4. Inverterbara avbildningar och basbyte

I detta kapitel ska vi studera hur vi kan byta bas i ett vektorrum och hur detta förhåller sig till inverterbara avbildningar. Vi kommer att se att varje basbyte motsvarar en inverterbar avbildning, och att varje inverterbar avbildning från ett vektorrum till sig självt kan representeras som ett basbyte.

4.1. **Inverterbara avbildningar.** Vi ska nu se att om en surjektiv linjär avbildning har en vänsterinvers så är även den linjär. I synnerhet är inversen (som mängdteoretisk funktion) automatiskt linjär.

Sats 4.1 (Inversen-är-linjär)**.** *Låt $L\colon V \to W$ vara en surjektiv linjär avbildning mellan två vektorrum över en kropp k. Antag att det finns en* funktion $f\colon W \to V$ *sådan att $f \circ L = I_V$. Då är f linjär och $L \circ f = I_W$. I synnerhet är L en bijektion.*

Bevis. Antag att vi har $w_1, w_2 \in W$ och $c \in k$. Vi vill visa att $f(cw_1 + w_2) = cf(w_1) + f(w_2)$. Eftersom L är surjektiv så finns det $v_1, v_2 \in V$ så att $L(v_1) = w_1$ och $L(v_2) = w_2$. Vi har då att

$$\begin{aligned} f(cw_1 + w_2) &= f(cL(v_1) + L(v_2)) \\ &= f(L(cv_1 + v_2)) \\ &= (f \circ L)(cv_1 + v_2) \\ &= I_V(cv_1 + v_2) \\ &= cv_1 + v_2 \\ &= c(f \circ L)(v_1) + (f \circ L)(v_2) \\ &= cf(w_1) + f(w_2)\,. \end{aligned}$$

Vi har därmed visat att f är linjär. Då L är surjektiv kan varje $w \in W$ skrivas som $w = L(v)$ för något $v \in V$, vilket ger att $(L \circ f)(w) = (L \circ f)(L(v)) = L((f \circ L)(v)) = L(v) = w$. Därmed är $L \circ f = I_W$. □

Exempel 4.1. Låt V vara vektorrummet av alla polynom i variabeln x med koefficienter i k. Låt $L_1 = \frac{d}{dx}\colon V \to V$ vara avbildningen som skickar ett polynom till dess derivata. Då är L_1 linjär och surjektiv. Låt $L_2 = \int_0^x\colon V \to V$ vara avbildningen $L_2(p(x)) = \int_0^x p(t)\,dt$, vilken är linjär och injektiv. Då har vi att $L_1 \circ L_2 = I_V$ men $L_2 \circ L_1 \neq I_V$.

Definition 4.1. En linjär avbildning L som är både injektiv och surjektiv kallas för en *isomorfi*. Om $L\colon V \to W$ är en isomorfi så säger vi att V och W är *isomorfa* och skriver $V \cong W$.

Notera att om $L\colon V \to W$ är en isomorfi så kan vi definiera $L^{-1}\colon W \to V$ genom $L^{-1}(w) = v$ om och endast om $L(v) = w$. Då säger Sats 4.1 att L^{-1} är linjär och vi kallar L^{-1} för *inversen* till L. Vi kommer därför att använda begreppen *inverterbar* och *isomorfi* synonymt.

Exempel 4.2. Avbildningen $(-)^T\colon M_{m\times n}(k) \to M_{n\times m}(k)$ som skickar en matris $A = (a_{ij})_{i,j}$ till sitt transponat $A^T = (a_{ji})_{i,j}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

är en isomorfi.

Sats 4.2 (Trivialitetssatsen)**.** *Låt V vara ett vektorrum av ändlig dimension över en kropp k. Då har vi $V \cong k^n$. Mer specifikt, vi har en bijektion mellan mängden av alla ordnade baser för V och mängden isomorfier $V \cong k^n$.*

Bevis. Låt $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ vara en ordnad bas för V. Vi definierar en avbildning $L_\beta\colon V \to k^n$ på basvektorerna genom $L_\beta(v_i) = e_i$, där e_i är standardbasvektorerna i k^n. Vi kan sedan utvidga linjärt till hela V. Dvs om $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ så sätter vi $L_\beta(v) = \sum_{i=1}^n a_i e_i$. Då är L linjär per definition. Den är surjektiv eftersom standardbasen ligger i bilden och den är injektiv eftersom $L_\beta(v) = 0$ om och endast om alla $a_i = 0$, vilket är sant om och endast om $v = 0$. Alltså är L_β en isomorfi. Detta ger en avbildning $\beta \mapsto L_\beta$ från mängden av alla ordnade baser för V till mängden isomorfier $V \to k^n$. Omvänt, låt $L\colon V \to k^n$ vara en isomorfi. Då är $\beta_L := \{L^{-1}(e_1), \ldots, L^{-1}(e_n)\}$ en ordnad bas för V. Detta ger en avbildning från mängden isomorfier $V \to k^n$ till mängden av alla ordnade baser för V. Det är lätt att se att dessa två avbildningar är inverser till varandra, vilket ger en bijektion mellan mängden av alla ordnade baser för V och mängden isomorfier $V \to k^n$. $\square$

Följdsats 4.3. *Två ändligt-dimensionella vektorrum V och W över en kropp k är isomorfa om och endast om de har samma dimension.*

Detta säger alltså att för varje positivt heltal n så finns det *upp till isomorfi* precis ett vektorrum av dimension n över en kropp k.

Diskussionsfrågor 4.1

Vilka av följande vektorrum är isomorfa?

(1) 2×2-matriser med reella koefficienter.
(2) $\mathbb{C}^2$ som vektorrum över $\mathbb{R}$, där modulstrukturen $r(z_1, z_2) = (rz_1, rz_2)$ för alla $r \in \mathbb{R}$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ och komponentvis addition.
(3) $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ som vektorrum över $\mathbb{R}$, dvs mängden av alla reella polynom av grad högst 3.

Lemma 4.4. *Låt $L\colon V \to W$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum av ändlig dimension med ordnade baser $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ respektive $\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$. Låt vidare $A\colon V \to k^n$ och $B\colon W \to k^m$ vara de isomorfier som bestäms av $v_i \mapsto e_i$ respektive $w_j \mapsto e_j$, där e_i är standardbasvektorerna i k^n respektive k^m. Då har vi ett kommutativt diagram*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "A", "\cong"'] & W \arrow[d, "B", "\cong"'] \\ k^n \arrow[r, "{[L]_\alpha^\beta}"] & k^m , \end{tikzcd}$$

vilket betyder att $[L]_\alpha^\beta \circ A = B \circ L$.

Bevis. Detta är bokstavligen Följdsats 3.7 eftersom A skickar v på koordinatvektorn $[v]_\alpha$. $\square$

Sats 4.5. *Låt V och W vara två ändligt-dimensionella vektorrum över en kropp k och låt α och β vara ordnade baser för V respektive W. Låt $L\colon V \to W$ vara en* *linjär avbildning. Då har vi ett kommutativt diagram med isomorfier som indikerat nedan:*

$$\begin{tikzcd} \ker L \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{im} L \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & W \arrow[d, "\cong"] \\ \ker [L]_\alpha^\beta \arrow[r] & k^n \arrow[r, "[L]_\alpha^\beta"] & \operatorname{im} [L]_\alpha^\beta \arrow[r] & k^m . \end{tikzcd}$$

Bevis. Detta följer direkt av Lemma 4.4. □

Följdsats 4.6. *Låt V och W vara två ändligt-dimensionella vektorrum över en kropp k och låt α och β vara ordnade baser för V respektive W. Låt $L\colon V \to W$ vara en linjär avbildning. Då är L en isomorfi om och endast om matrisen $[L]_\alpha^\beta$ är inverterbar. I detta fall har vi $[L^{-1}]_\beta^\alpha = ([L]_\alpha^\beta)^{-1}$.*

Bevis. Av Lemma 4.4 har vi ett kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\cong"] & W \arrow[d, "\cong"] \\ k^n \arrow[r, "[L]_\alpha^\beta"] & k^m \end{tikzcd}$$

vilket direkt ger oss att $[L]_\alpha^\beta$ är inverterbar om och endast om L är en isomorfi. □

4.2. **Basbyte.** Givet två ordnade baser α och β för ett ändligt-dimensionellt vektorrum V så såg vi i Kapitel 2 att α och β har samma antal element $\dim V$. Notera att om $V = W$ i Matrissatsen (Sats 3.5) så kommer identiteten $I_V : V \to V$ att avbildas på identitetsmatrisen om och endast om $\alpha = \beta$ som ordnade baser.

Definition 4.2. Matrisen $[I_V]_\alpha^\beta$ kallas *basbytesmatrisen* från α till β.

Basbytesmatrisen $[I_V]_\alpha^\beta$ hjälper oss alltså att uttrycka basen α i termer av basen β. Mycket riktigt, per definition har vi att

$$[I_V]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} [v_1]_\beta & [v_2]_\beta & \cdots & [v_n]_\beta \end{pmatrix},$$

där $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Sats 4.7 (Basbyte)**.** *Låt V vara ett vektorrum över en kropp k med ändlig dimension n. Låt α och β vara två ordnade baser för V. Då har vi att basbytesmatrisen $[I_V]^\beta_\alpha$ är inverterbar med invers $[I_V]^\alpha_\beta$ och för varje $v \in V$ gäller det att $[I_V]^\beta_\alpha [v]_\alpha = [v]_\beta$.*

Bevis. Vi har $[I_V]^\beta_\alpha [I_V]^\alpha_\beta = [I_V]^\alpha_\alpha$ vilket är identitetsmatrisen. Det sista påståendet följer direkt från Följdsats 3.7. $\square$

Diskussionsfrågor 4.2

(1) (**Jätteviktig!**) Vad är basbytesmatrisen från en given bas $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq k^n$ till standardbasen för k^n?

(2) Vad är basbytesmatrisen mellan följande baser för $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}?$$

Tips: använd lösningen till (1).

Exempel 4.3. Låt V vara vektorrummet av alla polynom i variabeln x med koefficienter i $\mathbb{R}$ av grad högst 2. Låt $\alpha = \{2 - x + 3x^2, x + x^2, 1 + 4x^2\}$ och $\beta = \{1 - x^2, x + 1, 1\}$. Vi vill nu bestämma basbytesmatrisen $[I_V]^\beta_\alpha$. Ett sätt att göra detta är att först bestämma $[I_V]^\varepsilon_\alpha$ och $[I_V]^\varepsilon_\beta$. Vi har

$$[I_V]^\varepsilon_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad [I_V]^\varepsilon_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu hitta $[I_V]^\beta_\alpha$ genom $[I_V]^\beta_\alpha = [I_V]^\beta_\varepsilon [I_V]^\varepsilon_\alpha = ([I_V]^\varepsilon_\beta)^{-1}[I_V]^\varepsilon_\alpha$. Vi hittar $([I_V]^\varepsilon_\beta)^{-1}$ genom radoperationer:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Vi får då

$$([I_V]^\varepsilon_\beta)^{-1}[I_V]^\varepsilon_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vi kan kontrollera att detta stämmer genom att notera att

$$\begin{aligned} 2 - x + 3x^2 &= -3 \cdot (1 - x^2) - 1 \cdot (x+1) + 6 \cdot (1) \\ x + x^2 &= -1 \cdot (1 - x^2) + 1 \cdot (x+1) + 0 \cdot (1) \\ 1 + 4x^2 &= -4 \cdot (1 - x^2) + 0 \cdot (x+1) + 5 \cdot (1). \end{aligned}$$