

Senast uppdaterad: 19 september 2025

7. Eigenvärden och egenvektorer

Om vi betraktar en linjär avbildning $L: V \rightarrow V$ från ett vektorrum till sig självt så kan vi fråga oss om det finns en ordnad bas för V i vilken matrisrepresentationen för L är diagonal. Om så är fallet så är nästa fråga hur vi i så fall hittar denna bas. För att svara på dessa frågor behöver vi först introducera begreppen egenvärden och egenvektorer.

7.1. Eigenvärden och egenvektorer. Vi kommer nu att fokusera på linjära avbildningar från ett vektorrum till sig självt.

Definition 7.1. En linjär avbildning $L: V \rightarrow V$ kallas för en *operator* på V . Identitetsoperatoren på V betecknas I .

Kom ihåg att varje $n \times n$ -matris kan betraktas som en operator på k^n genom matris-vektor-multiplikation och matrisrepresentationen till en operator med avseende på en bas är alltid en *kvadratisk* matris. Därför gäller varje definition och sats som rör linjära operatorer även för kvadratiske matriser.

Definition 7.2. En operator $L: V \rightarrow V$ kallas *diagonaliserbar* om det finns en ordnad bas α för V så att matrisen $[L]_\alpha$ är diagonal.

Notera att om en operator är diagonal i en bas så bevarar den riktningen av basvektorerna, dvs. varje basvektor v_i i α uppfyller $L(v_i) = \lambda_i v_i$ för någon skalär λ_i .

Exempel 7.1. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

definierar en operator på $\mathbb{R}^2$ men också på $\mathbb{C}^2$. Som operator på $\mathbb{R}^2$ är den inte diagonaliserbar eftersom den roterar alla vektorer i $\mathbb{R}^2$ 45 grader moturs kring origo (och ändrar dess längd). Alltså bevaras ingen riktning i $\mathbb{R}^2$. Som operator

på $\mathbb{C}^2$ är den däremot diagonaliserbar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \end{pmatrix} = (1+i) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i \\ 1-i \end{pmatrix} = (1-i) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detta innebär att om vi väljer basen $\beta = \{(i, 1), (-i, 1)\}$ för $\mathbb{C}^2$ så är matrisen för A i denna bas diagonal:

$$[A]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Definition 7.3. Låt $L: V \rightarrow V$ vara en linjär avbildning. Om $L(v) = \lambda v$ för en nollskild vektor $v \in V$ och $\lambda \in k$ så kallas λ för ett *egenvärde* till L och v kallas för en *egenvektor* till L .

Diskussionsfrågor

Betrakta matrisen A i Exempel 7.1. Vilka egenvärden har A betraktat som

- (1) en operator på $\mathbb{R}^2$?
- (2) en operator på $\mathbb{C}^2$?

Om vi skriver om ekvationen $L(v) = \lambda v$ som $(L - \lambda I)v = 0$, där I är identitetsavbildningen, så är mängden av egenvektorer till L med egenvärde λ precis $\ker(L - \lambda I) \setminus \{0\}$. Det vi då först behöver undersöka är när operatoren $(L - \lambda I)$ överhuvudtaget *har* en icke-trivial kärna. Detta sker precis när $(L - \lambda I)$ ej är inverterbar, dvs när $\det([L - \lambda I]_{\beta}) = 0$ för varje ordnad bas β för V . För att hitta alla egenvärden λ behöver vi alltså lösa ekvationen $\det([L - xI]_{\beta}) = 0$, där x är en obekant.

Sats 7.1 (Basoberoende för karakteristiskt polynom). *Polynomet $\det([L - xI]_{\beta})$ är oberoende av valet av bas β .*

Bevis. Givet en annan ordnad bas γ så har vi att

$$[L - xI]_{\gamma} = ([I]_{\gamma}^{\beta})^{-1} [L - xI]_{\beta} [I]_{\gamma}^{\beta},$$

och

$$\begin{aligned}
 \det([L - xI]_\gamma) &= \det([I]_\gamma^\beta)^{-1} \det([L - xI]_\beta) \det([I]_\gamma^\beta) \\
 &= \det([I]_\gamma^\beta)^{-1} \det([L - xI]_\beta) \det([I]_\gamma^\beta) \\
 &= \det([L - xI]_\beta). \quad \square
 \end{aligned}$$

Definition 7.4. Låt $L: V \rightarrow V$ vara en operator och β en ordnad bas för V . Det *karakteristiska polynomet* för L är polynomet $p_L(x) = \det([L]_\beta - xI) = \det([L - xI]_\beta)$.

Vi har alltså att egenvärdena för L är precis de skalärer λ som är rötter till det karakteristiska polynomet $p_L(x)$. När vi hittat alla lösningar till ekvationen $p_L(x) = 0$ så kan vi sedan hitta de tillhörande egenvektorerna till egenvärdet λ genom att hitta kärnan till $(L - \lambda I)$.

Exempel 7.2. På k^2 har vi operatören som i standardbasen representeras av matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi har då att det karakteristiska polynomet är

$$\det \begin{pmatrix} 1-x & 4 \\ 2 & 3-x \end{pmatrix} = (1-x)(3-x) - (2)(4) = x^2 - 4x - 5$$

vilket har rötter $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = -1$. Dessa är alltså egenvärdena till M .

För att hitta motsvarande egenvektorer så löser vi ekvationerna $(M - 5I)v = 0$ och $(M + I)v = 0$. Kärnan till

$$(M - 5I) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ respektive } (M + I) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

spänns upp av $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respektive $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, vilka alltså är egenvektorer tillhörande egenvärdena $\lambda_1 = 5$ respektive $\lambda_2 = -1$. Inversen till matrisen $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ges av

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

och vi har att

$$P^{-1}MP = P^{-1} \left(5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad -1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exempel 7.3. Låt V vara vektorrummet av polynom av grad högst 2. Låt $L: V \rightarrow V$ vara en linjär avbildning som ges av $L(p(x)) = p'(x)$, där $p'(x)$ är derivatan av $p(x)$. Eftersom derivatan sänker graden av polynomet så finns endast ett egenvärde till L , nämligen 0, och alla konstanta, noll-skilda polynom är egenvektorer till L . Alltså är L inte diagonaliserbar. Vi kan också se detta genom att betrakta matrisen till L i basen $\{1, x, x^2\}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vars karaktäristiska polynom är $-x^3$ som endast har roten 0 med multiplicitet 3. Dvs, det enda egenvärdet till L är 0.

Sats 7.2 (Karaktärisering av diagonaliserbarhet). *En operator $L: V \rightarrow V$ är diagonaliserbar om och endast om det finns en ordnad bas av egenvektorer till L . Om α är en sådan bas så är matrisen $[L]_{\alpha}^{\alpha}$ diagonal med egenvärdena på diagonalen.*

Bevis. Övning.

□

Diskussionsfrågor

- (1) Hur många egenvärden kan en operator på ett n -dimensionellt vektorrum ha som mest?
- (2) Är varje egenvektor till en operator unik?
- (3) Är egenvärdena till en operator alltid reella?
- (4) Finns det alltid en bas av egenvektorer till en operator?

Referenser

- [FIS03] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence, *Linear algebra.*, 4th. ed. (international) ed., Pearson, 2003 (English).