3. Linjära avbildningar och matriser

3.1. **Linjära avbildningar.** Det här kapitlet handlar om avbildningar (funktioner) mellan vektorrum som respekterar vektorrumsstrukturen.

Definition 3.1. Låt V och W vara vektorrum över en kropp k. En *linjär avbildning* från V till W är en funktion

$$L\colon V \to W$$

som är:

(1) additiv: $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ för alla $v_1, v_2 \in V$ och
(2) k-linjär: $L(av) = aL(v)$ för all $a \in k$ och alla $v \in V$.

Mängden av alla linjära avbildningar från V till W betecknas $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ eller $\mathcal{L}(V, W)$.

Notera att $L\colon V \to W$ är linjär om och endast om $L(av_1 + v_2) = aL(v_1) + L(v_2)$ för alla $v_1, v_2 \in V$ och $a \in k$. Notera också att om k är en kropp så är $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ ett vektorrum över k med vektorrumsstrukturen given av

$$(L_1 + L_2)(v) = L_1(v) + L_2(v)$$
$$(cL)(v) = cL(v)$$

för alla $L_1, L_2, L \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, $c \in k$ och $v \in V$.

Exempel 3.1. Varje $m \times n$-matris $A = (a_{ij})$ definierar en linjär avbildning $L_A\colon k^n \to k^m$ genom matris-vektor-multiplikation, dvs

$$L_A(v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix},$$

för alla $v \in k^n$. Vi kommer ofta att identifiera en matris A med den linjära avbildning L_A den definierar och skriva A istället för L_A även när vi tänker på A som en linjär avbildning på detta vis.

Diskussionsfrågor

(1) För vilka $a, b, c \in \mathbb{R}$ gäller det att funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ är linjär?
(2) Är $\frac{d}{dx} \colon k[x] \to k[x]$ en linjär avbildning?
(3) Är funktionen
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + b$$
en linjär avbildning från $M_2(k)$ till k?
(4) Är funktionen
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$
en linjär avbildning från $M_2(k)$ till k?

Definition 3.2. Låt $L \colon V \to W$ vara en linjär avbildning. Vi definierar *kärnan* (eller *nollrummet*) som
$$\ker L := \{v \in V : L(v) = 0\}$$
och *bilden* (eller bildrummet) av L som
$$\operatorname{im} L := \{w \in W : w = L(v) \text{ för något } v \in V\}.$$

Sats 3.1 (Noll- och bildrumssatsen). *Låt $L \colon V \to W$ vara en linjär avbildning. Då är $\ker L$ ett delrum av V och $\operatorname{im} L$ är ett delrum av W.*

Bevis. Eftersom L är additiv så är $\ker L$ och $\operatorname{im} L$ båda slutna under addition och eftersom L är k-linjär så är $\ker L$ och $\operatorname{im} L$ båda slutna under skalärmultiplikation. Det återstår att visa att $L(0) = 0$. Detta följer av att $L(-0) = L((-1)0) = -L(0)$ av k-linjäritet och därmed har vi $L(0) = L(0 - 0) = L(0) - L(0) = 0$. □

Dimensionen av bildrummet kallas *rangen* av L och betecknas $\operatorname{rk} L := \dim \operatorname{im} L$.

Sats 3.2 (Injektivitetssatsen). *En linjär avbildning $L \colon V \to W$ är injektiv om och endast om $\ker L = \{0\}$.*

Bevis. Det är klart att $\ker L = \{0\}$ om L är injektiv, så vi bevisar motsatsen. Antag att $\ker L = \{0\}$ och att $L(v) = L(w)$. Då har vi att $L(v - w) = 0$ så $v - w \in \ker L = \{0\}$, dvs $v = w$. $\square$

Sats 3.3 (Dimensionssatsen)**.** *Låt $L\colon V \to W$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum av ändlig dimension. Då gäller att*

$$\dim V = \dim \ker L + \dim \operatorname{im} L\,.$$

Bevis. Låt $\{v_1, \dots, v_m\}$ vara en bas för $\ker L$ och utvidga denna, som i Sats 2.5, till en bas $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ för V. Vi påstår nu att $\{L(v_{m+1}), \dots, L(v_n)\}$ en bas för $\operatorname{im} L$. Mycket riktigt, vi har att $\operatorname{Span}(L(v_{m+1}), \dots, L(v_n)) = \operatorname{im} L$ eftersom $\operatorname{im} L$ spänns upp av $\{L(v_1), \dots L(v_m), L(v_{m+1}), \dots, L(v_n)\}$ och $L(v_i) = 0$ för alla $1 \le i \le m$. Vi behöver nu visa att $\{L(v_{m+1}), \dots, L(v_n)\}$ är linjärt oberoende. Anta att

$$a_{m+1}L(v_{m+1}) + \cdots + a_n L(v_n) = 0\,.$$

Av linjäritet har vi då att

$$L(a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_n v_n) = 0\,,$$

dvs $a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_n v_n \in \ker L$. Men $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ är linjärt oberoende så $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$. Därmed är $\{L(v_{m+1}), \dots, L(v_n)\}$ linjärt oberoende. Vi har därmed visat att

$$\dim \ker L + \dim \operatorname{im} L = m + (n - m) = n = \dim V\,. \qquad \square$$

Sats 3.4 (Bijektionssatsen)**.** *Låt $L\colon V \to W$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum* av samma (ändlig) dimension*. Följande är ekvivalent:*

(1) L är surjektiv,
(2) L är injektiv,
(3) L är en bijektion.

Bevis. Av dimensionssatsen har vi att $\dim V = \dim \ker L + \dim \operatorname{im} L$. Om L är surjektiv så är $\operatorname{im} L = W$ och därmed $\dim \operatorname{im} L = \dim W = \dim V$, vilket ger $\dim \ker L = 0$ och därmed att L är injektiv. Omvänt, om L är injektiv så har vi $\dim \ker L = 0$ och därmed $\dim \operatorname{im} L = \dim V$, vilket ger att L är surjektiv. Därmed är L en bijektion. $\square$

Övning

Låt V och W vara vektorrum och antag att β är en bas för V. Visa att varje linjär avbildning $L\colon V \to W$ är unikt bestämd av värdena $L(v)$ för alla $v \in \beta$.

3.2. **Matriser.** Linjära avbildningar kan representeras med matriser så fort man valt baser för vektorrummen i fråga. Vi börjar med att definiera vad en matris är.

Definition 3.3. En *matris* (eller mer specifikt en $m \times n$-matris) över en kropp k är en 2-dimensionell lista:

$$A = (a_{ij}) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vi skriver också $A_{ij} := a_{ij}$, dvs $(a_{ij})_{st} = a_{st}$.

Definition 3.4. Låt $L\colon V \to W$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum av ändlig dimension n respektive m. Antag att vi fixerat *ordnade* baser $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ och $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\} \subseteq W$. Vi definierar matrisen $[L]_\alpha^\beta \in M_{m\times n}(k)$ genom att sätta

$$[L]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [L(v_1)]_\beta & [L(v_2)]_\beta & \cdots & [L(v_n)]_\beta \end{pmatrix},$$

där $L(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i$ för alla $1 \leq j \leq n$ och $1 \leq i \leq m$. Matrisen $[L]_\alpha^\beta$ kallas *matrisrepresentationen* av L med avseende på baserna α och β.

Exempel 3.2. Varje vektor $v \in V$ kan ses som en linjär avbildning $L_v\colon k \to V$ definierad av $L_v(a) = av$. Om vi fixerar en bas $\beta = \{v_1, \ldots, v_m\}$ för V så är matrisrepresentationen av L_v med avseende på standardbasen ε för k och basen β

givet av

$$[L_v]_\varepsilon^\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

där $v = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$. Dvs, matrisrepresentationen av v är precis koordinatvektorn för v med avseende på basen β: $[L_v]_\varepsilon^\beta = [v]_\beta$.

Sats 3.5 (Matrissatsen)**.** *Låt V och W vara vektorrum över en kropp k med ändlig dimension n respektive m och antag att vi fixerat* ordnade *baser $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ och $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\} \subseteq W$. Avbildningen som ges av*

$$[-]_\alpha^\beta \colon \operatorname{Hom}_k(V, W) \to M_{m\times n}(k)$$
$$L \mapsto [L]_\alpha^\beta$$

är en isomorfi av vektorrum över k.

Bevis. Varje linjär avbildning L bestäms unikt av hur den avbildar basvektorerna i α, eftersom om $v \in V$ är en linjärkombination $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ så är

$$L(v) = L(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1L(v_1) + \cdots + c_nL(v_n)\,.$$

Å andra sidan, varje matris $A \in M_{m\times n}(k)$ bestäms unikt av sina kolumner, dvs av hur den avbildar basvektorerna i α. Vi har därmed att $[-]_\alpha^\beta$ är en bijektion.

Det återstår att visa att Φ är linjär, dvs additiv och k-linjär. För varje basvektor v_j, $L_1, L_2 \in \operatorname{Hom}_k(V, W)$ och $c \in k$ har vi att

$$(cL_1 + L_2)(v_j) := cL_1(v_j) + L_2(v_j) = \sum_i (ca_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)})w_i\,.$$

Det vill säga

$$[cL_1 + L_2]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} ca_{11}^{(1)} + a_{11}^{(2)} & ca_{12}^{(1)} + a_{12}^{(2)} & \ldots & ca_{1n}^{(1)} + a_{1n}^{(2)} \\ ca_{21}^{(1)} + a_{21}^{(2)} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ ca_{m1}^{(1)} + a_{m1}^{(2)} & \ldots & & ca_{mn}^{(1)} + a_{mn}^{(2)} \end{pmatrix} = c[L_1]_\alpha^\beta + [L_2]_\alpha^\beta\,.$$

□

3.3. **Sammansättning av linjära avbildningar.** Precis som med funktioner i allmänhet kan vi definiera sammansättning av linjära avbildningar.

Definition 3.5. Låt V, W och Z vara vektorrum över en kropp k. Om $L\colon V \to W$ och $M\colon W \to Z$ är linjära avbildningar så definierar vi *sammansättningen* (eller *kompositionen*) av L och M enligt $ML(v) := M(L(v))$.

Övning

Låt V, W och Z vara vektorrum över en kropp k. Visa att om $L\colon V \to W$ och $M\colon W \to Z$ är linjära avbildningar så är $ML\colon V \to Z$ en linjär avbildning.

Vi ska nu visa att sammansättning av linjära avbildningar (representerade av matriser) motsvarar *multiplikation* av matriser.

Definition 3.6. Om $A = (a_{ij})$ är en $m \times n$-matris och $B = (b_{st})$ är en $n \times p$-matris så definieras produkten AB genom $(AB)_{it} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{st}$.

Övning

Om A och B är två matriser, sådana att AB är definierad, visa att $(AB)^T = B^T A^T$.

Sats 3.6 (Matrisen-till-en-sammansättning)**.** *Låt V, W och Z vara vektorrum över en kropp k med ändlig dimension n, m respektive p. Antag att $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ är en bas för V, $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$ är en bas för W och $\gamma = \{z_1, \ldots, z_p\}$ är en bas för Z. Om $L\colon V \to W$ och $M\colon W \to Z$ är linjära avbildningar så gäller att*

$$[ML]_\alpha^\gamma = [M]_\beta^\gamma [L]_\alpha^\beta .$$

Bevis. Låt $B = [L]_\alpha^\beta$ och $A = [M]_\beta^\gamma$. Vi vill visa att $[ML]_\alpha^\gamma = AB$ (titta noga på ordningen). Det räcker att visa hur ML avbildar basvektorerna i α. Vi har att $ML(v_t) = M(L(v_t)) = M\left(\sum_{s=1}^{m} b_{st} w_s\right) = \sum_{s=1}^{m} b_{st} M(w_s) = \sum_{s=1}^{m} \left(b_{st} \sum_{i=1}^{p} a_{is} z_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{st}\right) z_i$. Dvs, det ite elementet i $[ML]_\alpha^\gamma$ är $\sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{st}$ vilket är detsamma som $(AB)_{it}$. Därmed har vi visat att $[ML]_\alpha^\gamma = AB$. $\square$

Följdsats 3.7. *Låt V och W vara vektorrum över en kropp k med ändlig dimension n respektive m. Antag att α är en ordnad bas för V och β en ordnad bas för W. För varje $v \in V$ gäller då att*

$$[L]_\alpha^\beta [v]_\alpha = [L(v)]_\beta \,.$$

Bevis. Vi kan se vektorn v som en linjär avbildning från k till V genom att skicka $1 \mapsto v$. Om vi tar basen $\varepsilon = \{1\}$ för k som vektorrum över sig självt har vi då att $[v]_\alpha = [v]_\varepsilon^\alpha$ och att $[L(v)]_\beta = [L(v)]_\varepsilon^\beta$. Vi har därmed av [Matrisen-till-en-sammansättning] Sats 3.6 att

$$[L]_\alpha^\beta [v]_\varepsilon^\alpha = [L \circ v]_\varepsilon^\beta = [L(v)]_\beta \,. \qquad \square$$