Senast uppdaterad: 19 september 2025

6. Determinanter

Innan vi definierar determinanter i full generalitet, betrakta följande exempel: Antag att vi har en 2×2-matris

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

och vi vill veta om A är inverterbar, dvs. om det finns en matris B sådan att $AB = I$, där I är identitetsmatrisen. Dvs, vi vill lösa ekvationen

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\,.$$

Knepet är att definiera en funktion vi kallar *determinanten*:

$$\begin{aligned} \det\colon M_{2\times 2}(k) &\to k, \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \det(A) := ad - bc\,. \end{aligned}$$

Notera att $\det(AB) = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) = (ad-bc)(eh-fg) = \det(A)\det(B)$, vilket visar att determinanten har den önskade egenskapen att den är *multiplikativ*. Detta innebär att om $AB = I$ så måste $\det(A)\det(B) = \det(I) = 1$, dvs. $\det(A) \neq 0$. Å andra sidan, om $\det(A) \neq 0$, så kan vi lösa ekvationen $AB = I$ genom att sätta

$$B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\,,$$

vilket ger oss $AB = I$. Med andra ord, A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$.

6.1. **Definition av determinanter.** Låt oss nu generalisera denna definition till $n \times n$-matriser. Vi kommer först att definiera funktioner $D_i, D_i^T\colon M_{n\times n}(k) \to k$ för varje $1 \leq i \leq n$ och sedan visa att de är lika, dvs. att $D_i = D_i^T$ och att de ej beror på i.

Definition 6.1. Låt $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(k)$ vara en $n \times n$-matris. För varje $1 \leq i, j \leq n$ definierar vi $\widehat{A}_{ij}$ som den $(n-1) \times (n-1)$-matris som fås genom att ta bort rad i och kolumn j från A. För $n = 1$ definierar vi $D_1(A) = D_1^T(A) = a_{11}$.

För $n \geq 2$ definierar vi

$$D_i(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_1(\widehat{A}_{ij})\,,$$

och

$$D_i^T(A) = D_i(A^T)\,.$$

Slutligen definierar vi determinanten av A som

$$\det(A) = D(A) = |A| = D_1(A)\,.$$

Sats 6.1 (Multilinjäritet)**.** *Funktionen* $\det\colon M_{n\times n}(k) \to k$ *är linjär i varje rad (och varje kolumn), dvs. om* $A \in M_{n\times n}(k)$ *har formen:*

$$A = \begin{pmatrix} \overline{a}_1^T \\ \vdots \\ \overline{a}_i^T + c\overline{b}_i^T \\ \vdots \\ \overline{a}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + cb_{i1} & a_{i2} + cb_{i2} & \cdots & a_{in} + cb_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\left(A = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 & \cdots & \overline{a}_i + c\overline{b}_i & \cdots & \overline{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} + cb_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} + cb_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} + cb_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

för något $c \in k$ *så gäller att*

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\left(\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

Bevis. Vi använder induktion över n. Basfallet $n = 1$ är trivialt. Antag att $n > 1$ och att påståendet gäller för $(n-1) \times (n-1)$-matriser. Antag att A och B är identiska förutom i rad i. Om $i = 1$ så har vi

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} (a_{1j} + cb_{1j}) \det(\widehat{A}_{1j}),$$

eftersom $\widehat{A}_{1j}$ inte ändras då vi ändrar rad 1 i A. Om $i > 1$ så har vi

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\widehat{A}_{1j}).$$

och enligt induktionsantagandet gäller så har vi

$$\det(\widehat{A}_{1j}) = \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$+ c \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{i(j-1)} & b_{i(j+1)} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Detta ger att

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Det återstår att bevisa linjäritet i varje kolumn. Fallet $n = 1$ är igen trivialt. Antag att $n > 1$ och att påståendet gäller för $(n-1) \times (n-1)$-matriser. Antag att A och B är identiska förutom i kolumn l. Vi har

$$\det(A) = (a_{1l} + cb_{1l}) \det(\widehat{A}_{1l}) + \sum_{j \neq l} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\widehat{A}_{1j}),$$

och av induktionsantagandet gäller

$$\det(\widehat{A}_{1j}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$+ c \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1l} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2l} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nl} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

om $j \neq l$. Det följer att

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2l} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Vi har därmed visat att det är linjär i varje rad och varje kolumn. □

Exempel 6.1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi kan uttrycka andra kolumnen som $2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ och verifiera multilinjariteten genom att beräkna

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2\det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} + 2\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Följdsats 6.2 (Determinant-med-nollrad)**.** *Om A är en $n \times n$-matris med en rad eller en kolumn består enbart av nollor, så är* $\det(A) = 0$.

Bevis. Övning. □

Sats 6.3 (Kofaktorutveckling-längs-en-rad)**.** *Låt $A \in M_{n\times n}(k)$ vara en $n \times n$-matris. Då gäller att*
$$\det(A) = D_i(A)$$
för alla $1 \le i \le n$.

Bevis. Vi kan anta att $n \ge 2$ eftersom fallet $n = 1$ är trivialt. Fallet $i = 1$ är klart per definition så vi antar också att $i > 1$. Skriv radvektor i som en linjärkombination $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$ där e_j är vektorn med 1 i position j och nollor annars. Då har vi av multilinjäritet (Sats 6.1) att

$$D_1(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det(A(ij))$$

där $A(ij)$ är matrisen vi får genom att byta ut $i$te raden i A mot basvektorn e_j. Vi behöver därför visa att $\det(A(ij)) = (-1)^{i+j}\det(\widehat{A}_{ij})$. Vi använder induktion över n. Basfallet $n = 2$ är enkelt att visa, vilket vi lämnar som övning. Antag nu att $n > 2$ och att påståendet är sant för $(n-1) \times (n-1)$-matriser. Notera först att

$$\det(\widehat{A}_{ij}) = \sum_{l=1}^{j-1}(-1)^{1+l}a_{1l}\det\left(\widehat{(\widehat{A}_{ij})_{1l}}\right) + \sum_{l=j}^{n-1}(-1)^{l}a_{1(l+1)}\det\left(\widehat{(\widehat{A}_{ij})_{1l}}\right).$$

Induktionsantagandet och Följdsats 6.2 ger oss då att

$$\det(\widehat{A(ij)}_{1l}) = \begin{cases} \det(\widehat{A}_{1l}(i(j-1))) = (-1)^{i+j}\det\left(\widehat{(\widehat{A}_{ij})_{1l}}\right) & \text{om } l < j\,, \\ 0 & \text{om } l = j\,, \\ \det(\widehat{A}_{1l}(ij)) = (-1)^{i+j+1}\det\left(\widehat{(\widehat{A}_{ij})_{1(l-1)}}\right) & \text{om } l > j\,. \end{cases}$$

och vi får då att

$$\begin{aligned}
\det(A(ij)) &= \sum_{l=1}^{n}(-1)^{1+l}a_{1l}\det(\widehat{A(ij)}_{1l}) \\
&= \sum_{l=1}^{j-1}(-1)^{1+l+i+j}a_{1l}\det\left(\widehat{(\widehat{A}_{ij})_{1l}}\right) + \sum_{l=j+1}^{n}(-1)^{l+i+j}a_{1l}\det\left(\widehat{(\widehat{A}_{ij})_{1(l-1)}}\right) \\
&= \sum_{l=1}^{j-1}(-1)^{1+l+i+j}a_{1l}\det\left(\widehat{(\widehat{A}_{ij})_{1l}}\right) + \sum_{l=j}^{n-1}(-1)^{1+l+i+j}a_{1(l+1)}\det\left(\widehat{(\widehat{A}_{ij})_{1l}}\right) \\
&= (-1)^{i+j}\det(\widehat{A}_{ij})\,.
\end{aligned}$$

Det följer nu att

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det(A(ij)) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\widehat{A}_{ij}) = D_i(A)\,. \qquad \square$$

Övning

Visa att om E_1, E_2 och E_3 är elementära matriser av typ 1, 2 respektive 3, och E_2 multiplicerar en rad med skalären λ så har vi $\det(E_1) = -1$, $\det(E_2) = \lambda$ och $\det(E_3) = 1$.

Följdsats 6.4 (Determinant-och-ofullständig-rang)**.** *Om $A \in M_{n\times n}(k)$ har rang $\mathrm{rk}(A) < n$, så är $\det(A) = 0$.*

Bevis. Antag att $n > 1$. Vi visar först att $\det(A) = 0$ om A har två identiska rader: Antag att rad i och j är identiska. Basfallet $n = 2$ är trivialt, så vi antar att $n > 2$. Antag att påståendet gäller för $(n-1) \times (n-1)$-matris med två identiska rader. Vi kan nu använda kofaktorutveckling längs en rad som ej är i eller j och av induktion är varje term i kofaktorutvecklingen lika med noll (eftersom varje sådan term involverar en determinant av en $(n-1) \times (n-1)$-matris med två identiska rader). Vi har alltså visat att $\det(A) = 0$ och vi har fullföljt induktionssteget.

Antag nu att A är en godtycklig $n \times n$-matris med $\mathrm{rk}(A) < n$. Då finns det en rad i som är en linjärkombination av de andra raderna. Av multilinjäritet (Sats 6.1) kan vi då skriva $\det(A)$ som en summa av termer där varje term involverar en determinant av en matris med två identiska rader. Eftersom varje sådan term är lika med noll så är $\det(A) = 0$. $\square$

6.2. **Multiplikativitet och inverterbarhet.** Vi ska nu titta på fler egenskaper hos determinanter och se hur determinanter förhåller sig till inverterbarhet hos matriser.

Lemma 6.5. *Låt $E, B \in M_{n\times n}(k)$ vara två matriser där E är elementär. Då gäller att*

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)\,.$$

Bevis. Av Övning 6.1 så räcker det att visa att en radoperation av typ 1, 2 respektive 3 (typ 2 med skalär λ) på matrisen B ändrar $\det(B)$ med en faktor -1, λ respektive 1.

Fallet med typ 1 följer av induktion (alternativt av multilinjäritet). Basfallet $n = 2$ är trivialt, så vi antar att $n > 2$. Antag att påståendet gäller för $(n-1)\times(n-1)$-matris med en radoperation av typ 1. Vi kan nu använda kofaktorutveckling längs en rad som ej är den som ändras. Varje term i kofaktorutvecklingen involverar en determinant av en $(n-1)\times(n-1)$-matris med en radoperation av typ 1, vilket ger oss den önskade faktorn -1 i varje term, dvs. $\det(B') = -\det(B)$.

Fallet med typ 2 följer genom radutveckling längs den rad som multiplicerats med λ och bryta ut λ från summan som erhålls. Detta ger då $\det(B') = \lambda \det(B)$.

Fallet med typ 3 följer även det av induktion. Basfallet $n = 2$ är en enkel beräkning så vi antar att $n > 2$. Antag att påståendet gäller för $(n-1)\times(n-1)$-matris med en radoperation av typ 3. Vi kan nu använda kofaktorutveckling längs en rad som ej ändrats och som lagts till en annan rad. Varje term i kofaktorutvecklingen involverar en determinant av en $(n-1)\times(n-1)$-matris med en radoperation av typ 3, vilken av induktionsantagandet sammanfaller determinanten av samma matris utan radoperationen. Därav får vi $\det(B') = \det(B)$. □

Sats 6.6 (Multiplikativitet)**.** *Låt $A, B \in M_{n\times n}(k)$ vara två matriser. Då gäller att*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,.$$

Bevis. Om A eller B har ofullständig rang så följer resultatet av Följdsats 6.4 [Determinant-och-ofullständig-rang]. Antag nu att A och B är inverterbara matriser. Då är A och B båda produkter av elementära matriser. Med andra ord så räcker det att visa att påståendet gäller då A är en elementär matris, men detta vet vi redan är sant av Lemma 6.5. □

Följdsats 6.7 (Kofaktorutveckling-längs-en-kolumn)**.** *Om $A \in M_{n\times n}(k)$ så har vi $\det(A) = D_j^T(A)$ för alla $1 \le j \le n$.*

Bevis. Av Följdsats 5.6 har A samma rang som A^T och av Följdsats 6.4 [Determinant-och-ofullständig-rang] följer det att påståendet är sant då A ej har full rang, dvs, då A ej är inverterbar. Vi kan därför anta att A är inverterbar och därmed en produkt av elementära matriser (Följdsats 5.4 [Elementär-generering]): $A = E_k \cdots E_2 E_1$. Vi har då av Sats 6.6 [Multiplikativitet-hos-determinanter] och Övning 3.3 att

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(E_k \cdots E_2 E_1) \\ &= \det(E_k) \cdots \det(E_2)\det(E_1) \\ &= \det(E_k^T) \cdots \det(E_2^T)\det(E_1^T) \\ &= \det(E_1^T E_2^T \cdots E_k^T) \\ &= \det(A^T)\,.\end{aligned}$$

□

Sats 6.8 (Inverterbarhet)**.** *Låt $A \in M_{n\times n}(k)$ vara en matris. Då gäller att*

$$A \text{ är inverterbar} \iff \det(A) \neq 0\,.$$

Vidare har vi att om A är inverterbar så är $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Bevis. Antag först att A är inverterbar. Då finns det en matris B sådan att $AB = I$. Vi har då

$$\det(AB) = \det(I) = 1\,.$$

Eftersom determinanten är multiplikativ så har vi

$$\det(A)\det(B) = 1\,.$$

Det följer att $\det(A) \neq 0$.

Antag nu att $\det(A) \neq 0$. Då har A full rang (Följdsats 6.4) och är därmed inverterbar (Följdsats 5.7). Det sista påståendet i satsen följer av multiplikativiteten hos determinanten. □

Vi ska nu ge en formel för inversen av en inverterbar matris med hjälp av determinanter.

Definition 6.2. Låt A vara en $n \times n$-matris och låt $\widehat{A}_{ij}$ vara matrisen som fås genom att ta bort rad i och kolumn j från A. Då definierar vi den *klassiska adjunkten* eller *komplementmatrisen* av A som

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} \det(\widehat{A}_{11}) & -\det(\widehat{A}_{21}) & \cdots & (-1)^{1+n}\det(\widehat{A}_{n1}) \\ -\det(\widehat{A}_{12}) & \det(\widehat{A}_{22}) & \cdots & (-1)^{2+n}\det(\widehat{A}_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det(\widehat{A}_{1n}) & (-1)^{n+2}\det(\widehat{A}_{2n}) & \cdots & (-1)^{n+n}\det(\widehat{A}_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Sats 6.9 (Invers-formel)**.** *Om* $A \in M_{n\times n}(k)$ *är inverterbar så gäller att*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\,.$$

Bevis. Om vi multiplicerar rad i i A med kolumn i i $\operatorname{adj}(A)$ så ser vi direkt att resultatet är $\det(A)$ (kofaktorutveckling längs rad i). Om vi istället multiplicerar rad i i A med kolumn j i $\operatorname{adj}(A)$ för $i \neq j$ så ser vi att resultatet är noll eftersom detta sammanfaller med kofaktorutveckling längs rad i i den matris vi får från A genom att byta ut rad j mot rad i, dvs. en matris med två lika rader. Det följer att $A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I$. □

Följdsats 6.10 (Cramers-regel)**.** *Givet ett linjärt ekvationssystem* $Ax = b$ *där* $A \in M_{n\times n}(k)$ *är inverterbar och* $b \in k^n$ *så ges den unika lösningen av*

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}\,.$$

där A_j *är matrisen som fås genom att byta ut kolumn* j *i* A *mot vektorn* b*.*

Bevis. Sats 6.9 [Invers-formel] ger oss att $x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)b$. Om vi tittar på rad i i $\operatorname{adj}(A)b$ så ser vi att detta är lika med $\det(A_i)$ enligt kofaktorutveckling längs kolumn i. □

Diskussionsfrågor

(1) Använd Cramers regel för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

(2) Vad är den klassiska adjunkten av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}?$$

Referenser

[FIS03] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence, *Linear algebra.*, 4th. ed. (international) ed., Pearson, 2003 (English).