Kontrollskrivning 1 (Version 2) Namn: ______________________

MM5012, Linjär Algebra Personnummer: ______________________

Skrivtiden är 30 min. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lägg ID-kortet på bordet. Skriv dina lösningar på detta papper. Maximalt antal poäng på denna kontrollskrivning: 10. Motivera dina lösningar.

Uppgift 1 (*3p*) Visa eller motbevisa påståendet: Delmängden $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$ är ett delrum av $\mathbb{R}^2$.

Lösning: Vektorerna $(1, -1)$ och $(-1, -1)$ ligger båda i V, men summan $(0, -2)$ ligger inte i V. Därmed är V inte ett delrum av $\mathbb{R}^2$ då den ej är sluten under addition.

Alternativ lösning: V ej sluten under skalärmultiplikation eftersom $(1, -1) \in V$ men $-1(1, -1) = (-1, 1) \notin V$.

Uppgift 2 (*2p+1p*) (a) Vad är dimensionen av nollrummet till den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som med avseende på standardbasen för $\mathbb{R}^3$ respektive $\mathbb{R}^2$ ges av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}?$$

(b) Skriv ner en bas för nollrummet av T.

Lösning: (a) Första och tredje kolumnen är linjärt oberoende och andra kolumnen är en linjärkombination av de två första. Därför är dimensionen av bildrummet 2 och av [Dimensionssatsen] är dimensionen av nollrummet $3 - 2 = 1$.
(b) Eftersom nollrummet har dimension 1 så spänner varje nollskild vektor i nollrummet upp nollrummet. Därför kan vi t.ex. ta $\{(1, 1, -2)\}$ som bas för nollrummet.

Uppgift 3 (*4p*) Låt $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ vara rummet av polynom av grad högst 1 över $\mathbb{R}$. Vad är basbytesmatrisen från den ordnade basen $\beta = \{3 + x, 1 - x\}$ till den ordnade basen $\gamma = \{5x, 1\}$?

Lösning: Per definition har vi att basbytesmatrisen är $[I]_\beta^\gamma$. För att beräkna den behöver vi uttrycka varje element i β som en linjärkombination av elementen i γ. Vi har $3+x = (1/5)\cdot 5x+3\cdot 1$ och $1-x = -(1/5)\cdot 5x+1\cdot 1$. Alltså är

$$[I]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativt: låt ε vara basen $\{1, x\}$. Då är $[I]_\beta^\gamma = [I]_\varepsilon^\gamma \cdot [I]_\beta^\varepsilon = ([I]_\gamma^\varepsilon)^{-1} \cdot [I]_\beta^\varepsilon$ där $[I]_\beta^\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ och $[I]_\gamma^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $[I]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Totalpoäng: