Senast uppdaterad: 26 september 2025

8. Diagonalisering och Cayley–Hamiltons sats

Vi ska nu titta på generella kriterier för diagonaliserbarhet av linjära operatorer.

Sats 8.1 (Linjärt oberoende av egenvektorer)**.** *Om $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är olika egenvärden till en operator $L\colon V \to V$ så är de tillhörande egenvektorerna linjärt oberoende.*

Bevis. Vi använder induktion över n. För $n = 1$ är påståendet uppenbart. Antag att påståendet gäller för $n-1$ och låt $v_1, \dots, v_n$ vara egenvektorer tillhörande de olika egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Antag att det finns skalärer $a_1, \dots, a_n$ sådana att

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0\,.$$

Låt λ_n vara egenvärdet för v_n. Om vi applicerar $L - \lambda_n I$ på båda sidor får vi:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_n)v_2 + \ldots + a_n(\lambda_n - \lambda_n)v_n = 0\,.$$

Eftersom $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ är linjärt oberoende och egenvärdena alla är olika så får vi att $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Men då måste även $a_n = 0$. Därmed är $v_1, \dots, v_n$ linjärt oberoende. □

Följdsats 8.2 (Kriterium för diagonaliserbarhet)**.** *Om en operator $L\colon V \to V$ har $n = \dim V$ olika egenvärden så är L diagonaliserbar.*

Bevis. Övning. □

Diskussionsfrågor

(1) Kan du ge ett exempel på en operator som är diagonaliserbar men *inte* har $n = \dim(V)$ olika egenvärden?
(2) Kan du ge ett exempel på en operator som inte är diagonaliserbar?

Definition 8.1. Om λ är ett egenvärde till en operator L så definierar vi *egenrummet* tillhörande λ som delrummet

$$E_\lambda = \ker(L - \lambda I)\,.$$

Om det karaktäristiska polynomet $p_L(x)$ till en operator L *splittrar* i linjära faktorer:

$$p_L(x) = \pm(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_l)$$

så kan samma rot λ förekomma flera gånger, dvs. $\lambda = \lambda_i$ för mer än ett i, även om L är diagonaliserbar (t.ex. gäller detta för identitetsavbildningen).

Å andra sidan kan vi tala om dimensionen av egenrummet E_λ. Detta leder oss till att definiera två typer av *multiplicitet*:

Definition 8.2. Låt L vara en operator på ett ändligt-dimensionellt vektorrum V och låt λ vara ett egenvärde till L.

- Den *algebraiska multipliciteten* $m_a(\lambda)$ av ett egenvärde λ är det största positiva heltalet m sådant att $(x-\lambda)^m$ är en faktor av det karaktäristiska polynomet $p_L(x)$.
- Den *geometriska multipliciteten* $m_g(\lambda)$ av λ är dimensionen av egenrummet E_λ.

Exempel 8.1. När $k = \mathbb{C}$ så splittrar varje polynom i linjära faktorer (algebrans fundamentalsats).

Lemma 8.3. *Om λ är ett egenvärde till en operator L så gäller att*

$$m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda) \geq 1\,.$$

Bevis. Låt λ vara ett egenvärde till L och välj en ordnad bas för E_λ. Denna kan utvidgas till en ordnad bas för V. I denna bas har vi att matrisen för L har formen

$$\begin{pmatrix} \lambda I & * \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

och determinanten av $L - xI$ är alltså

$$\det(L - xI) = \det\begin{pmatrix} (\lambda - x)I & * \\ 0 & B - xI \end{pmatrix} = (\lambda - x)^{m_g(\lambda)}\det(B - xI)\,. \qquad \square$$

Vi är nu redo att ge ett nödvändigt och tillräckligt villkor för diagonaliserbarhet.

Sats 8.4. *Låt L vara en operator på ett ändligt-dimensionellt vektorrum V med* $\dim V = n$*. Antag att det karaktäristiska polynomet $p_L(x)$ splittrar i linjära faktorer. Då är följande påståenden ekvivalenta:*

(1) L är diagonaliserbar.
(2) $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ för varje egenvärde λ.

Bevis. Antag att L är diagonaliserbar. Då finns en ordnad bas β för V så att $[L]_\beta$ är diagonal. Den geometriska multipliciteten av ett egenvärde λ är då antalet gånger λ förekommer på diagonalen, vilket är lika med den algebraiska multipliciteten av λ eftersom det karaktäristiska polynomet då är $\prod_\lambda (\lambda - x)$ där produkten är över diagonalelementen i $[L]_\beta$.

Å andra sidan, anta att $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ för varje egenvärde λ. Eftersom det karaktäristiska polynomet har grad $\sum_\lambda m_a(\lambda) = n$ så är summan av egenrummens dimensioner lika med n och vi kan välja en ordnad bas för V bestående av vektorer från egenrummen ([Linjärt-oberoende-egenvektorer] Sats 8.1). □

Diskussionsfrågor

Vilka av följande matriser är diagonaliserbara över $\mathbb{R}$ respektive $\mathbb{C}$?

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

8.1. **Cayley–Hamiltons sats.** Vi ska nu bevisa en klassisk sats inom linjär algebra, nämligen Cayley–Hamiltons sats som säger att varje operator L på ett ändligt-dimensionellt vektorrum V uppfyller sin egen karaktäristiska ekvation, det vill säga $p_L(L) = 0$ (nolloperatorn) där $p_L(x)$ är det karaktäristiska polynomet för L. Detta har en rad viktiga tillämpningar, inte minst inom talteori och algebraisk geometri (se denna länk).

Innan vi bevisar denna sats behöver vi två hjälpsatser:

Lemma 8.5. *Om $W \subseteq V$ är ett invariant delrum under L, det vill säga $L(W) \subseteq W$, så gäller att det karaktäristiska polynomet till restriktionen $L|_W : W \to W$ delar det karaktäristiska polynomet till L.*

Bevis. Välj en ordnad bas β_W för W och utvidga denna till en ordnad bas β för V. I denna bas har vi att matrisen för L har formen

$$[L]_\beta = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

där $A = [L|_W]_{\beta_W}$. Därmed är

$$\begin{aligned} p_L(x) &= \det([L]_\beta - xI) \\ &= \det \begin{pmatrix} A - xI & B \\ 0 & C - xI \end{pmatrix} \\ &= \det(A - xI)\det(C - xI) \\ &= p_{L|_W}(x)\det(C - xI)\,. \end{aligned}$$

□

Lemma 8.6. *Låt $L: V \to V$ vara en operator på ett ändligt-dimensionellt vektorrum V. Låt $v \in V$ vara en icke-nollvektor och sätt $W = \mathrm{Span}(v, L(v), L^2(v), \dots)$. Om $\dim W = m$ så är $\{v, L(v), \dots, L^{m-1}(v)\}$ en bas för W och om $a_0, \dots, a_{m-1}$ är den unika lösningen till ekvationen*

$$a_0 v + a_1 L(v) + \cdots + a_{m-1}L^{m-1}(v) + L^m(v) = 0$$

så är $(-1)^m(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m) = 0$ det karaktäristiska polynomet för $L|_W$.

Bevis. Eftersom $\dim W = m$ så är $\{v, L(v), \dots, L^{m-1}(v)\}$ linjärt oberoende och därmed en bas för W. I denna bas har vi att matrisen för $L|_W$ är

$$[L|_W]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Därmed är det karaktäristiska polynomet

$$p_{L|_W}(x) = \det([L|_W]_\beta - xI) = (-1)^m(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m)\,.$$

□

Vi är nu redo att bevisa Cayley–Hamiltons sats.

Sats 8.7 (Cayley–Hamiltons sats). *Låt $L\colon V \to V$ vara en operator på ett ändligt-dimensionellt vektorrum V. Om $p_L(x)$ är det karaktäristiska polynomet för L så gäller att $p_L(L) = 0$.*

Bevis. Om $V = \{0\}$ så är påståendet uppenbart. Välj en icke-nollvektor $v \in V$ och sätt $W = \operatorname{Span}(v, L(v), L^2(v), \dots)$. Då är W ett invariant delrum under L och om $\dim W = m$ så är $\{v, L(v), \dots, L^{m-1}(v)\}$ en bas för W. Om $a_0, \dots, a_{m-1}$ är den unika lösningen till ekvationen

$$a_0 v + a_1 L(v) + \cdots + a_{m-1} L^{m-1}(v) + L^m(v) = 0$$

så är $(-1)^m(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m)$ det karaktäristiska polynomet för $L|_W$ vilket delar $p_L(x)$. Därmed finns ett polynom $q(x)$ så att $p_L(x) = q(x)(-1)^m(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m)$. Detta ger då att

$$p_L(L)(v) = q(L)(-1)^m(a_0 I + a_1 L + \cdots + a_{m-1}L^{m-1} + L^m)(v) = 0\,. \qquad \square$$

Exempel 8.2. Låt $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som i standardbasen ε representeras av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Det karaktäristiska polynomet är $p_L(x) = (1-x)(3-x)$ och vi har att

$$\begin{aligned}[p_L(L)]_\varepsilon &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Övning

Visa att operatorn L på $\mathbb{R}^2$ som i standardbasen ε representeras av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

uppfyller $p_L(L) = 0$, genom att beräkna matrisen $p_L(A) = [p_L(L)]_\varepsilon$.

Referenser

[FIS03] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence, *Linear algebra.*, 4th. ed. (international) ed., Pearson, 2003 (English).