Kontrollskrivning 2 (Version 1) Namn: ______________________

MM5012, Linjär Algebra

Skrivtiden är 30 min. Inga hjälpmedel är tillåtna. Visa legitimation/ID-kort. Skriv dina lösningar på detta papper. Maximalt antal poäng på denna kontrollskrivning: 10. Motivera dina lösningar.

Uppgift 1 (*3p*) Låt α och β vara godtyckliga ordnade baser för ett vektorrum V av ändlig dimension och låt L vara en linjär operator på V. Visa att $\det([L]_\alpha) = \det([L]_\beta)$ genom att använda att $[L]_\beta [I]_\alpha^\beta = [I]_\alpha^\beta [L]_\alpha$.

Lösning: Basbytesmatrisen $[I]_\alpha^\beta$ är inverterbar, dvs $\det([I]_\alpha^\beta) \neq 0$. Då determinanten är multiplikativ och $[L]_\beta [I]_\alpha^\beta = [I]_\alpha^\beta [L]_\alpha$ får vi

$$\det([L]_\beta)\det([I]_\alpha^\beta) = \det([I]_\alpha^\beta)\det([L]_\alpha)$$

och genom att dividera med $\det([I]_\alpha^\beta)$ får vi det önskade resultatet.

Uppgift 2 (*2p+1p*) (a) Hitta alla egenvärden till operatorn $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som med avseende på standardbasen ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Avgör huruvida L är diagonaliserbar. (OBS: Du behöver inte hitta egenvektorer.)

Lösning: (a) Det karaktäristiska polynomet är $(1-x)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$, så egenvärdena är 3 och -1.

(b) Eftersom egenvärdena är olika så är motsvarande egenvektorer linjärt oberoende och ger därför en bas till $\mathbb{R}^2$.

Uppgift 3 (*4p*) Verifiera att Cayley–Hamiltons sats gäller för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dvs, att $p_A(A) = 0$ (nollmatrisen) där $p_A(x)$ är det karakteristiska polynomet för A.

Lösning: Det karaktäristiska polynomet är x^2 och $p_A(A) = A^2 = 0$.

Totalpoäng: