt oberoende och spänner upp hela rummet. Notera att β *inte* är en bas för $k[[x]]$ eftersom elementet $1 + x + x^2 + \dots$ *ej* kan uttryckas som en *ändlig* linjärkombination av element i β .

Definition 2.5 (Standardbasen). Låt k vara en kropp. Delmängden av k^n som består av vektorerna

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

kallas för *standardbasen* för k^n .

Definition 2.6. Ett vektorrum V är av (eller har) *ändlig dimension* om det finns en bas β för V med ändligt många element. Om inget sådant bas finns, sägs V vara av *oändlig dimension*. Vi säger att V har *uppräknelig dimension* om det finns en uppräknelig bas för V .

Sats 2.2 (Karaktärisering-av-bas). Låt V vara ett vektorrum över en kropp k . En delmängd $\beta \subseteq V$ är en bas för V om och endast om varje vektor i V kan uttryckas som en linjärkombination av vektorerna i β på ett unikt sätt.

Bevis. Antag första att β utgör en bas för V . Då är $\text{Span}(\beta) = V$ och varje vektor $v \in V$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna i β :

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n.$$

Antag nu att $v = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m$ är en annan linjärkombination av vektorerna i β . Genom att lägga till $0 \cdot v_1, 0 \cdot v_2$ till den andra linjär kombinationen och vice versa

så kan vi anta att $n = m$ och $w_i = v_i$ för alla $1 \leq i \leq n$. Då har vi att

$$\begin{aligned} 0 &= v - v \\ &= (a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) - (b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n) \\ &= (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + (a_n - b_n)v_n. \end{aligned}$$

Eftersom β är linjärt oberoende måste vi då ha $a_i = b_i$ för alla i . Därmed är varje vektor i V en unik linjärkombination av vektorerna i β .

Omvänt, antag att varje vektor i V kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna i β på ett unikt sätt. Då är det klart att $\text{Span}(\beta) = V$ och det återstår att visa att β är linjärt oberoende. Antag motsatsen, dvs att β är linjärt beroende. Då finns det skalärer $a_1, \dots, a_n$ som inte alla är noll, och vektorer $v_1, \dots, v_n \in \beta$ sådana att

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0.$$

Detta innebär att vi kan skriva nollvektorn som en linjärkombination av vektorerna i β på mer än ett sätt, vilket strider mot antagandet att varje vektor i V kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna i β på ett unikt sätt. Därmed är β linjärt oberoende. $\square$

Notera att denna karaktärisering av bas säger att om vi har en ordnad ändlig bas $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ för ett vektorrum V , så kan vi representera varje element i V som en kolumnvektor efter att vi uttryckt den (på det unika sättet) som en linjärkombination av element i β :

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \cdots + a_nv_n \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Detta oss ett sätt att identifiera V med k^n . Vi kommer att göra detta påstående mer precist i Kapitel 4 (Inverterbara avbildningar och basbyte).

Definition 2.7. Låt V vara ett vektorrum över en kropp k och antag att det finns en (ordnad) bas $\beta = \{v_1, v_2, \dots\}$ för V . Vi definierar *koordinatvektorn* av $v \in V$ med avseende på basen β som kolumnvektorn

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

där $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots$ är den unika linjärkombinationen av vektorer i β som ger v (Sats 2.2 [Karaktärisering-av-bas]).

Om β är ändlig med n element: $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, så kan vi identifiera $[v]_\beta$ med ett element i k^n . Om β är oändlig så kan vi identifiera $[v]_\beta$ med ett element i $\{f \in k^\mathbb{N} : f(n) = 0 \text{ för alla utom ändligt många } n \in \mathbb{N}\}$.

Diskussionsfrågor 2.2

- (1) Vad är koordinatvektorn till $(1, 0, 0)$ i basen $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$?
- (2) Vad är koordinatvektorn till $(1, 0)$ i basen $\{(1, 1), (1, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$?
- (3) Vad är koordinatvektorn till $1 + x + x^2$ i basen $\{1, x, x^2\} \subseteq \mathbb{R}[x]$?
- (4) Vad är koordinatvektorn till 1 i basen $\{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\} \subseteq \mathbb{R}[x]$?
- (5) Vad är koordinatvektorn till $i = \sqrt{-1}$ i basen $\{1 + i, 1 - i\} \subseteq \mathbb{C}$ som vektorrum över $\mathbb{R}$?

Sats 2.3 (Maximalt-antal-linjärt-oberoende-vektorer). *Låt V vara ett vektorrum av ändlig dimension över en kropp k . Låt $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ vara en bas för V och låt $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq V$ vara en linjärt oberoende delmängd. Då gäller att $m \leq n$.*

Bevis. Låt $\beta_0 = \beta$. Eftersom $w_1 \in \text{Span}(\beta)$ så finns det ett index $1 \leq i \leq n$ så att $w_1 \in \text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n)$. Låt

$$\beta_1 = \{w_1, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n\}.$$

Då är β_1 en bas för V eftersom $\text{Span}(\beta_1) = \text{Span}(\beta) = V$ och β_1 är linjärt oberoende, vilket följer av att $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n\}$ är linjärt oberoende och w_1 är en linjärkombination av $v_1, v_2, \dots, v_i$. Mycket riktigt, om β_1 skulle vara linjärt beroende så skulle w_1 kunna uttryckas som en linjärkombination av vektorer i β på två olika sätt, vilket av Sats 2.2 är en motsägelse.

För varje $2 \leq i \leq m$, lägg till w_i (som första vektor i en ordnad mängd likt fallet $i = 1$ ovan) till den ordnade basen β_{i-1} och upprepa argumentet ovan. Efter m steg har vi en bas β_m för V med n element, som innehåller $w_1, \dots, w_m$. Dvs $m \leq n$. $\square$

Följdsats 2.4 (Varje-bas-är-lika-stor). *Låt V vara ett vektorrum av ändlig dimension över en kropp k . Då är alla baser för V av samma kardinalitet, det vill säga om β_1 och β_2 är två baser för V , så har β_1 och β_2 samma antal element.*

Definition 2.8. Låt V vara ett vektorrum av ändlig dimension över en kropp k . Dimensionen av V , betecknad $\dim V$, är antalet element i en bas för V . Om V är av oändlig dimension, så skriver vi $\dim V = \infty$.

Sats 2.5 (Delrum-och-dimension). *Låt $W \subseteq V$ vara ett delrum av ett vektorrum V av ändlig dimension. Då gäller följande:*

- (1) *För varje bas $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq W$ så existerar $v_{m+1}, \dots, v_n \in V$ så att $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ är en bas för V .*
- (2) *W är av ändlig dimension och $\dim W \leq \dim V$.*
- (3) *Om $\dim W = \dim V$ så har vi att $W = V$.*

Bevis. Notera att (2) och (3) följer av (1), så det räcker att vi visar (1): Vi har att $\{v_1, \dots, v_m\}$ är linjärt oberoende och om $\text{Span}(v_1, \dots, v_m) \neq V$ så kan vi hitta $v_{m+1} \in V$ sådan att $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\}$ är linjärt oberoende. Itererar vi denna process så hittar vi en bas $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ för V . $\square$

Sats 2.6 (Existens-av-bas). *Varje vektorrum har en bas.*

Bevis. Ändlig dimension: Vi väljer först en vektor $v_1 \in V$. Om $\text{Span}(v_1) \neq V$ så väljer vi $v_2 \in V \setminus \text{Span}(v_1)$. Om $\text{Span}(v_1, v_2) \neq V$ så väljer vi $v_3 \in V \setminus \text{Span}(v_1, v_2)$ osv. Itererar vi denna process så hittar vi en bas $\{v_1, \dots, v_n\}$ för V har ändlig dimension.

Oändlig dimension (ej del av kursen): Detta kräver att Kuratowski–Zorns lemma, vilket säger följande: Låt S vara en partiellt ordnad mängd. Om varje totalt ordnad delmängd av S har en övre gräns i S , så finns det ett maximalt element i S . Detta bör ses som ett axiom, då det visar sig vara ekvivalent med *Urvalsaxiomet (Axiom of Choice)*.

Låt S vara mängden av alla linjärt oberoende delmängder av V . Vi ordnar S med avseende på inklusion, dvs $A \leq B$ om $A \subseteq B$. Låt $A \subseteq S$ vara en totalt

ordnad delmängd av S . Vi påstår att $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ är ett element i S , dvs att $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ är linjärt oberoende. Mycket riktigt, antag att $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$ för $v_1, \dots, v_n \in \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$. Eftersom A är totalt ordnad, så finns det en $\alpha \in A$ sådan att $v_i \in \alpha$ för alla i . Eftersom α är linjärt oberoende, så måste $a_i = 0$ för alla i . Detta visar att $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ är linjärt oberoende. Därmed har vi en övre gräns för A i S , nämligen $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$. Enligt Kuratowski–Zorns lemma finns det ett maximalt element i S , dvs en maximal linjärt oberoende delmängd $B \subseteq V$. Om $\text{Span } B \neq V$ så kan vi hitta $v \in V$ så att $B \cup \{v\}$ är linjärt oberoende, vilket strider mot maximaliteten av B . Därmed är $\text{Span } B = V$ och B är en bas för V . $\square$

Diskussionsfrågor 2.3

- (1) Kan du ge exempel på en bas för $k^{\{0,1\}}$?
- (2) Betrakta funktionen $x^2 + 1: \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av $a \mapsto a^2 + 1$. Kan du skriva $x^2 + 1$ som en linjärkombination av element i din bas från (1)?
- (3) Definiera $L: \mathbb{R}^{\{0,1\}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ genom att skicka f till vektorn $L(f) := (f(0), f(1))$. Vad är $L(x^2 + 1)$ om $x^2 + 1$ definieras som i (2)?
- (4) Om M är en matris med $n + 1$ kolumner vilka är vektorer i k^n , vad kan man säga om $\ker M$ och $\text{im } M$?
- (5) Hur många baser har $k[x]_{\leq 2}$?