

MM5012, Linjär Algebra

Skrivtiden är 30 min. Inga hjälpmedel är tillåtna. Visa legitimation/ID-kort. Skriv dina lösningar på detta papper. Maximalt antal poäng på denna kontrollskrivning: 10. Motivera dina lösningar.

Uppgift 1 (3p) Hitta b så att $\{3x - 3, x + b\}$ är en ortogonal bas för $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ (polynom av grad högst 1) med inre produkt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg \, dx$.

Lösning: Vi löser ekvationen $0 = \langle 3x - 3, x + b \rangle = \int_{-1}^1 (3x - 3)(x + b) \, dx = \int_{-1}^1 (3x^2 + (3b - 3)x - 3b) \, dx = 2(b - 3)$. Detta ger att $b = 1/3$.

Uppgift 2 (2p+1p) (a) Definiera vad det innebär att en operator L på ett inre produktrum är:

- (1) Unitär,
- (2) Normal,
- (3) Självdjungerad.

(b) Skriv implikationspilar, $(X) \Rightarrow (Y)$, för de tre egenskaperna (1), (2), (3) ovan.

Lösning: (a) Låt L^* vara den Hermiteska adjunkten till L . Då har (1) L är unitär om $L^*L = I$, (2) L är normal om $LL^* = L^*L$, och (3) L är självdjungerad om $L = L^*$.
(b) (1) $\Rightarrow$ (2) och (3) $\Rightarrow$ (2).

Uppgift 3 (4p) Hitta matrisen R i QR-faktoriseringen $A = QR$ av matrisen A , där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Lösning: Vi har att $R_{ij} = \langle v_i, w_j \rangle$ för $1 \leq j \leq i \leq 2$ där v_i betecknar kolumnerna i A och w_j kolumnerna i Q . Vi får $\langle v_1, w_1 \rangle = \sqrt{2}$, $\langle v_2, w_1 \rangle = \langle (1 \ 0 \ 1), (0 \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{-1}{\sqrt{2}}) \rangle = -1/\sqrt{2}$ och $\langle v_2, w_2 \rangle = \langle (1 \ 0 \ 1), (\frac{2}{\sqrt{6}} \ \frac{1}{\sqrt{6}} \ \frac{1}{\sqrt{6}}) \rangle = \sqrt{3}/\sqrt{2}$. Alltså får vi

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Totalpoäng: