Senast uppdaterad: 3 oktober 2025

10. Ortogonala komplementet och adjunkten till en operator

Givet en delmängd S av $\mathbb{R}^n$ så kan vi tala den delmängd som är vinkelrät mot alla vektorer i S. Detta koncept går att generalisera till godtyckliga inre produktrum.

Definition 10.1. Låt V vara ett inre produktrum och låt $S \subseteq V$ vara en delmängd. Då definierar vi det *ortogonala komplementet* till S som

$$S^\perp = \{v \in V : \langle v, s\rangle = 0 \text{ för alla } s \in S\}.$$

Notera att $S^\perp$ inte förändras om vi byter S mot $\operatorname{Span}(S)$. Kan därför tala om delrum istället för delmängd i definitionen ovan.

Övning

Visa att $S^\perp$ är ett delrum av V.

Sats 10.1 (Ortogonala komplementet)**.** *Låt V vara ett inre produktrum och W ett delrum av V. För varje vektor $v \in V$ så existerar en unik uppdelning*

$$v = w + w^\perp$$

där $w \in W$ och $w^\perp \in W^\perp$.

Bevis. Givet en bas $\{w_1, \dots, w_m\}$ och en bas $\{w_1^\perp, \dots, w_n^\perp\}$ för $W^\perp$ så är

$$\{w_1, \dots, w_m, w_1^\perp, \dots, w_n^\perp\}$$

en bas för V, eftersom ortogonala vektorer är linjärt oberoende. Av Sats 9.2 [Projektion på bas] och Sats 2.2 [Karaktärisering av bas] har vi då att v, på ett unikt sätt, kan skrivas som

$$v = \sum_{j=1}^{m} \frac{\langle v, w_j\rangle}{\langle w_j, w_j\rangle} w_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, w_i^\perp\rangle}{\langle w_i^\perp, w_i^\perp\rangle} w_i^\perp . \qquad \square$$

Diskussionsfrågor

(1) Stämmer det att $(W^{\perp})^{\perp} = W$?
(2) Hur är $\dim(W)$ och $\dim(W^{\perp})$ relaterade?
(3) Vad är $\{0\}^{\perp}$?

Övning

Dela upp $x^2 \in \mathbb{R}[x]$ som en summa av en vektor i $W = \mathrm{Span}(1, x)$ och en i $W^{\perp}$ då vi har den inre produkten

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx\,.$$

10.1. **Hermiteska adjunkten till en operator.** I detta kapitel ska vi visa att, givet inre produktrum V och W av ändlig dimension och en linjär avbildning $L\colon V \to W$, kan vi definiera en ny operator $L^*\colon W \to V$ som uppfyller att

$$\langle L(v), w \rangle = \langle v, L^*(w) \rangle$$

för alla $v \in V$ och $w \in W$. Denna operator kallas *Hermiteska adjunkten* (eller bara *adjunkten*) till L. Detta begrepp bör inte förväxlas med den *klassiska adjunkten* eller *komplementmatrisen* till en kvadratisk matris från Kapitel 6.

Definition 10.2. Låt V vara ett vektorrum över en kropp k. Då definierar vi *duala rummet* V^* som mängden av alla linjära avbildningar från V till k:

$$V^{\vee} = \mathrm{Hom}_k(V, k) = \{f\colon V \to k \mid f \text{ är linjär}\}\,.$$

(En annan notation för $V^{\vee}$ är V^*).

Sats 10.2 (Dual och dimension)**.** *Om V är ett ändligt-dimensionellt vektorrum över en kropp k så är $V^{\vee}$ också ett ändligt-dimensionellt vektorrum över k med $\dim(V^{\vee}) = \dim(V)$.*

Bevis. Detta följer av att om $\{v_1, \ldots, v_n\}$ är en bas för V så är

$$\{v_1^{\vee}, \ldots, v_n^{\vee}\} \subseteq V^{\vee}$$

en bas för $V^\vee$, där $v_i^\vee\colon V \to k$ är den linjära avbildning som ges av

$$v_i^\vee(v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \qquad \square$$

Av axiomen för inre produkter följer att för varje $w \in V$ så är avbildningen $\langle -, w\rangle\colon V \to k$ given av $v \mapsto \langle v, w\rangle$ linjär. Vi kan definiera en linjär avbildning av vektorrum $V \to V^\vee$ genom att skicka w till $\langle -, \overline{w}\rangle$. Följande sats är *falsk* om vi inte antar att V är av ändlig dimension.

Sats 10.3 (Dualitetssatsen)**.** *Om V är ett inre produktrum av ändlig dimension så är avbildningen $V \to V^\vee$ given av $v \mapsto \langle -, \overline{v}\rangle$ en isomorfi av vektorrum.*

Bevis. Detta följer av att avbildningen $\langle -, \overline{v}\rangle$ är noll om och endast om $v = 0$ (av axiomen för inre produkter), dvs det enda element som avbildas på nollavbildningen är noll. Av [Injektivitetssatsen] (Sats 3.2) är avbildningen därmed injektiv. Av Sats 3.4 [Bijektionssatsen] är den också surjektiv eftersom V och $V^\vee$ har samma dimension. Alltså är avbildningen en isomorfi. $\square$

Övning

Visa att dualen till $k[x]$ är isomorf med $k^{\mathbb{N}}$, vilken i sin tur är isomorf med vektorrummet av alla formella serier $k[[x]]$.

Antag nu att vi har en linjär avbildning $L\colon V \to W$ mellan inre produktrum av ändlig dimension. Detta ger nu en avbildning $\langle L(-), w\rangle$ från V till k för varje $w \in W$, vilken vi ser är linjär genom att uttrycka den som kompositionen $\langle -, w\rangle \circ L$. Av [Dualitetssatsen] (Sats 10.3) vet vi då att det existerar en unik vektor $v' \in V$ sådan att $\langle L(-), w\rangle = \langle -, v'\rangle$. Vi kommer att definiera adjunkten L^* genom att sätta $L^*(w) = v'$:

Definition 10.3. Låt $L\colon V \to W$ vara en linjär avbildning mellan inre produktrum av ändlig dimension. Då definierar vi den *Hermiteska adjunkten* (*adjunkten*, *adjungerade avbildningen*) till L som den unika funktion $L^*\colon W \to V$ sådan att

$$\langle L(-), w\rangle = \langle -, L^*(w)\rangle$$

för alla $w \in W$.

Sats 10.4 (Adjunkten är linjär)**.** *Om $L\colon V \to W$ är en linjär avbildning mellan inre produktrum av ändlig dimension så är adjunkten $L^*\colon W \to V$ också en linjär avbildning.*

Bevis. För alla $v, w \in W$ och $a \in k$ så har vi

$$\begin{aligned} \langle -, L^*(av + w)\rangle &= \langle L(-), av + w\rangle \\ &= \overline{a}\langle L(-), v\rangle + \langle L(-), w\rangle \\ &= \overline{a}\langle -, L^*(v)\rangle + \langle -, L^*(w)\rangle \\ &= \langle -, aL^*(v) + L^*(w)\rangle \,. \end{aligned}$$

Av Övning 9.1 (5) följer då att $L^*(av + w) = aL^*(v) + L^*(w)$, dvs L^* är linjär. □

Nu ska vi se hur matrisen för L^* relaterar till matrisen för L med avseende på ortonormala baser. Anledningen till att vi behöver använda oss av *ortonormala* baser är att själva matrisoperationen $A \mapsto A^*$ går att definiera *utan* att ha valt inre produkter, medan L^* kommer att bero på valet av sådana. De inre produkterna påverkar alltså vilka ortonormala baser som finns tillgängliga.

Diskussionsfrågor

(1) (Kuggfråga) Vad är adjunkten till $z \mapsto \overline{z}$ från $\mathbb{C}$ till $\mathbb{C}$ med den vanliga inre produkten $\langle z_1, z_2\rangle = z_1\overline{z_2}$?
(2) Vad är adjunkten till $z \mapsto iz$ från $\mathbb{C}$ till $\mathbb{C}$ med den vanliga inre produkten $\langle z_1, z_2\rangle = z_1\overline{z_2}$?
(3) Vad är adjunkten till $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (med standard inre produkt) given av matrisen
$$[L]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Exempel 10.1. Låt $L\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ vara den linjära avbildningen given (i standardbasen) av matrisen
$$[L]_\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Med den vanliga inre produkten för $\mathbb{C}^2$ har vi då att

$$\begin{aligned}\langle L(x,y),(x',y')\rangle &= \langle (ax+by,cx+dy),(x',y')\rangle \\ &= (ax+by)\overline{x'} + (cx+dy)\overline{y'} \\ &= x\overline{(\overline{a}x'+\overline{c}y')} + y\overline{(\overline{b}x'+\overline{d}y')} \\ &= \langle (x,y),(\overline{a}x'+\overline{c}y',\overline{b}x'+\overline{d}y')\rangle\,,\end{aligned}$$

dvs, adjunkten till L har matrisen

$$[L^*]_\varepsilon = \begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d}\end{pmatrix} = ([L]_\varepsilon)^*\,.$$

Sats 10.5 (Matris till adjunkt)**.** *Låt V och W vara inre produktrum av ändlig dimension och låt β och γ vara ortonormala baser för V respektive W. Om $L\colon V \to W$ är en linjär avbildning så gäller att*

$$[L^*]_\gamma^\beta = ([L]_\beta^\gamma)^*\,.$$

Bevis. Vi tittar på hur L^* verkar på basvektorerna i γ. Antag att $\beta = \{v_1,\dots,v_n\}$ och $\gamma = \{w_1,\dots,w_m\}$. Då har vi att

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}w_i$$

där $[L]_\beta^\gamma = (a_{ij})$. Av definitionen av adjunkten har vi då att

$$\begin{aligned}\langle v_j, L^*(w_l)\rangle &= \langle L(v_j), w_l\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_{ij}w_i, w_l \right\rangle \\ &= a_{lj}\langle w_l, w_l\rangle \\ &= a_{lj}\,,\end{aligned}$$

eftersom γ är ortonormal. Detta säger alltså att $L^*(w_l) = \sum_{j=1}^n \overline{a_{lj}}v_j$, vilket ger att $[L^*]_\gamma^\beta = (\overline{a_{ji}}) = ([L]_\beta^\gamma)^*$. □

Sats 10.6 (Egenskaper hos adjunkt)**.** *Låt V och W vara inre produktrum av ändlig dimension och låt $L\colon V \to W$ vara en linjär avbildning. Då gäller följande:*

(1) $(L^*)^* = L$.
(2) $(L+M)^* = L^* + M^*$ *för alla linjära operatorer* $M\colon V \to V$.
(3) $(cL)^* = \overline{c}L^*$ *för alla* $c \in k$.
(4) $(L \circ M)^* = M^* \circ L^*$ *för alla linjära operatorer* $M\colon V \to V$.
(5) Om L *är inverterbar så är även* L^* *inverterbar och* $(L^{-1})^* = (L^*)^{-1}$.

Bevis. Vi bevisar ett påstående i taget (och använder oss av Övning 9.1 (5)):

(1) Detta följer direkt av [Matris till adjunkt] Sats 10.5 efter att vi valt ortonormala baser.
(2) För alla $v \in V, w \in W$ har vi $\langle v, (L+M)^*(w)\rangle = \langle (L+M)(v), w\rangle = \langle L(v), w\rangle + \langle M(v), w\rangle = \langle v, L^*(w)\rangle + \langle v, M^*(w)\rangle = \langle v, (L^* + M^*)(w)\rangle$.
(3) För alla $v \in V, w \in W$ har vi $\langle v, (cL^*)(w)\rangle = \overline{c}\langle v, L^*(w)\rangle$.
(4) Detta följer av motsvarade påstående för matriser och (Sats 10.6 [Matris till adjunkt]).
(5) För alla $v, w \in V$ har vi $\langle v, w\rangle = \langle v, L(L^{-1}(w))\rangle = \langle L^*(v), L^{-1}(w)\rangle = \langle ((L^{-1})^* L^*)(v), w\rangle$, vilket ger att $(L^{-1})^* = (L^*)^{-1}$.

$\square$

Referenser

[FIS03] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence, *Linear algebra.*, 4th. ed. (international) ed., Pearson, 2003 (English).