

Senast uppdaterad: 16 september 2025

5. Matrisoperationer och linjära ekvationssystem

Detta kapitel handlar om hur vi kan förenkla ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

med hjälp av tre typer av *elementära operationer*, för att få dem i en enklare form som är lättare att lösa. Dessa operationer är:

- (1) *Radbyte*: Byt plats på ekvationer.
- (2) *Radmultiplikation*: Multiplicera en ekvation med en nollskild skalär.
- (3) *Radaddition*: Addera en multipel av en ekvation till en annan ekvation.

Notera att dessa operationer är inverterbara och att den inversa operationen också är av denna elementära form.

5.1. Elementära matrisoperationer. Vi ska nu definiera de grundläggande elementära operationerna:

Definition 5.1. En *elementär matrisoperation* är en av följande operationer som kan utföras på en matris:

- (1) *Rad(Kolumn)-byte*: Byt plats på två rader (kolumner) i en matris.
- (2) *Rad(Kolumn)-multiplikation*: Multiplicera en rad (kolumn) i en matris med en nollskild skalär.
- (3) *Rad(Kolumn)-addition*: Addera en multipel av en rad (kolumn) till en annan rad (kolumn).

Vi kallar också dessa operationer *radoperationer* eller *kolumnoperationer* beroende på om de utförs på rader eller kolumner.

Definition 5.2. En *elementär matris av typ (1), (2) eller (3)* är en matris som fås genom att utföra motsvarande typ av elementär matrisoperation på en identitetsmatris.

Notera att varje elementär matris är inverterbar och att den inversa matrisen är en elementär matris av samma typ.

Exempel 5.1 (Typ 1). Matrisen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

är en elementär matris av typ (1) eftersom vänstermultiplikation med E byter rad 2 och 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix},$$

och högermultiplikation med E byter kolumn 2 och 3:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{pmatrix}.$$

Exempel 5.2 (Typ 2). Matrisen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

är en elementär matris av typ (2) eftersom vänstermultiplikation med E multiplicerar rad 2 med 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

och högermultiplikation med E multiplicerar kolumn 2 med 2:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{pmatrix}.$$

Exempel 5.3 (Typ 3). Matrisen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

är en elementär matris av typ (3) eftersom vänstermultiplikation med E adderar 2 gånger rad 3 till rad 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

och högermultiplikation med E adderar 2 gånger kolumn 2 till kolumn 3:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c+2b \\ d & e & f+2e \\ g & h & i+2h \end{pmatrix}.$$

Sats 5.1 (Radoperationer). *Låt A vara en matris och B en matris som erhålls från A genom en rad(kolumn)operation. Då har vi att $B = EA$ ($B = AE$) där E är matrisen som fås genom att utföra den elementära matrisoperationen på identitetsmatrisen av samma dimension som antalet rader (kolumner) i A . Å andra sidan, vänster(höger)multiplikation med en elementär matris E på en matris A motsvarar att utföra den elementära matrisoperationen på A .*

Bevis. Övning.

□

5.2. Matrisrang. Ett specialfall av matrissatsen (Sats 3.5) är att

$$M_{n \times n}(k) \cong \text{Hom}_k(k^n, k^n),$$

dvs, varje $n \times n$ -matris över en kropp k svarar mot en linjär avbildning från k^n till k^n , nämligen den linjära avbildning som ges av vänstermultiplikation med matrisen. Vi kan därmed tala om matriser som linjära avbildningar och vi kan tala om bildrummet, nollrummet och rangen av en matris, vilka vi betecknar som $\text{im } A$, $\text{ker } A$ och $\text{rk } A$.

Sats 5.2 (Matrisrangs-satsen). *Låt A vara en matris över en kropp k . Då är $\text{rk } A$ lika med dimensionen av rummet som spänns upp av kolumnvektorerna i A .*

Bevis. Detta följer av att bilden av standardbasen i k^n (vilken spänner upp $\text{im } A$) är precis kolumnerna i A . $\square$

Sats 5.3 (Trivial-form). *Låt A vara en $m \times n$ -matris av rang r över en kropp k . Då finns det elementära matriser $E_1, E_2, \dots, E_l$ och $E_{1'}, \dots, E_{l'}$ för några $l, l' \geq 0$ sådana att*

$$E_l E_{l-1} \cdots E_1 A E_{1'} E_{2'} \cdots E_{l'} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

där 0 betecknar nollmatriser av lämplig storlek.

Bevis. Vi använder induktion över m . Basfallet $m = 1$ är trivialt. Anta nu att satsen gäller för $m - 1$. Vi visar att den också gäller för m . Om $\text{rk } A = 0$ så är A en nollmatris och det finns inget att bevisa. Anta nu att $\text{rk } A > 0$. Då finns det ett icke-noll element i A , låt oss säga A_{ij} . Först använder vi en radoperation av typ (2) för att göra $A_{ij} = 1$ (om det inte redan är 1). Sedan använder vi rad- och kolumnoperationer av typ (1) för att flytta denna etta till index $(1, 1)$. Slutligen använder vi rad- och kolumnoperationer av typ (3) för att nollställa alla andra element i den första raden och den första kolumnen. Detta ger oss en matris av formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Nu kan vi applicera induktionsantagandet på den nedre delen av matrisen, dvs den del som inte innehåller den första raden och kolumnen. Slutresultatet blir då en matris i önskad form. $\square$

Följdsats 5.4 (Elementär-generering). *Varje inverterbar matris A över en kropp k kan skrivas som produkten av elementära matriser, dvs det finns elementära matriser $E_1, E_2, \dots, E_l$ sådana att*

$$A = E_l E_{l-1} \cdots E_1.$$

Notera att detta innebär att vi hittar inversen av A enligt följande procedur: Skriv A^{-1} som produkten av elementära matriser $E'_1, E'_2, \dots, E'_{l'}$. Denna produkt är ej unik utan det finns många olika sätt att skriva A^{-1} på detta sätt. Vi har $A^{-1}A = I$ och $A^{-1}I = A^{-1}$. Med andra ord, om vi utför radoperationer steg för steg på A och I

samtidigt, så kommer vi ha transformerat I till A^{-1} vid det laget då vi transformerat A till I .

Följdsats 5.5. Låt A vara en $m \times n$ -matris av rang r över en kropp k . Då finns en inverterbar matris B av storlek $m \times m$ och en matris C av storlek $n \times n$ sådana att

$$BAC = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Följdsats 5.6 (Rad-och-kolumnrang). Låt A vara en $m \times n$ -matris över en kropp k . Då har vi att följande tal är samma:

- (1) $\text{rk } A$,
- (2) $\text{rk } A^T$,
- (3) dimensionen av vektorrummet som spänns upp av kolumnerna i A ,
- (4) dimensionen av vektorrummet som spänns upp av raderna i A .

Följdsats 5.7 (Inverterbarhet-och-rang). Låt A vara en $n \times n$ -matris över en kropp k . Då är A inverterbar om och endast om $\text{rk } A = n$.

Diskussionsfrågor

- (1) Vad är dimensionen av bildrummet och nollrummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}?$$

- (2) Är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

inverterbar?

5.3. Lösningar till linjära ekvationssystem. Vi ska nu se hur vi kan tillämpa våra resultat för att lösa linjära ekvationssystem.

Definition 5.3. Ett system $Ax = b$ av linjära ekvationer kallas *homogent* om $b = 0$ och *inhomogent* om $b \neq 0$.

Sats 5.8 (Lösningssmängden). *Betrakta ett system $Ax = b$ där A är en $m \times n$ -matris över en kropp k . Om $b = 0$ så har systemet alltid minst en lösning, nämligen $x = 0$. Om s är en lösning till systemet, så är lösningssmängden till systemet*

$$\{s + v \mid v \in \ker A\}.$$

Bevis. Om $v \in \ker A$ så har vi $A(s + v) = As + Av = b + 0 = b$. Å andra sidan, om s' är en lösning till systemet så har vi att $s - s' \in \ker A$ och $s' = s + (s' - s)$. $\square$

Sats 5.9. *Betrakta ett system $Ax = b$ där A är en $m \times n$ -matris över en kropp k .*

- (1) *Om $\text{rk } A = \text{rk}(A|b) = n$ så har systemet en unik lösning.*
- (2) *Om $\text{rk } A = \text{rk}(A|b) < n$ så har systemet oändligt många lösningar.*
- (3) *Om $\text{rk } A < \text{rk}(A|b)$ så har systemet inga lösningar.*

Bevis. Detta följer av att $\text{rk } A = \text{rk}(A|b)$ om och endast om b kan skrivas som en linjärkombination av kolumnerna i A , dvs $\text{im } A$, och av att $\dim \ker A > 0$ om och endast om $\text{rk } A < n$ (Dimensionssatsen). $\square$

5.4. Gausseliminering. Vi ska nu beskriva en algoritm som kallas *Gausseliminering* för att lösa linjära ekvationssystem. Denna metod använder elementära matriser och radoperationer för att förenkla ett system till en form som är lättare att lösa.

Definition 5.4. Två linjära ekvationssystem $Ax = b$ och $A'x = b'$ sägs vara *ekvivalenta* om de har samma lösningssmängd, dvs om varje lösning till det ena systemet är en lösning till det andra systemet.

Sats 5.10. *Om $Ax = b$ är ett linjärt ekvationssystem och B är en inverterbar matris, så är $BAx = Bb$ ett ekvivalent system till $Ax = b$.*

Bevis. Övning. $\square$

Exempel 5.4. Systemen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

är ekvivalenta eftersom den andra matrisen fås genom att vänstermultiplicera den första matrisen med den inverterbara matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Med andra ord kan vi använda elementära radoperationer för att transformera ett system till ett ekvivalent system som är lättare att lösa.

Definition 5.5. En matris A sägs vara i (*reducerad*) *trappstegsform* om den har följande egenskaper:

- (1) Alla nollrader (om några) ligger längst ner i matrisen.
- (2) Den första nollskilda elementet (pivoten) i varje rad är lika med 1 och ligger till höger om den första icke-nollkolumnen i raden ovanför.
- (3) Om en kolumn innehåller en pivot, så är alla andra element i den kolumnen noll.

Exempel 5.5. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

är i reducerad trappstegsform eftersom den uppfyller alla tre egenskaperna ovan.

Sats 5.11 (Reducerad-trappstegsform). *Låt A vara en $m \times n$ -matris av rang r över en kropp k . Då finns det elementära matriser $E_1, E_2, \dots, E_l$ för något $l \geq 0$ sådana att $E_l E_{l-1} \cdots E_1 A$ är i reducerad trappstegsform.*

Bevis. Vi använder induktion över m . Basfallet $m = 1$ är trivialt. Anta nu att satsen gäller för matriser med $m - 1$ rader eller färre. Vi väljer nu första nollskilda kolumnen och väljer en rad med ett icke-nollelement i denna kolumn. Använd nu en elementär matris för att flytta denna rad till den första raden. Använd sedan en elementär matris för att göra pivoten till 1 (om den inte redan är 1). Använd sedan elementära matriser för att nollställa alla andra element i denna kolumn. Detta ger oss en matris av formen

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Nu kan vi applicera induktionsantagandet på den nedre delen av matrisen, dvs den del som inte innehåller den första raden. När vi skrivit den nedre matrisen i reducerad trappstegsform, så kan vi slutligen eliminera alla element ovanför pivoterna i den första kolumnen med hjälp av elementära matriser. Slutresultatet blir då en matris i reducerad trappstegsform. $\square$

Definition 5.6. Metoden vi använder i beviset ovan kallas för *Gausselimination* eller *radreduktion*.

Exempel 5.6. Betrakta systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi kan använda Gausseliminering för att förenkla detta system:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 4 & 5 & 6 & | & 2 \\ 7 & 8 & 9 & | & 3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R2-4R1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -3 & -6 & | & -2 \\ 7 & 8 & 9 & | & 3 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R3-7R1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -3 & -6 & | & -2 \\ 0 & -6 & -12 & | & -4 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R3-2R2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -3 & -6 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{-3^{-1}R2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R1-2R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Diskussionsfrågor

- (1) Vad är dimensionen av lösningsmängden till systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ?$$

- (2) Använd Gausseliminering för att lösa systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Referenser

- [FIS03] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence, *Linear algebra.*, 4th. ed. (international) ed., Pearson, 2003 (English).