

Senast uppdaterad: 6 oktober 2025

12. Unitära och ortogonala avbildningar och QR-faktorisering

I förra kapitlet tittade vi på vad det innebär att en operator L på ett inre produktrum V (över $\mathbb{C}$ respektive $\mathbb{R}$) har en uppsättning ortonormala egenvektorer som utgör en bas för V . I detta kapitel ska vi undersöka vad som händer då vi lägger till det ytterligare antagandet att alla egenvärden till L har norm 1, dvs. de ligger på enhetscirkeln i det komplexa talplanet. Som vi kommer att se är det precis dessa L som bevarar normen av vektorer.

Övning

Visa att en linjär avbildning $L: V \rightarrow W$ bevarar inre produkten om och endast om $L^*L = I$.

Definition 12.1. Låt V och W vara inre produktrum över en kropp k . En linjär avbildning $L: V \rightarrow W$ sägs vara en *isometri* om $\|L(v)\| = \|v\|$ för alla $v \in V$.

Det är klart att varje isometri är injektiv. Det är också klart att varje avbildning som bevarar inre produkten är en isometri, eftersom $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Det visar sig att även det omvända gäller, dvs. varje isometri bevarar inre produkten.

Sats 12.1 (Isometrier). Låt $L: V \rightarrow W$ vara en linjär avbildning mellan inre produktrum över en kropp k . Följande egenskaper är ekvivalenta:

- (1) L bevarar inre produkten.
- (2) $L^*L = I$.
- (3) L är en isometri.

Bevis. Det är klart att (1) är ekvivalent med (2) och att (1) implicerar (3). Vi visar att (3) implicerar (1). Antag att (3) gäller. Då $k = \mathbb{R}$ så påstår vi att

$$\langle v, w \rangle = \frac{\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2}.$$

Detta följer från att

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2.\end{aligned}$$

När $k = \mathbb{C}$ så kan vi dela upp i realdel och imaginärdel och vi påstår att:

$$\begin{aligned}\langle v, w \rangle &= \Re \langle v, w \rangle + \Im \langle v, w \rangle \\ &= \frac{\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} + i \frac{\|v + iw\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2}.\end{aligned}$$

Vi har redan visat att den första delen ger den reella delen av $\langle v, w \rangle$. Vi visar att den andra delen ger den imaginära delen. Kom ihåg att varje komplext tal $a + ib$ uppfyller $\Im z := b = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$. Vi har då att

$$\begin{aligned}\|v + iw\|^2 &= \langle v + iw, v + iw \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + i\langle v, w \rangle + i\langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + i\langle v, w \rangle - i\overline{\langle v, w \rangle} + \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 - 2i\Im(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2,\end{aligned}$$

vilket visar påståendet. □

Exempel 12.1. En linjär operator $L: V \rightarrow V$ som bevarar den inre produkten behöver ej vara surjektiv om V har oändlig dimension. Ett exempel ges av vektorrummet

$$\ell^2 = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$$

med den inre produkten $\langle (x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ och den linjära avbildningen $L: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ som skickar $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ till $(0, x_1, x_2, x_3, \dots)$. Denna avbildning bevarar inre produkten eftersom

$$\langle L(v), L(w) \rangle = \langle (0, x_1, x_2, x_3, \dots), (0, y_1, y_2, y_3, \dots) \rangle = \langle v, w \rangle$$

för alla $v, w \in \ell^2$.

Nästa sats visar dock att om V har *ändlig* dimension så är varje isometri $V \rightarrow V$ en isomorfi av inre produktrum.

Följdsats 12.2 (Unitära operatorer). Låt L vara en linjär operator på ett inre produktrum V av ändlig dimension. Följande är ekvivalent:

- (1) $LL^* = L^*L = I$.
- (2) $\langle Lv, Lw \rangle = \langle v, w \rangle$ för alla $v, w \in V$.
- (3) För varje ortonormal bas β för V så är $L(\beta)$ också en ortonormal bas för V .
- (4) Det existerar en ortonormal bas β för V sådan att $L(\beta)$ också är en ortonormal bas för V .
- (5) $\|Lv\| = \|v\|$ för alla $v \in V$.

Bevis. Att (1), (2), (5) är ekvivalenta såg vi i Sats 12.1. Vi visar att (2) implicerar (3). Anta att (2) gäller. Av (1) vet vi att L är en isomorfi och därmed är $L(\beta)$ en bas för varje bas β . Av (2) följer att $L(\beta)$ är ortonormalt, vilket ger (3). Att (3) implicerar (4) följer av Gram–Schmidt eftersom V har ändlig dimension. Antag nu att (4) gäller. Då gäller (2) för alla basvektorer i β och därmed för alla vektorer i V genom linjäritet, vilket ger (2). $\square$

Definition 12.2. En operator L på ett inre produktrum V över $\mathbb{C}$ (över $\mathbb{R}$) sägs vara *unitär* (*ortogonal*) om den uppfyller de ekvivalenta villkoren i Sats 12.2.

Följdsats 12.3. För en linjär operator L på ett inre produktrum V över en kropp k gäller följande:

- (1) Om $k = \mathbb{C}$ så är L unitär om och endast om det finns en ortonormal bas för V bestående av egenvektorer till L med tillhörande egenvärden på enhetscirkeln.
- (2) Om $k = \mathbb{R}$ så är L ortogonal och självadjungerad om och endast om det finns en ortonormal bas för V bestående av egenvektorer till L med tillhörande egenvärden på $\{-1, 1\}$.

Bevis. Antag först att L är unitär (ortogonal och självadjungerad). Då har vi från Sats 11.3 (Sats 11.5) att det finns en ortonormal bas för V bestående av egenvektorer till L . Om v är en sådan egenvektor med egenvärde λ så har vi $\|v\| = \|Lv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$. Eftersom $v \neq 0$ så är $\|v\| \neq 0$ och därmed måste $|\lambda| = 1$.

Omvänt, anta att det finns en ortonormal bas β för V bestående av egenvektorer till L med tillhörande egenvärden på enhetscirkeln (på $\{-1, 1\}$). Då är L diagonaliserbar med

enhetsmatris som diagonalmatris i denna bas, vilket visar att L är unitär (ortogonal och självdjungerad). $\square$

Sats 12.4 (Unitära matriser). *En $n \times n$ -matris M uppfyller $M^*M = I$ om och endast om dess kolumner bildar en ortonormal bas för k^n .*

Bevis. Antag att M har kolumner $v_1, \dots, v_n$. Då har vi $(M^*M)_{ij} = v_i^T v_j = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, där δ_{ij} är Kroneckers delta. Alltså är $M^*M = I$ om och endast om kolumnerna $v_1, \dots, v_n$ bildar en ortonormal bas för k^n (Följdsats 9.3). $\square$

Definition 12.3. En $n \times n$ -matris M sägs vara *unitär* (eller *ortogonal* om $k = \mathbb{R}$) om $M^*M = I$.

Notera att $M^*M = I$ om och endast om $MM^* = I$. Alltså är M inverterbar med invers $M^{-1} = M^*$.

Följdsats 12.5. *Determinanten av en unitär (eller ortogonal) matris är av absolutbelopp 1.*

12.1. QR-faktorisering. I det här avsnittet ska vi visa att varje $m \times n$ -matris A (med $m \geq n$) kan skrivas som produkten av en unitär (eller ortogonal) matris Q och en övre triangulär matris R , det vill säga $A = QR$:

$$\begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_m \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Sats 12.6 (QR-faktorisering). *Varje $m \times n$ -matris A (med $m \geq n$) kan skrivas som produkten av en unitär (eller ortogonal) matris Q och en övre triangulär matris R , det vill säga $A = QR$.*

Bevis. Vi använder Gram–Schmidts metod för att konstruera Q och R . Låt A ha kolumnerna $a_1, a_2, \dots, a_n$ och låt $u_1, \dots, u_n$ vara de normerade vektorerna vi får om vi utför Gram–Schmidts metod. Utvidga dessa till en ortonormal bas för k^m : $\{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_m\}$. Definiera nu R genom $R_{ij} = \langle a_j, u_i \rangle$ för $1 \leq i \leq j \leq n$. Det följer då från [Projektion på bas] Sats 9.2 att $A = QR$. $\square$

Följdsats 12.7. Varje $m \times n$ -matris A (med $m \leq n$) kan skrivas som produkten av en undre triangulär matris L och en unitär (eller ortogonal) matris Q , det vill säga $A = LQ$.

Bevis. Av QR-faktorisering kan vi skriva $A^T = QR$ där Q är en unitär (eller ortogonal) matris och R är en övre triangulär matris. Tar vi transponatet igen så får vi $A = (A^T)^T = R^T Q^T$ där R^T är en undre triangulär matris och Q^T är en unitär (eller ortogonal) matris. $\square$

Exempel 12.2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi applicerar Gram–Schmidts metod: Först normaliserar vi den första kolumnen och får $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$. Sedan ortogonaliserar vi den andra kolumnen mot u_1 (den är faktiskt redan ortogonal mot u_1):

$$\begin{aligned} u'_2 &= (-1, 2, 1)^T - \frac{1}{2} \langle (-1, 2, 1), (1, 0, 1) \rangle (1, 0, 1)^T \\ &= (-1, 2, 1)^T \end{aligned}$$

och normerar: $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)^T$. Vi får en tredje vektor, ortogonal till både u_1 och u_2 genom att ta kryssprodukten (längden är oviktig):

$$u'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi normerar och får $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)^T$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Referenser

- [FIS03] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence, *Linear algebra.*, 4th. ed. (international) ed., Pearson, 2003 (English).