

## MM5012, Linjär Algebra

Skrivtiden är 30 min. Inga hjälpmedel är tillåtna. Visa legitimation/ID-kort. Skriv dina lösningar på detta papper. Maximalt antal poäng på denna kontrollskrivning: 10. Motivera dina lösningar.

**Uppgift 1** (3p) Hitta  $b$  så att  $\{x-1, 3x+b\}$  är en ortogonal bas för  $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$  (polynom av grad högst 1) med inre produkt  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg \, dx$ .

**Lösning:** Vi löser ekvationen  $0 = \langle x-1, 3x+b \rangle = \int_{-1}^1 (x-1)(3x+b) \, dx = \int_{-1}^1 (3x^2 + (b-3)x - b) \, dx = 2(1-b)$ . Detta ger att  $b = 1$ .

**Uppgift 2** (2p+1p) (a) Definiera vad det innebär att en operator  $L$  på ett inre produktrum är:

- (1) Självdjungerad,
- (2) Normal,
- (3) Unitär.

(b) Skriv implikationspilar,  $(X) \Rightarrow (Y)$ , för de tre egenskaperna (1), (2), (3) ovan.

**Lösning:** (a) Låt  $L^*$  vara den Hermiteska adjunkten till  $L$ . Då har (1)  $L$  är självdjungerad om  $L = L^*$ , (2)  $L$  är normal om  $LL^* = L^*L$ , och (3)  $L$  är unitär om  $L^*L = I$ .  
(b) (1)  $\Rightarrow$  (2) och (3)  $\Rightarrow$  (2).

**Uppgift 3** (4p) Hitta matrisen  $R$  i QR-faktoriseringen  $A = QR$  av matrisen  $A$ , där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

**Lösning:** Vi har att  $R_{ij} = \langle v_i, w_j \rangle$  för  $1 \leq j \leq i \leq 2$  där  $v_i$  betecknar kolumnerna i  $A$  och  $w_j$  kolumnerna i  $Q$ . Vi får  $\langle v_1, w_1 \rangle = \sqrt{2}$ ,  $\langle v_2, w_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \rangle = -1/\sqrt{2}$  och  $\langle v_2, w_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \rangle = \sqrt{3}/\sqrt{2}$ . Alltså får vi

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Totalpoäng: