

Senast uppdaterad: 17 oktober 2025

14. Bilinjära och kvadratiska former

Vi ska nu studera ett klassiskt begrepp inom linjär algebra, nämligen bilinjära och kvadratiska former.

14.1. **Bilinjära former.** Vi börjar med att definiera bilinjära former.

Definition 14.1. Låt V vara ett vektorrum över en kropp k . En funktion

$$f: V \times V \rightarrow k$$

kallas för en *bilinjär form* om den är linjär i varje argument, det vill säga: för varje $v \in V$ så är funktionerna $f(-, v): V \rightarrow k$; $w \mapsto f(w, v)$ och $f(v, -): V \rightarrow k$; $w \mapsto f(v, w)$ linjära.

Exempel 14.1. Om $A \in M_{n \times n}(k)$ så definierar vi en bilinjär form $f: k^n \times k^n \rightarrow k$ genom

$$f(x, y) = x^T A y$$

för alla (kolumnvektorer) $x, y \in k^n$. Detta är en bilinjär form eftersom matrismultiplikation distribuerar över addition och skalärmultiplikation: $(aB + C)A = aBA + CA$ och $A(aB + C) = aAB + AC$.

T.ex. om $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ så är

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2 \end{aligned}$$

en bilinjär form.

Som vanligt när vi betraktar funktioner till en kropp kan vi definiera addition och skalärmultiplikation av bilinjärformer punktvis: om $f, g: V \times V \rightarrow k$ är bilinjärformer och $a \in k$ så definierar vi

$$(f + g)(v, w) = f(v, w) + g(v, w) \quad \text{och} \quad (af)(v, w) = af(v, w)$$

för alla $v, w \in V$. Det är lätt att se att $f + g$ och af också är bilinjärformer. Därmed bildar mängden av alla bilinjärformer på V ett vektorrum över k , vilket vi betecknar med $\text{Bil}(V)$.

Sats 14.1 (Matrisrepresentation av bilinjära former). *Låt V vara ett ändligdimensionellt vektorrum över en kropp k och låt $f: V \times V \rightarrow k$ vara en bilinjär form. Om vi väljer en bas $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ för V så är avbildningen*

$$\begin{aligned} \text{Bil}(V) &\rightarrow M_{n \times n}(k) \\ f &\mapsto [f]_\beta := (f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

en isomorfi av vektorrum.

Bevis. Det är lätt att se att avbildningen är linjär. För att visa att den är bijektiv så definierar vi en invers: för varje matris $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(k)$ definierar vi en bilinjär form $f_A: V \times V \rightarrow k$ genom

$$f_A(v, w) = [v]_\beta^T A [w]_\beta.$$

Av Exempel 14.1 är detta en bilinjär form. För att visa att $A \mapsto f_A$ är en invers till $F \mapsto [f]_\beta$ räcker det att notera att

$$f_{[f]_\beta}(v_i, v_j) = [v_i]_\beta^T [f]_\beta [v_j]_\beta = f(v_i, v_j)$$

för varje par av basvektorer $v_i, v_j \in \beta$ och att

$$([f_A]_\beta)_{ij} = f_A(v_i, v_j) = [v_i]_\beta^T A [v_j]_\beta = A_{ij}$$

för varje matris $A \in M_{n \times n}(k)$. □

Följdsats 14.2. *Om V är ett ändligdimensionellt vektorrum över en kropp k och β är en ordnad bas för V så har vi*

$$f(v, w) = [v]_\beta^T [f]_\beta [w]_\beta$$

för alla $v, w \in V$ och alla bilinjärformer $f: V \times V \rightarrow k$.

Vi ska nu se hur matrisrepresentationen av en bilinjär form förändras när vi byter bas.

Sats 14.3 (Basbyte för bilinjära former). Låt V vara ett ändligdimensionellt vektorrum över en kropp k och låt $f: V \times V \rightarrow k$ vara en bilinjär form. Om β och γ är ordnade baser för V så gäller

$$[f]_{\gamma} = ([I]_{\gamma}^{\beta})^T [f]_{\beta} [I]_{\gamma}^{\beta}.$$

Bevis. Av Följdsats 14.2 räcker det att notera att de bilinjära former som definieras av $[f]_{\gamma}$ respektive $([I]_{\gamma}^{\beta})^T [f]_{\beta} [I]_{\gamma}^{\beta}$ i basen γ är lika:

$$\begin{aligned} [v]_{\gamma}^T [f]_{\gamma} [w]_{\gamma} &= f(v, w), \\ [v]_{\gamma}^T (([I]_{\gamma}^{\beta})^T [f]_{\beta} [I]_{\gamma}^{\beta}) [w]_{\gamma} &= ([I]_{\gamma}^{\beta} [v]_{\gamma})^T [f]_{\beta} ([I]_{\gamma}^{\beta} [w]_{\gamma}) = [v]_{\beta}^T [f]_{\beta} [w]_{\beta} = f(v, w) \end{aligned}$$

för alla $v, w \in V$. □

14.2. Symmetriska bilinjära former. Vi ska nu studera bilinjära former vars matrisrepresentation är symmetrisk (i varje ordnad bas).

Definition 14.2. En bilinjär form $f: V \times V \rightarrow k$ kallas *symmetrisk* om $f(v, w) = f(w, v)$ för alla $v, w \in V$.

Sats 14.4 (Matrisen till en symmetrisk form). Låt V vara ett ändligdimensionellt vektorrum över en kropp k och låt $f: V \times V \rightarrow k$ vara en bilinjär form. Följande påståenden är ekvivalenta:

- (i) f är symmetrisk.
- (ii) $[f]_{\beta}$ är en symmetrisk matris för någon ordnad bas β för V .
- (iii) $[f]_{\beta}$ är en symmetrisk matris för alla ordnade baser β för V .

Bevis. Om f är symmetrisk så är $[f]_{\beta}$ symmetrisk för varje ordnad bas β eftersom

$$([f]_{\beta})_{ij} = f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i) = ([f]_{\beta})_{ji}$$

för alla $1 \leq i, j \leq n$. Dvs (i) implicerar (iii). Det är vidare klart att (iii) implicerar (ii).

Å andra sidan, om $[f]_{\beta}$ är symmetrisk för någon ordnad bas β så är f symmetrisk eftersom alla vektorer i V kan skrivas som linjärkombinationer av basvektorerna. Detta visar att (ii) implicerar (i). □

14.3. Kvadratiska former. Vi ska nu definiera ett klassiskt begrepp inom linjär algebra, nämligen kvadratiska former.

Definition 14.3. En *kvadratisk form* på ett vektorrum V över en kropp k är en funktion $q: V \rightarrow k$ sådan att det finns en symmetrisk bilinjär form $f: V \times V \rightarrow k$ med

$$q(v) = f(v, v)$$

för alla $v \in V$.

Exempel 14.2. Om $A \in M_{n \times n}(k)$ är en symmetrisk matris så definierar vi en kvadratisk form $q: k^n \rightarrow k$ genom

$$q(x) = x^T A x$$

för alla (kolumnvektorer) $x \in k^n$. Detta är en kvadratisk form eftersom den är av formen $f(x, x)$ där $f: k^n \times k^n \rightarrow k$ är den bilinjära formen definierad av $f(x, y) = x^T A y$.

T.ex. om $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ så är

$$q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} x \mapsto (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ = 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + x_2^2 = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \end{aligned}$$

en kvadratisk form.

Sats 14.5. Om q är en kvadratisk form på ett ändligdimensionellt vektorrum V över en kropp k där $2 \neq 0$ så finns en unik symmetrisk bilinjär form $f: V \times V \rightarrow k$ sådan att $q(v) = f(v, v)$ för alla $v \in V$, nämligen den bilinjära form f som ges av

$$f(v, w) = \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$$

för alla $v, w \in V$.

Bevis. Detta följer av att $q(v+w) = f(v+w, v+w) = f(v, v) + f(v, w) + f(w, v) + f(w, w) = q(v) + 2f(v, w) + q(w)$. $\square$

Referenser

- [FIS03] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence, *Linear algebra.*, 4th. ed. (international) ed., Pearson, 2003 (English).