

Skrivtiden är 30 min. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lägg ID-kortet på bordet. Skriv dina lösningar på detta papper. Maximalt antal poäng på denna kontrollskrivning: 10. Motivera dina lösningar.

Uppgift 1 (3p) Visa eller motbevisa påståendet: Delmängden $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y^2 = 0\}$ är ett delrum av $\mathbb{R}^2$.

Lösning: Vektorerna $(-2, 1)$ och $(-2, -1)$ ligger båda i V , men summan $(-4, 0)$ ligger inte i V . Därmed är V inte ett delrum av $\mathbb{R}^2$ då den ej är sluten under addition.

Alternativ lösning: V ej sluten under skalärmultiplikation eftersom $(-2, 1) \in V$ men $-1(-2, 1) = (2, -1) \notin V$.

Uppgift 2 (2p+1p) (a) Vad är dimensionen av nollrummet till den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som med avseende på standardbasen för $\mathbb{R}^3$ respektive $\mathbb{R}^2$ ges av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}?$$

(b) Skriv ner en bas för nollrummet av T .

Lösning: (a) Första och tredje kolumnen är linjärt oberoende och andra kolumnen är en linjärkombination av de två första. Därför är dimensionen av bildrummet 2 och av [Dimensionsatsen] är dimensionen av nollrummet $3 - 2 = 1$.

(b) Eftersom nollrummet har dimension 1 så spänner varje nollskild vektor i nollrummet upp nollrummet. Därför kan vi t.ex. ta $\{(-2, 1, -3)\}$ som bas för nollrummet.

Uppgift 3 (4p) Låt $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ vara rummet av polynom av grad högst 1 över $\mathbb{R}$. Vad är basbytesmatrisen från den ordnade basen $\beta = \{2 - x, 1 + x\}$ till den ordnade basen $\gamma = \{x, 3\}$?

Lösning: Per definition har vi att basbytesmatrisen är $[I]_{\beta}^{\gamma}$. För att beräkna den behöver vi uttrycka varje element i β som en linjärkombination av elementen i γ . Vi har $2 - x = -1 \cdot x + (2/3) \cdot 3$ och $1 + x = 1 \cdot x + (1/3) \cdot 3$. Alltså är

$$[I]_{\beta}^{\gamma} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Alternativt: låt ε vara basen $\{1, x\}$. Då är $[I]_{\beta}^{\gamma} = [I]_{\varepsilon}^{\gamma} \cdot [I]_{\beta}^{\varepsilon} = ([I]_{\gamma}^{\varepsilon})^{-1} \cdot [I]_{\beta}^{\varepsilon}$ där $[I]_{\beta}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ och $[I]_{\gamma}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $[I]_{\beta}^{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Totalpoäng: