

Senast uppdaterad: 8 oktober 2025

11. Normala och självadjungerade avbildningar

I Kapitel 7 såg vi att en operator $L: V \rightarrow V$ är diagonaliserbar om och endast om det finns en ordnad bas av egenvektorer till L och i Kapitel 8 studerade vi kriterier för diagonaliserbarhet. I detta avsnitt ska vi studera när ett inre produktrum V har en *ortonormal* bas av egenvektorer till en operator $L: V \rightarrow V$.

Definition 11.1. En linjär operator $L: V \rightarrow V$ på ett inre produktrum V kallas *normal* om $LL^* = L^*L$.

Sats 11.1 (Egenskaper hos normala operatorer). *Låt L vara en normal operator på ett inre produktrum V . Då gäller följande:*

- (1) $\|L(v)\| = \|L^*(v)\|$ för alla $v \in V$.
- (2) Operatoren $L - cI$ är normal för alla $c \in k$.
- (3) Om v är en egenvektor till L med egenvärde λ så är v också en egenvektor till L^* med egenvärde $\bar{\lambda}$.
- (4) Egenvektorer till L som hör till olika egenvärden är ortogonala.

Bevis. (1) Vi har att

$$\|L(v)\|^2 = \langle L(v), L(v) \rangle = \langle v, L^*L(v) \rangle = \langle v, LL^*(v) \rangle = \langle L^*(v), L^*(v) \rangle = \|L^*(v)\|^2.$$

(2) Vi har att

$$\begin{aligned} (L - cI)(L - cI)^* &= (L - cI)(L^* - \bar{c}I) \\ &= LL^* - cL^* - \bar{c}L + |c|^2I \\ &= (L - cI)^*(L - cI). \end{aligned}$$

(3) Antag att v är en egenvektor till L med egenvärde λ . Eftersom $L - \lambda I$ är normal av (2), så har vi, av (1), att

$$0 = \|(L - \lambda I)(v)\| = \|(L - \lambda I)^*(v)\| = \|L^*(v) - \bar{\lambda}v\|,$$

vilket ger att $L^*(v) = \bar{\lambda}v$. (4) Antag att v och w är egenvektorer till L med egenvärden λ respektive μ , där $\lambda \neq \mu$. Då har vi att

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle L(v), w \rangle = \langle v, L^*(w) \rangle = \mu \langle v, w \rangle.$$

Eftersom $\lambda \neq \mu$ så måste alltså $\langle v, w \rangle = 0$.

□

Sats 11.2 (Karaktärisering av normala operatorer). *En operator L på ett inre produktrum över $\mathbb{C}$ (eller mer generellt sådan att $p_L(x)$ splittrar) är normal om och endast om det finns en ortonormal bas av egenvektorer till L .*

Bevis. Antag först att L är normal och att det karaktäristiska polynomet splittrar. Vi använder oss av induktion över $\dim V$. Om $\dim V = 1$ så är varje vektor i V en egenvektor till L och vi kan välja en ortonormal bas bestående av en egenvektor. Antag nu att påståendet gäller för alla inre produktrum med dimension mindre än n och låt V vara ett inre produktrum med $\dim V = n$. Eftersom $p_L(x)$ splittrar i linjära faktorer så finns ett egenvärde λ till L . Låt v vara en normerad egenvektor till L med egenvärde λ . För varje $w \in \text{Span}(v)^\perp$ gäller att $L(w) \in \text{Span}(v)^\perp$:

$$\langle L(w), v \rangle = \langle w, L^*(v) \rangle = \langle w, \bar{\lambda}v \rangle = 0.$$

Låt L' vara restriktionen av L till $\text{Span}(v)^\perp$. Då är L' en operator på det inre produktrummet $\text{Span}(v)^\perp$ med dimension $n - 1$ och $p_{L'}(x) = (\lambda - x)p_L(x)$. Dvs $p_{L'}$ splittrar i linjära faktorer. Notera att L' är normal eftersom L är normal och det för alla $u, w \in \text{Span}(v)^\perp$ gäller att $\langle u, (L')^*(w) \rangle = \langle L'(u), w \rangle = \langle L(u), w \rangle = \langle u, L^*(w) \rangle$, dvs $(L')^*(w) = L^*(w)$. Av induktionsantagandet finns en ordnad ortonormal bas $\{v_2, \dots, v_n\}$ för $\text{Span}(v)^\perp$ så att $[L']_{\{v_2, \dots, v_n\}}$ är diagonal. Detta bevisar att $[L]_\beta$ är diagonal där $\beta = \{v, v_2, \dots, v_n\}$ (ortonormal) eftersom

$$[L]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & [L']_{\{v_2, \dots, v_n\}} \end{pmatrix}$$

(där 0 betyder en nollkolumn/rad). Vi har alltså funnit en ortonormal bas av egenvektorer till L .

Omvänt, antag att L har en ortonormal bas β bestående av egenvektorer till L . Då är matrisen $[L]_\beta$ diagonal med egenvärdena på diagonalen. Alltså är även $[L^*]_\beta = [L]_\beta^*$ diagonal med komplexkonjugerade egenvärden till L på diagonalen. Alltså har vi att $[LL^*]_\beta = [L]_\beta[L]_\beta^* = [L]_\beta^*[L]_\beta = [L^*L]_\beta$. Dvs, $LL^* = L^*L$. □

Definition 11.2. En linjär operator $L: V \rightarrow V$ på ett inre produktrum V kallas *självadjungerad* (eller *hermites*) om $L = L^*$.

Exempel 11.1. Varje matrisrepresentation av en inre produkt är självdjungerad (Se Sats 9.5).

Övning

Varje självdjungerad operator är normal med reella egenvärden.

Lemma 11.3. Låt $L: V \rightarrow V$ vara en självdjungerad operator på ett inre produktrum av ändlig dimension över $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Då är alla egenvärden till L reella och det karaktäristiska polynomet splittrar i linjära faktorer $p_L(x)$ (även då $k = \mathbb{R}$).

Bevis. Låt v vara en egenvektor till L med egenvärde λ . Då har vi att

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle L(v), v \rangle = \langle v, L(v) \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

vilket ger att $\lambda = \bar{\lambda}$ eftersom $\langle v, v \rangle > 0$. Det visar alltså att alla egenvärden är reella. Det återstår att visa att det finns tillräckligt med reella egenvärden för att splittra det karaktäristiska polynomet. Välj en ortonormal bas för V . Då är matrisen $[L]_\beta$ självdjungerad. Denna matris definierar en linjär avbildning $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, men också en linjär avbildning $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Dessa två linjära avbildningar har samma karaktäristiska polynom eftersom båda kan beräknas med hjälp av matrisen $[L]_\beta$. Detta karaktäristiska polynom splittrar i linjära faktorer över $\mathbb{C}$ och eftersom alla egenvärden är reella så är alla linjära faktorer definierade över $\mathbb{R}$ och $p_L(x)$ splittrar i linjära faktorer över $\mathbb{R}$. $\square$

Sats 11.4 (Karaktärisering av självdjungerade operatorer). En operator $L: V \rightarrow V$ på ett reellt vektorrum av ändlig dimension n är självdjungerad om och endast om det finns en ortonormal bas av egenvektorer till L .

Bevis. Existensen av en ortonormal bas av egenvektorer till L följer direkt av Lemma 11.3 i kombination med [Karaktärisering av normala operatorer] Sats 11.2.

Antag omvänt att det finns en ortonormal ordnad bas β av egenvektorer till L . Av Sats 11.1 [Egenskaper hos normala operatorer] och Övning 11 har vi $[L]_\beta = [L^*]_\beta$, dvs. $L = L^*$. $\square$

Diskussionsfrågor

(1) Vad kan vi säga om egenvärdena till LL^* då L är normal?

(2) Är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

självdjungead? normal? diagonaliserbar? inverterbar?

(3) Är matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

självdjungead? normal? diagonaliserbar? inverterbar?

(4) Är matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

självdjungead? normal? diagonaliserbar? inverterbar?

Referenser

- [FIS03] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence, *Linear algebra.*, 4th. ed. (international) ed., Pearson, 2003 (English).