Senast uppdaterad: 2 oktober 2025

9. Inre produkt och Gram–Schmidts metod

En viktig egenskap hos det euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$ är att vi har en inre produkt:

$$(v, w) = v^T w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \, .$$

Denna inre produkt hjälper oss att mäta avstånd och vinklar genom att projicera vektorer på varandra. I detta kapitel ska vi axiomatisera begreppet inre produkt så att vi kan använda begreppet för mer generella vektorrum.

9.1. **Inre produkt.** Från och med nu antar vi att k är antingen $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Detta för att vi kommer att använda oss av komplex konjugering; $\overline{a+bi} = a - bi$ (vilket är identiteten på $\mathbb{R}$).

Definition 9.1. En inre produkt på ett vektorrum V över k är en avbildning $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to k$ som är:

(1) `Symmetrisk:` $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ för alla $v, w \in V$.
(2) `Linjär:` $\langle av + bu, w \rangle = a\langle v, w \rangle + b\langle u, w \rangle$ för alla $u, v, w \in V$ och $a, b \in k$.
(3) `Positivt definit:` $\langle v, v \rangle > 0$ för alla $v \in V$, $v \neq 0$.

Ett vektorrum med en inre produkt kallas för ett *inre produktrum*.

Diskussionsfrågor

(1) Hur ser linjäriteten ut i andra argumentet?
(2) Varför är $\langle v, v \rangle$ reellt för alla $v \in V$?
(3) Är den vanliga inre produkten på $\mathbb{R}^n$ en inre produkt enligt denna definition?

Exempel 9.1. Betrakta vektorrummet $k[x]$ av polynom med koefficienter i k. Vi kan definiera en inre produkt på detta rum genom

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} \, dx$$

för alla $f, g \in k[x]$, där $[a, b]$ är ett intervall i $\mathbb{R}$.

Exempel 9.2. Vektorrummet av 2×2-matriser kan ges en inre produkt genom

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) = \sum_{i,j} \overline{a_{ij}} b_{ij} \, .$$

för alla $(a_{ij}), (b_{ij}) \in M_{2\times 2}(k)$, där A^* är det Hermiteska (komplexkonjugerade) transponatet av A och tr betecknar spåret av en matris. Denna definition fungerar inte bara för $n = 2$ utan för godtyckliga n och kallas *Frobenius inre produkt*.

Övning

Låt V vara ett inre produktrum över k. Om $v_1, v_2, v_3 \in V$ och $a \in k$, visa att följande likheter gäller:

(1) $\langle v_1, 0\rangle = \langle 0, v_1\rangle = 0\,$,
(2) $\langle v_1, v_1\rangle = 0$ om och endast om $v_1 = 0\,$,
(3) $\langle v_1, v_2 + v_3\rangle = \langle v_1, v_2\rangle + \langle v_1, v_3\rangle\,$,
(4) $\langle v_1, av_2\rangle = \overline{a}\langle v_1, v_2\rangle\,$,
(5) Om $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_3\rangle$ för alla $v_1 \in V$ så är $v_2 = v_3\,$.

Definition 9.2. Låt V vara ett inre produktrum över k och låt v, w vara vektorer i V. Vi definierar *projektionen* av v på w som

$$\operatorname{proj}_w v = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w \, .$$

Givet en inre produkt kan vi definiera längden eller normen av en vektor:

Definition 9.3. Låt V vara ett inre produktrum över k. Vi definierar *normen* av en vektor $v \in V$ som

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \, .$$

Sats 9.1 (Normens egenskaper)**.** *Låt V vara ett inre produktrum över k. Då gäller följande egenskaper för normen:*

(1) $\|v\| \geq 0$ *för alla* $v \in V$, *och* $\|v\| = 0$ *om och endast om* $v = 0$.
(2) $\|av\| = |a|\|v\|$ *för alla* $v \in V$ *och* $a \in k$.

(3) (Cauchy–Schwarz olikhet) $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$ *för alla* $v, w \in V$*, med likhet om och endast om* v *och* w *är linjärt beroende.*
(4) (Triangelolikheten) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *för alla* $v, w \in V$.

Bevis. De första två egenskaperna lämnar vi som övning att bevisa. För att bevisa Cauchy–Schwarz olikhet så tittar vi på $v - \operatorname{proj}_w v$:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|v - \operatorname{proj}_w v\| \\
&= \langle v - \operatorname{proj}_w v, v - \operatorname{proj}_w v\rangle \\
&= \langle v, v\rangle - \langle v, \operatorname{proj}_w v\rangle - \langle \operatorname{proj}_w v, v\rangle + \langle \operatorname{proj}_w v, \operatorname{proj}_w v\rangle \\
&= \|v\|^2 - \overline{\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\right)}\langle v, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\langle w, v\rangle + \overline{\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\right)}\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\langle w, w\rangle \\
&= \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2},
\end{aligned}$$

vilket bevisar olikheten eftersom $\|v\|$, $\|w\|$ och $|\langle v, w\rangle|$ alla är icke-negativa reella tal.

Med hjälp av Cauchy–Schwarz olikhet kan vi nu bevisa triangelolikheten:

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} + \langle w, w\rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle v, w\rangle) + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w\rangle| + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 .
\end{aligned}$$

□

Definition 9.4. Två vektorer v, w i ett inre produktrum V sägs vara *ortogonala* om $\langle v, w\rangle = 0$. En delmängd av V sägs vara *ortogonal* om alla par av olika vektorer i delmängden är ortogonala. En delmängd av V sägs vara *ortonormal* om den är ortogonal och alla vektorer i delmängden har norm 1.

Exempel 9.3. Vektorerna 1 och x är ortogonala i inre produktrummet $\mathbb{R}[x]$ med inre produkten $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ eftersom

$$\langle 1, x\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0\,.$$

Delmängden $\{1, x\}$ är ortogonal och delmängden $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x\}$ är ortonormal. T.ex. har vi

$$\left\| \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x \right)^2 dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1\,.$$

9.2. **Gram–Schmidts metod.** Gram–Schmidts metod är en algoritm för att omvandla en uppräknelig mängd linjärt oberoende vektorer $\{v_1, v_2, \ldots\}$ i ett *inre produktrum* till en ortogonal/ortonormal bas för $\mathrm{Span}(v_1, v_2 \ldots)$. I synnerhet, givet en ordnad uppräknelig bas β för ett inre produktrum V så kan vi använda Gram–Schmidts metod för att omvandla β till en uppräknelig ortogonal/ortonormal bas för V.

Vi börjar med en sats som beskriver hur man, givet en mängd linjärt oberoende vektorer $\{v_1, v_2, \ldots\}$ och $w \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, \ldots)$, kan hitta den unika beskrivningen av w som en linjärkombination av element i $\{v_1, v_2, \ldots\}$.

Sats 9.2 (Projektion på bas)**.** *Låt V vara ett inre produktrum och låt β vara en ortogonal bas för V. För varje $v \in V$ så har vi att $\langle v, w\rangle = 0$ för alla utom ändligt många $w \in \beta$ och*

$$v = \sum_{w \in \beta} \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

(detta är alltså en ändlig summa).

Bevis. Av Sats 2.2 [Karaktärisering av bas] vet vi att varje $v \in V$ kan skrivas som en linjärkombination av (ändligt många) vektorer i β på ett unikt sätt:

$$v = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n\,.$$

Vi får då att

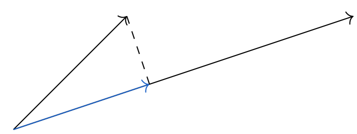
$$\frac{\langle v, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i = a_i w_i\,,$$

vilket ger att

$$\sum_{w \in \beta} \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n = v\,. \qquad \square$$

Följdsats 9.3. *Varje ortogonal delmängd av ett inre produktrum, bestående av nollskilda vektorer, är linjärt oberoende.*

Idén bakom Gram–Schmidts metod är att, givet en bas på formen $\{v_1, v_2, \dots\}$, successivt ortogonalisera vektorerna $v_1, v_2, \dots$ genom att subtrahera projektioner på de tidigare vektorerna.



Sats 9.4 (Gram–Schmidts metod)**.** *Låt V vara ett inre produktrum och $\{v_1, v_2, \dots\}$ vara en bas för V. Definiera nu $u_1 = v_1$ och*

$$u_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j \,.$$

Då är $\{u_1, u_2, \dots\}$ en ortogonal bas för V (och $\{\|u_1\|^{-1}u_1, \|u_2\|^{-1}u_2, \dots\}$ en ortonormal bas för V).

Bevis. Antag att vi redan ortogonaliserat $v_1, \dots, v_{n-1}$ för något positivt heltal $n \geq 2$. Vi visar nu att u_n är ortogonal mot $u_1, \dots, u_{n-1}$. Vi har

$$\langle u_n, u_j \rangle = \langle v_n, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \langle u_i, u_j \rangle \,.$$

Eftersom $u_1, \dots, u_{n-1}$ är ortogonala så är $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ för $i \neq j$. Vi får då

$$\langle u_n, u_j \rangle = \langle v_n, u_j \rangle - \frac{\langle v_n, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} \langle u_j, u_j \rangle = 0 \,.$$

Detta visar att u_n är ortogonal mot $u_1, \dots, u_{n-1}$ och därmed är $\{u_1, u_2, \dots\}$ en ortogonal bas för V. □

Övning

Använd Gram–Schmidts metod för att hitta en ortonormal bas för $k[x]_{\leq 3}$ om vi startar med basen $\{1, x, x^2, x^3\}$.

9.3. **Matrisrepresentationer av inre produkter.** Givet en inre produkt $f = \langle \cdot, \cdot \rangle$ på ett vektorrum V och en bas $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ för V kan vi representera inre produkten med hjälp av en matris. Vi definierar matrisen $[f]_\beta$ genom

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \cdots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Definition 9.5. Låt A vara en matris med koefficienter i $\mathbb{C}$. Då är A

(1) *Hermitesk* eller *självadjungerad* om $A = A^*$, där A^* är det Hermiteska (komplexkonjugerade) transponatet av A, och

(2) *positivt definit* om alla dess egenvärden är positiva reella tal.

Sats 9.5 (Matrisrepresentation av en inre produkt)**.** *Låt V vara ett vektorrum av ändlig dimension och låt $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ vara en bas. Då är en avbildning $f\colon V \times V \to k$ en inre produkt på V om och endast om matrisen $[f]_\beta$ är Hermitesk och positivt definit. Å andra sidan, om A är en Hermitesk och positivt definit matris så är avbildningen*

$$\begin{aligned} f_A\colon V \times V &\to k \\ (v, w) &\mapsto [v]_\beta^* A [w]_\beta \end{aligned}$$

en inre produkt på V.

Bevis. Om f är en inre produkt så verifierar vi enkelt från definitionen att $[f]_\beta$ är Hermitesk. I kapitel 11 kommer vi se att Hermiteska matriser är diagonaliserbara med reella egenvärden och egenvektorerna är ortogonala. Om vi nu låter β vara en sådan bas av egenvektorer så är $[f]_\beta$ diagonal med egenvärdena på diagonalen, vilka enligt ovan, är på formen $\langle v_i, v_i\rangle$. Dvs alla egenvärden är reella och positiva.

Å andra sidan, om A är Hermitesk så är $[v]_\beta^* A [w]_\beta = \overline{[w]_\beta^* A [v]_\beta}$ för alla $v, w \in V$. Linjäriteten följer från matrisalgebra och positivt definit följer från att $[v]_\beta^* A [v]_\beta > 0$ för alla $v \neq 0$, eftersom varje v är en linjärkombination av egenvektorerna till A, vilka har positiva egenvärden eftersom A är Hermitesk (Övning 11). $\square$

Referenser

[FIS03] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence, *Linear algebra.*, 4th. ed. (international) ed., Pearson, 2003 (English).