KOMPLETTERANDE MATERIAL TILL KURSEN MATEMATIK II, MATEMATISK ANALYS DEL A VT 2015

ANDRZEJ SZULKIN

1. Supremum, infimum och kontinuerliga funktioner

I appendix A3 i [PB2] definieras begreppen supremum och infimum. Där visas också att axiomet om monotona talföljder är ekvivalent med supremumaxiomet. Vi påminner om att en mängd M kallas *uppåt begränsad* om det finns ett tal b sådant att $x \leq b$ för alla $x \in M$. Varje tal b som har denna egenskap kallas en *majorant* för M, och det minsta av dessa tal b (dvs. den minsta majoranten) kallas *supremum av* M. På motsvarande sätt kallas en mängd M *nedåt begränsad* om det finns ett tal a sådant att $a \leq x$ för alla $x \in M$, varje tal a med denna egenskap kallas en *minorant* för M, och den största minoranten kallas *infimum av* M. Talet $\sup M$ kan, men behöver inte tillhöra mängden M. Om $\sup M \in M$, säger vi att supremum antas eller att M har ett största värde (som då är lika med $\sup M$). Om $\inf M \in M$, så säger vi på motsvarande sätt att infimum antas eller att M har ett minsta värde.

Exempel 1. Låt $M_1 = \,]-1, 1]$ och $M_2 = [-1, 1[$. Då är $\sup M_1 = \sup M_2 = 1$ och $\inf M_1 = \inf M_2 = -1$. M_1 har ett största värde (som är lika med 1) men inget minsta värde eftersom $1 \in M_1$ medan $-1 \notin M_1$. För M_2 är det tvärtom, -1 är minsta värdet men det finns inget största värde i M_2.

Supremumaxiomet säger att varje icke-tom uppåt begränsad mängd $M \subseteq \mathbf{R}$ har ett supremum (se appendix A3 i [PB2]). Man kan visa att supremumaxiomet är ekvivalent med påståendet att varje icke-tom nedåt begränsad mängd $M \subseteq \mathbf{R}$ har ett infimum.

Vi utgår från supremumaxiomet och visar att varje monoton funktion har ett gränsvärde, egentligt eller oegentligt, då $x \to +\infty$. Om M inte är uppåt begränsad, säger man ibland att $\sup M = +\infty$. Man sätter också $\inf M = -\infty$ om M inte är nedåt begränsad. Nedan kommer vi att använda den här konventionen.

Som vanligt betecknar D_f definitionsmängden och V_f värdemängden för en funktion f.

Sats 1. *Låt f vara en funktion sådan att $[a, +\infty[\subseteq D_f$ för något a (dvs. f är definierad för alla $x \geq a$). Då gäller:*
(i) Om f är växande, så är

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A, \quad \text{där} \quad A = \sup_{x\in D_f} f(x).$$

(ii) Om f är avtagande, så är

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A, \quad \text{där} \quad A = \inf_{x\in D_f} f(x).$$

Vi noterar att om f inte är uppåt begränsad, så är $A = +\infty$ i (i) och om f inte är nedåt begränsad, är $A = -\infty$ i (ii).

Bevis. (i) Vi betraktar två fall: f uppåt begränsad och f obegränsad uppåt.

Antag först att f är uppåt begränsad. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Eftersom $A = \sup f(x)$, är $f(x) \leq A < A + \varepsilon$ för alla $x \geq a$. Enligt definitionen av supremum finns det ett tal $\omega \geq a$ sådant att $f(\omega) > A - \varepsilon$ (annars vore ju $\sup f(x) \leq A - \varepsilon$). Eftersom f är växande, är $f(x) \geq f(\omega) > A - \varepsilon$ då $x > \omega$. Sammanfattningsvis: om $x > \omega$, så är $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, dvs. $|f(x) - A| < \varepsilon$. Då det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett tal ω som ovan, har vi visat att $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. (Notera att ω är beroende av ε. I allmänhet behöver man ta större ω ju mindre ε är.)

Antag nu att f inte är uppåt begränsad. Då är $A = +\infty$. Låt c vara ett givet (stort) tal. Eftersom f är obegränsad uppåt, existerar det ett $\omega \geq a$ sådant att $f(\omega) > c$. Om $x > \omega$, är $f(x) \geq f(\omega)$. Alltså: för varje c existerar ett $\omega \geq a$ sådant att om $x > \omega$, så är $f(x) > c$. Vi har visat att $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(ii) visas genom att modifiera resonemanget ovan på ett lämpligt sätt. $\square$

Sats 2. *Om funktionen f är kontinuerlig i det slutna och begränsade intervallet $[a, b]$, så har f ett största och ett minsta värde där.*

Det här är sats 3 i appendix C i [PB1]. Beviset nedan använder begreppen supremum och infimum och är betydligt enklare än i [PB1]. Att argumentet i [PB1] är svårare beror på att supremum och infimum inte har definierats där.

Bevis. Låt $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Då är $M \leq \infty$. Enligt definitionen av supremum existerar det en talföljd $(x_k) \subseteq [a, b]$ sådan att $f(x_k) \to M$ (se uppgift 3.10 nedan). Enligt Bolzano-Weierstrass sats (lemma 2 i appendix C i [PB1]) innehåller (x_k) en konvergent delföljd (x_{k_j}), dvs. $x_{k_j} \to \xi$ för något $\xi \in [a, b]$. Eftersom f är kontinuerlig, så är $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = f(\xi)$, vilket ger $f(\xi) = M$. Alltså är M funktionens största värde. Notera att i efterhand ser man att $M < \infty$ då värdet $f(\xi)$ är ändligt.

För att visa att f har ett minsta värde sätter vi $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ och resonerar som ovan. $\square$

Anmärkning 1. Det är viktigt att intervallet är slutet. Om vi har ett öppet intervall $]a, b[$ och agerar som i beviset ovan, så kan det hända att $x_{k_j} \to \xi$, där $\xi = a$ eller b, men punkterna a och b ingår ju inte i definitionsmämgden för f. T.ex. är funktionen $f(x) = \tan x$, $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ kontinuerlig men eftersom $M = \infty$ och $m = -\infty$, saknar f största och minsta värde.

Observera att även funktionen $f(x) = x$, $x \in]-1, 1[$ saknar största och minsta värde. Här är $M = 1$ och $m = -1$ men värdena 1 och -1 antas aldrig i intervallet $]-1, 1[$.

Definition 1. Antag att $]a - \delta_0, a[\subseteq D_f$ för något $\delta_0 > 0$. Vi säger att $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = A$ om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ ($\delta \leq \delta_0$) sådant att om $a - \delta < x < a$, så är $|f(x) - A| < \varepsilon$. Gränsvärdet $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ definieras på liknande sätt ($a - \delta < x < a$ ersätts med $a < x < a + \delta$).

Dessa gränsvärden skiljer sig något från höger- och vänstergränsvärdena i avsnitt 2.1 i [PB1]. Vanligtvis betecknas gränsvärdena med symbolerna $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ och $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ oavsett om man använder definitionen ovan eller den i [PB1]. För att undvika sammanblandning har vi dock infört här de något ovanliga beteckningarna $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ och $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.

Sats 3. *Låt f vara en funktion sådan att D_f innehåller en omgivning av punkten a.*
(i) Om f är växande, så är

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = A,\ \text{där } A = \sup_{\substack{x\in D_f\\ x<a}} f(x) \quad \text{och} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = B,\ \text{där } B = \inf_{\substack{x\in D_f\\ x>a}} f(x).$$

(ii) Om f är avtagande, så är

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = A,\ \text{där } A = \inf_{\substack{x\in D_f\\ x<a}} f(x) \quad \text{och} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = B,\ \text{där } B = \sup_{\substack{x\in D_f\\ x>a}} f(x).$$

Bevis. Vi visar bara första delen av (i) och lämnar övriga delar som övning. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Enl. definitionen av supremum är $f(x) < A + \varepsilon$ för alla $x < a$ och det existerar ett $\delta > 0$ sådant att $f(a - \delta) > A - \varepsilon$. Alltså om $a - \delta < x < a$, så är $A - \varepsilon < f(a - \delta) \leq f(x) < A + \varepsilon$. Därmed har vi visat att för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att om $a - \delta < x < a$, så är $|f(x) - A| < \varepsilon$. $\square$

Sats 4. *En monoton funktion vars värdemängd är ett intervall är kontinuerlig.*

Det här är sats 4 i appendix C i [PB1]. Beviset finns i [PB1] men vi visar satsen ändå för att göra vissa förtydliganden.

Bevis. Låt a vara en punkt i definitionsmängden för f. Vi visar att f är kontinuerlig i a, dvs. att $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Låt f vara växande. Eftersom $f(x) \leq f(a)$ då $x < a$ och $f(a) \leq f(x)$ då $a < x$, måste $A \leq f(a) \leq B$, där A och B är som i (i) i sats 3. Om $A < f(a)$, så antar inte f några värden i intervallet $]A, f(a)[$ vilket strider mot antagandet att V_f är ett intervall. Alltså måste $A = f(a)$. På liknande sätt ser man att $f(a) = B$. Så $A = f(a) = B$. Vi får $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ vilket är detsamma som att $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

För avtagande f är beviset likadant, bortsett från att vissa olikheter ändrar riktning. $\square$

Det är inte nödvändigt att $[a, +\infty[\ \subseteq D_f$ i sats 1 och inte heller att D_f innehåller en omgivning av a i sats 3. I sats 1 räcker det att D_f innehåller godtyckligt stora reella tal och i sats 3 att D_f innehåller punkter som ligger godtyckligt nära a, både till vänster och till höger.

Vi avslutar detta avsnitt med ett resultat som vi kommer att utnyttja i avsnittet om integraler.

Sats 5. *Låt M_1, M_2 vara två icke-tomma delmängder av $\mathbf{R}$ och låt*

$$M = M_1 + M_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2\}.$$

Då är $\sup M = \sup M_1 + \sup M_2$ och $\inf M = \inf M_1 + \inf M_2$.

Bevis. Vi visar bara det första påståendet. Antag att M_1 och M_2 är uppåt begränsade och låt $x = x_1 + x_2$, där $x_1 \in M_1$ och $x_2 \in M_2$. Eftersom $x_1 \leq \sup M_1$ och $x_2 \leq \sup M_2$, är $x_1 + x_2 \leq \sup M_1 + \sup M_2$. Detta gäller för *varje* $x_1 + x_2 \in M$. Alltså är $\sup M \leq \sup M_1 + \sup M_2$. Om $\sup M < \sup M_1 + \sup M_2$, så kan vi hitta x_1 och x_2 som ligger så nära $\sup M_1$ resp. $\sup M_2$ att $\sup M < x_1 + x_2$. Men eftersom $x_1 + x_2 \in M$, får vi samtidigt $x_1 + x_2 \leq \sup M$, vilket är en motsägelse. Alltså måste $\sup M = \sup M_1 + \sup M_2$.

Är minst en av mängderna M_1, M_2 obegränsad uppåt, kan inte heller M vara uppåt begränsad. Alltså är $\sup M = \sup M_1 + \sup M_2 = +\infty$ (visa detta i detalj). □

2. Riemannintegralen

Riemannintegralen definieras i avsnitt 6.1 i [PB1]. Vi skall dock använda en annan definition som bygger på begreppen supremum och infimum.

Låt $[a, b]$ vara ett intervall. En trappfunktion Φ definieras genom att man anger en indelning $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ av $[a, b]$ och sedan låter $\Phi(x) = c_k$ för $x_{k-1} < x < x_k$ och $k = 1, 2, \ldots, n$, se avsnitt 6.1 i [PB1], där detta preciseras. Integralen av Φ defineras som

$$\int_a^b \Phi(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1})$$

(i [PB1] används beteckningen $I(\Phi)$ i stället för $\int_a^b \Phi(x)\, dx$). Man kan, men behöver inte tilldela Φ några värden i indelningspunkterna (värdena $\Phi(x_k)$ påverkar ju ändå inte värdet av $\int_a^b \Phi(x)\, dx$). Om vi förfinar indelningen, dvs. utökar antalet indelningspunkter utan att ändra Φ, så ändras inte värdet av $\int_a^b \Phi(x)\, dx$. T.ex. om vi lägger till en ny indelningspunkt x', säg mellan x_0 och x_1, får vi

$$c_1(x' - x_0) + c_1(x_1 - x') + \sum_{k=2}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$$

eftersom $(x' - x_0) + (x_1 - x') = x_1 - x_0$. Vänsterledet ovan är lika med $\int_a^b \Phi(x)\, dx$ beräknad med hjälp av den nya indelningen (med x' som extra indelningspunkt) medan högerledet är den "gamla" $\int_a^b \Phi(x)\, dx$. Så $\int_a^b \Phi(x)\, dx$ är väldefinierad i den mening att den bara beror på Φ och inte på valet av indelningen.

Vi kommer att behöva följande (intuitivt uppenbara) resultat:

Hjälpsats 1. *Om Φ och Ψ är trappfunktioner sådana att $\Phi \leq \Psi$ på $[a, b]$, så är $\int_a^b \Phi(x)\, dx \leq \int_a^b \Psi(x)\, dx$.*

Bevis. Till Φ hör en indelning av $[a, b]$ och till Ψ en annan (indelningarna kan, men behöver inte vara identiska). Nu gör vi en ny indelning genom att ta med alla indelningspunkter, både för Φ och för Ψ. Om den nya indelningen är $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_l = b$, så är $\Phi(x) = c_k$ och $\Psi(x) = d_k$ för $x_{k-1} < x < x_k$ och $k = 1, \ldots, l$. Eftersom $\Phi \leq \Psi$, är $c_k \leq d_k$. Det följer att

$$\int_a^b \Phi(x)\, dx = \sum_{k=1}^{l} c_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{l} d_k(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b \Psi(x)\, dx,$$

vilket skulle visas. □

Fr.o.m. nu kommer Φ och Ψ **alltid att beteckna trappfunktioner**, även när detta inte sägs explicit.

Definition 2. Låt f vara en begränsad funktion på intervallet $[a,b]$. Underintegralen $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ av f över $[a,b]$ definieras som supremum av $\int_a^b \Phi(x)\,dx$ m.a.p. alla trappfunktioner Φ sådana att $\Phi \le f$ på $[a,b]$. Överintegralen $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ definieras som infimum av $\int_a^b \Psi(x)\,dx$ m.a.p. alla trappfunktioner Ψ sådana att $f \le \Psi$ på $[a,b]$. Alltså är

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{\Phi \le f} \int_a^b \Phi(x)\,dx \quad \text{och} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{f \le \Psi} \int_a^b \Psi(x)\,dx.$$

För att förtydliga, om vi sätter

$$M = \left\{ \int_a^b \Phi(x)\,dx : \Phi \le f \right\},$$

så är M mängden av alla värden som $\int_a^b \Phi(x)\,dx$ kan anta för alla möjliga val av trappfunktioner $\Phi \le f$. Alltså är M en uppåt begränsad delmängd av de reella talen och $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup M < \infty$. Vi noterar också att $\sup M$ antas (dvs. $\sup M \in M$) om och endast om f är en trappfunktion (tänk efter varför). Motsvarande gäller för $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Sats 6. *För varje begränsad funktion f är $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.*

Bevis. Om $\Phi \le f \le \Psi$ på $[a,b]$, så är $\int_a^b \Phi(x)\,dx \le \int_a^b \Psi(x)\,dx$ enligt hjälpsats 1. Eftersom detta gäller för alla sådana Φ och Ψ, är *varje* $\int_a^b \Psi(x)\,dx$ en majorant för mängden av alla $\int_a^b \Phi(x)\,dx$, där $\Phi \le f$. Enl. definitionen av supremum är därför

$$\sup_{\Phi \le f} \int_a^b \Phi(x)\,dx \le \int_a^b \Psi(x)\,dx.$$

Det följer att $\sup_{\Phi \le f} \int_a^b \Phi(x)\,dx$ är en minorant för mängden av *alla* $\int_a^b \Psi(x)\,dx$ sådana att $f \le \Psi$. Alltså är infimum av talen i högerledet ovan större än eller lika med vänsterledet, dvs.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{\Phi \le f} \int_a^b \Phi(x)\,dx \le \inf_{f \le \Psi} \int_a^b \Psi(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Vi har visat vårt påstående. $\square$

Definition 3. En begränsad funktion f på $[a,b]$ kallas integrerbar (eller Riemannintegrerbar) över $[a,b]$ om $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Det gemensamma värdet av under- och överintegralen kallas integralen av f över $[a,b]$ och betecknas $\int_a^b f(x)\,dx$.

Hjälpsats 2. *Om Φ är en trappfunktion på $[a,b]$, så är $\int_a^b \Phi(x)\,dx = \underline{\int_a^b} \Phi(x)\,dx = \overline{\int_a^b} \Phi(x)\,dx$, dvs. Φ är integrerbar över $[a,b]$.*

Bevis. Enligt definitionen är $\underline{\int_a^b} \Phi(x)\,dx = \sup_{\Phi_1 \le \Phi} \int_a^b \Phi_1(x)\,dx$. Detta supremum antas för $\Phi_1 = \Phi$. Alltså är $\underline{\int_a^b} \Phi(x)\,dx = \int_a^b \Phi(x)\,dx$. På liknande sätt visas att $\overline{\int_a^b} \Phi(x)\,dx = \int_a^b \Phi(x)\,dx$. $\square$

Sats 7. *En begränsad funktion f på $[a,b]$ är integrerbar över $[a,b]$ om och endast om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar Φ, Ψ sådana att $\Phi \le f \le \Psi$ på $[a,b]$ och $\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \varepsilon$.*

Villkoret att det för varje $\varepsilon > 0$ existerar trappfunktioner Φ och Ψ som ovan är liktydigt med definitionen av integrerbarhet i [PB1] (se definition 2 i avsnitt 6.1 där). Notera att satsens innebörd är att f är integrerbar enligt definition 3 ovan om och endast om den är integrerbar enligt definitionen i [PB1].

Bevis. Anta först att f är integrerbar enligt definition 3, dvs. $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \overline{\int}_a^b f(x)\,dx$. Enligt supremums definition kan vi för varje $\varepsilon > 0$ hitta en trappfunktion $\Phi \leq f$ sådan att
$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b \Phi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$
På samma sätt kan vi enligt infimums definition hitta en trappfunktion $\Psi \geq f$ för vilken
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \Psi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Alltså är
$$\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \left(\int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Anta nu att det för varje givet $\varepsilon > 0$ existerar Φ, Ψ sådana att $\Phi \leq f \leq \Psi$ och $\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \varepsilon$. Eftersom
$$\int_a^b \Phi(x)\,dx \leq \underline{\int}_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\int}_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \Psi(x)\,dx,$$
eller omskrivet,
$$\overline{\int}_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \Psi(x)\,dx \quad \text{och} \quad -\underline{\int}_a^b f(x)\,dx \leq -\int_a^b \Phi(x)\,dx,$$
får vi genom att addera olikheterna ovan och använda sats 6
$$0 \leq \overline{\int}_a^b f(x)\,dx - \underline{\int}_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \varepsilon.$$
Så för varje $\varepsilon > 0$ är $0 \leq \overline{\int}_a^b f(x)\,dx - \underline{\int}_a^b f(x)\,dx < \varepsilon$. Men detta kan inträffa enbart om $\overline{\int}_a^b f(x)\,dx = \underline{\int}_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Vi skall nu studera några egenskaper hos under- och överintegraler och sedan visa att en kontinuerlig funktion är integrerbar. Vi genomför bevis för underintegraler. Läsaren uppmanas att tänka igenom hur detaljerna ändras för överintegraler.

Sats 8. *(i) Om $f \leq g$ på $[a, b]$, så är $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx \leq \underline{\int}_a^b g(x)\,dx$ och $\overline{\int}_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\int}_a^b g(x)\,dx$. (ii) Om $a < c < b$, så är $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \underline{\int}_a^c f(x)\,dx + \underline{\int}_c^b f(x)\,dx$ och $\overline{\int}_a^b f(x)\,dx = \overline{\int}_a^c f(x)\,dx + \overline{\int}_c^b f(x)\,dx$.*

Bevis. (i) Om $\Phi \leq f$ så är $\Phi \leq g$. Så mängden $\{\Phi : \Phi \leq f \text{ på } [a, b]\}$ är en delmängd av $\{\Phi : \Phi \leq g \text{ på } [a, b]\}$. Det följer att
$$\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \sup_{\Phi \leq f} \int_a^b \Phi(x)\,dx \leq \sup_{\Phi \leq g} \int_a^b \Phi(x)\,dx = \underline{\int}_a^b g(x)\,dx.$$

(ii) Låt Φ vara en trappfunktion på $[a, b]$. Om man lägger till c som indelningspunkt är Φ, betraktad på intervallet $[a, c]$, en trappfunktion på $[a, c]$ och Φ, betraktad på intervallet $[c, b]$, en trappfunktion på $[c, b]$. Givet 2 trappfunktioner, Φ_1 på $[a, c]$ och Φ_2 på $[c, b]$, får man en trappfunktion Φ på $[a,b]$ genom att sätta $\Phi(x) = \Phi_1(x)$ och $\Phi(x) = \Phi_2(x)$ på respektive intervall. Låt nu

$$M_1 = \left\{ \int_a^c \Phi(x)\,dx : \Phi \leq f \right\} \quad \text{och} \quad M_2 = \left\{ \int_c^b \Phi(x)\,dx : \Phi \leq f \right\},$$

dvs. M_1 är mängden av alla värden som $\int_a^c \Phi(x)\,dx$ kan anta för alla möjliga val av trappfunktioner $\Phi \leq f$, och motsvarande gäller för M_2. Eftersom $\int_a^b \Phi(x)\,dx = \int_a^c \Phi(x)\,dx + \int_c^b \Phi(x)\,dx$ (tänk efter varför), är

$$M = M_1 + M_2 = \left\{ \int_a^b \Phi(x)\,dx : \Phi \leq f \right\}.$$

Enligt sats 5 är $\sup M = \sup M_1 + \sup M_2$. Alltså är $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \underline{\int}_a^c f(x)\,dx + \underline{\int}_c^b f(x)\,dx$. □

Om vi **definierar** $\underline{\int}_a^a f(x)\,dx = 0$ och $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = -\underline{\int}_b^a f(x)\,dx$ då $a > b$ och gör motsvarande definitioner för överintegralen, så gäller (ii) ovan för alla a, b, c, oberoende av hur de ligger i förhållande till varandra.

Sats 9 (Integralkalkylens medelvärdessats för under- och överintegraler)**.** *Om f är kontinuerlig på $[a,b]$, så existerar ett $\xi \in [a,b]$ och ett $\eta \in [a,b]$ sådana att*

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \quad \textit{och} \quad \overline{\int}_a^b f(x)\,dx = f(\eta)(b-a).$$

Bevis. Eftersom f är kontinuerlig, antar den ett minsta värde m och ett största värde M på $[a,b]$. Eftersom $g(x) = M$ är en trappfunktion, är $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx = M(b-a)$ enligt hjälpsats 2. Motsvarande gäller för $h(x) = m$. Om vi integrerar olikheten $m \leq f(x) \leq M$, får vi alltså

$$m(b-a) = \underline{\int}_a^b m\,dx \leq \underline{\int}_a^b f(x)\,dx \leq \underline{\int}_a^b M\,dx = M(b-a),$$

vilket ger

$$m \leq \frac{1}{b-a} \underline{\int}_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Eftersom f är kontinuerlig, antar den alla värden mellan m och M enligt satsen om mellanliggande värden (se sats 1 i appendix C i [PB1]). Speciellt antar den värdet $\frac{1}{b-a}\underline{\int}_a^b f(x)\,dx$ i en punkt $x = \xi$. Så

$$\frac{1}{b-a} \underline{\int}_a^b f(x)\,dx = f(\xi),$$

vilket skulle bevisas. □

Anmärkning 2. Sats 9 gäller även om $b = a$ eller $b < a$. Varför?

Låt f vara en kontinuerlig funktion på $[a,b]$ och definiera

$$\underline{S}(x) = \underline{\int}_a^x f(t)\,dt \quad \text{och} \quad \overline{S}(x) = \overline{\int}_a^x f(t)\,dt \quad \text{för } x \in [a,b].$$

Notera att här är övre integrationsgränsen x och vi betraktar den som variabel. Vi har betecknat den oberoende variabeln för integranden med t i stället för x för att skilja den från övre integrationsgränsen.

Sats 10 (Analysens huvudsats för under- och överintegraler)**.** *Om funktionen f är kontinuerlig på $[a, b]$, så är funktionerna $\underline{S}$ och $\overline{S}$ deriverbara och*

$$\underline{S}'(x) = f(x) = \overline{S}'(x) \quad \textit{för } a < x < b.$$

Satsen bevisas exakt på samma sätt som sats 9 i kapitel 6 i [PB1]. Läs igenom beviset där och försök att inse varför resonemanget går igenom för under- och överintegraler.

Sats 11 (Kontinuerlig funktion är integrerbar)**.** *Om f är kontinuerlig på $[a, b]$, så är f integrerbar över $[a, b]$.*

Bevis. Eftersom $\underline{S}'(x) = \overline{S}'(x)$ för $a < x < b$ enligt sats 10, så är $\underline{S}(x) = \overline{S}(x) + C$, där C är en konstant (se följdsats 1 i avsnitt 3.5 i [PB1]). Men eftersom $\underline{S}(a) = \overline{S}(a) = 0$, måste C vara lika med 0. Så $\underline{S}(x) = \overline{S}(x)$ för alla $x \in [a, b]$. Detta gäller speciellt för $x = b$, vilket ger

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,dt = \underline{S}(b) = \overline{S}(b) = \overline{\int_a^b} f(t)\,dt.$$

Därmed är satsen bevisad. □

Att vi har $f(t)$ och inte $f(x)$ ovan spelar ingen roll, för integralens värde är oberoende av den bokstav med vilken man betecknar variabeln under integrationstecken. Så

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(t)\,dt = \underline{\int_a^b} f(u)\,du = \ldots$$

och detsamma gäller för överintegraler och integraler.

Sats 12 (Insättningsformeln)**.** *Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och om F är en primitiv funktion för f, så är*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Detta är sats 10 i kapitel 6 i [PB1]. Eftersom vi nu vet att kontinuerliga funktioner är integrerbara, behöver vi inte bry oss om under- och överintegraler här.

Vi skall också visa att monotona funktioner är integrerbara, oavsett om de är kontinuerliga eller ej.

Sats 13. *Låt f vara en funktion som är monoton på $[a, b]$. Då är f integrerbar över $[a, b]$.*

Bevis. Antag att f är växande (för avtagande f är beviset likartat och lämnas åt läsaren). Eftersom $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ för alla $x \in [a, b]$, är f begränsad. Dela in intervallet $[a, b]$ i n lika långa delar. Vi får $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, där $x_k - x_{k-1} = (b - a)/n$. Låt $\Phi(x) = f(x_{k-1})$ och $\Psi(x) = f(x_k)$ för $x_{k-1} < x < x_k$, $k = 1, \ldots, n$ (rita en figur). Eftersom f är växande, är $\Phi(x) = f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k) = \Psi(x)$ för $x_{k-1} < x < x_k$.

Alltså är $\Phi \leq f \leq \Psi$. Vidare är

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx &= \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right) \frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n} \left[(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \ldots + (f(x_n) - f(x_{n-1}))\right] \\
&= \frac{b-a}{n} \left(f(x_n) - f(x_0)\right) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}.
\end{aligned}$$

Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Väljer vi n tillräckligt stort, får vi

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} < \varepsilon.$$

Alltså är f integrerbar enligt sats 7. $\square$

Slutligen visar vi följande resultat:

Sats 14. *Låt f och g vara två begränsade funktioner på intervallet $[a,b]$. Då gäller:*
(i) $\underline{\int_a^b}(f(x)+g(x))\,dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$ och $\overline{\int_a^b}(f(x)+g(x))\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$.
(ii) Om f och g är integrerbara, så är $f+g$ integrerbar och $\int_a^b(f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

Bevis. (i) Låt $\Phi_1 \leq f$ och $\Phi_2 \leq g$. Eftersom $\int_a^b(\Phi_1(x) + \Phi_2(x))\,dx = \int_a^b \Phi_1(x)\,dx + \int_a^b \Phi_2(x)\,dx$ (se uppgift 3.23 nedan), får vi

$$\begin{aligned}
\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx &= \sup_{\Phi_1 \leq f} \int_a^b \Phi_1(x)\,dx + \sup_{\Phi_2 \leq g} \int_a^b \Phi_2(x)\,dx \\
= \sup_{\substack{\Phi_1 \leq f \\ \Phi_2 \leq g}} \int_a^b (\Phi_1(x) + \Phi_2(x))\,dx &\leq \sup_{\Phi \leq f+g} \int_a^b \Phi(x)\,dx = \underline{\int_a^b} (f(x) + g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Den första och den tredje likheten ovan gäller enligt definitionen av underintegralen. Den andra likheten följer ur sats 5. Olikheten gäller eftersom $\Phi_1 \leq f$, $\Phi_2 \leq g$ medför att $\Phi_1 + \Phi_2 \leq f + g$, dvs. supremum till höger tas över minst lika många funktioner som supremum till vänster.

Olikheten för överintegraler visas på liknande sätt. Visa den som övning och lägg speciellt märke till varför olikheten går åt andra hållet.

(ii) Eftersom f och g är integrerbara, får vi från (i)

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b} (f(x) + g(x))\,dx &\leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \\
&\leq \underline{\int_a^b} (f(x) + g(x))\,dx \leq \overline{\int_a^b} (f(x) + g(x))\,dx.
\end{aligned}$$

Den sista olikheten gäller eftersom underintegralen alltid är mindre än eller lika med överintegralen, se sats 6. Då vänsterledet är lika med högerledet, måste alla olikheter ovan vara likheter. Alltså är $f + g$ integrerbar och integralen av summan är lika med summan av integralerna. $\square$

Ett begrepp som är viktigt men som inte tas upp här är Riemannsumma. Läsaren hänvisas till avsnitt 6.2 i [PB1].

Litteraturförteckning

[PB1] A. Persson och L.-C. Böiers, *Analys i en variabel*, Studentlitteratur 2010 (3:e upplagan).
[PB2] A. Persson och L.-C. Böiers, *Analys i flera variabler*, Studentlitteratur 2005 (3:e upplagan).

3. Teoriövningar

Annemarie Luger och Andrzej Szulkin

3.1. Visa att $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ och $\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) = \infty$ genom att använda definitionen på gränsvärde resp. oegentligt gränsvärde.

3.2. Visa: Om $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existerar, så är f begränsad för stora x, dvs. det finns ett ω sådant att f är begränsad för $x > \omega$.

3.3. Jämför följande påstående med Sats 2 (6) i avsnitt 2.1 i [PB1]:

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Är påståendet ovan helt korrekt? Om inte, vad är det som saknas? Ge ett motexempel i så fall.

3.4. Visa att för en föjld $(a_n)_{n\geq 1}$ gäller följande implikation:

$$a_n \to a \text{ då } n \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n| \to |a| \text{ då } n \to \infty.$$

Gäller implikationen åt andra hållet? Visa den eller ge ett motexempel.
Tips: Den omvända triangelolikheten kan hjälpa.

3.5. a) Visa följande påstående:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

b) Är följande påstående sant?

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \infty.$$

Ge ett bevis eller ett motexempel.

3.6. Formulera och bevisa en motsvarighet till sats 1, sid. 1, för gränsvärdet $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3.7. Betrakta följande mängder. Är de begränsade? Bestäm supremum och infimum och – ifall de existerar – även största och minsta värde i de angivna mängderna.

a) $M_1 = \left\{\frac{2-(-1)^n}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$

b) $M_2 = \left\{x \in \mathbf{R} : x^2 < 4\right\}$

c) $M_3 = \left\{x \in \mathbf{R} : x^3 \geq 8\right\}$

3.8. Vad kan man säga om en mängd M om man vet att $\sup M = \inf M$?

3.9. Visa följande olikheter för supremum och infimum av funktioner $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}(f+g)(x) \leq \sup_{x\in\mathbf{R}} f(x) + \sup_{x\in\mathbf{R}} g(x), \qquad \inf_{x\in\mathbf{R}}(f+g)(x) \geq \inf_{x\in\mathbf{R}} f(x) + \inf_{x\in\mathbf{R}} g(x).$$

Ge exempel på f och g för vilka olikheterna är strikta (dvs. $<$ resp. $>$ gäller).

3.10. Om $\sup M = a \in \mathbf{R}$ så finns det en föjld $(x_n)_{n\geq 1}$ med $x_n \in M$ sådan att $x_n \to a$ då $n \to \infty$.
Anmärkning: Detta är en viktig egenskap hos supremum av en mängd.

3.11. Visa: Om två kontinuerliga funktioner överensstämmer i alla rationella punkter, så överensstämmer de i alla punkter, dvs.

$$f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ kontinuerliga och } f(x) = g(x) \text{ för alla } x \in \mathbf{Q} \qquad \Longrightarrow \qquad f \equiv g.$$

Tips: Till varje reellt tal x_0 finns en följd (q_n) av rationella tal som konvergerar mot x_0.

3.12. Ge exempel på följande två diskontinuerliga funktioner f och g på intervallet $[0, 1]$:
a) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ och $f(\xi)$ är inte lika med $\frac{1}{2}$ för något $\xi \in [0, 1]$,
b) $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ och g antar alla värden mellan 0 och 1.
Vad säger detta om satsen om mellanliggande värden?

3.13. Ge exempel på en diskontinuerlig funktion f sådan att $D_f = [0, 1]$ och värdemängden V_f är ett intervall. Strider detta mot sats 4, sid. 3?

3.14. Ge exempel på en kontinuerlig funktion f som inte är monoton men har en invers. Finns det sådana funktioner om definitionsmängden D_f är ett intervall?

3.15. Använd derivatans definition för att beräkna derivator av följande funktioner: $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $f_3(x) = \sin(x^2)$.

3.16. Låt g vara en begränsad funktion med definitionsmängden $[-1, 1]$. Sätt $f(x) = x^2 g(x)$. Visa att f är deriverbar i $x = 0$ och $f'(0) = 0$.

3.17. Om två deriverbara funktioner f och g definierade på intervallet $[-1, 1]$ vet man följande: $f(-1) > g(-1)$, $f(0) < g(0)$ och $f(1) > g(1)$. Låt $h(x) = f(x) - g(x)$. Hur många nollställen (minst) måste h ha? Finns det säkert en punkt ξ sådan att $h'(\xi) = 0$? Om det gör det, måste det vara ett lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera?

3.18. Ge exempel på en funktion f som har följande egenskaper: f är kontinuerlig på $[a, b]$, deriverbar på $]a, b[$ utom i en punkt, i ingen punkt $\xi \in]a, b[$ är $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

3.19. Ge exempel på en funktion f som uppfyller antagandena i medelvärdessatsen och för vilken det finns oändligt många ξ sådana att $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

3.20. * Visa att om f är två gånger deriverbar i $\mathbf{R}$ och $f''(x) > 0$ för alla x, så är antingen $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ eller $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$. Kan $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$? Ge ett exempel eller visa att detta inte kan inträffa.

Tips: Om $f'' > 0$, vad kan man säga om f'?

3.21. * Låt $f :]0, \infty[\to \mathbf{R}$ vara en funktion som är deriverbar och lika med sin invers, dvs. $f(x) = f^{-1}(x)$ för alla $x > 0$. Visa att $f(\xi) = \xi$ för något $\xi > 0$. Visa också att antingen är $f'(\xi) = -1$ eller är $f(x) = x$ för alla $x > 0$.

Tips: f är strängt monoton. Vad kan man säga om f ifall $f(x) > x$ för något $x > 0$?

3.22. Låt funktionen f vara integrerbar över $[-a, a]$ för något $a > 0$.

a) Visa: f är udda $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

b) Visa: f är jämn $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

c) Beräkna: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 + \ln\frac{\pi + x}{\pi - x}\right) \cos x\,dx$

3.23. Visa att om Φ och Ψ är två trappfunktioner, så är $\int_a^b (\Phi(x)+\Psi(x))\,dx = \int_a^b \Phi(x)\,dx + \int_a^b \Psi(x)\,dx$.

3.24. Visa att om Φ är en trappfunktion, så är $\overline{\int_a^b} \Phi(x)\,dx = \int_a^b \Phi(x)\,dx$ (se hjälpsats 2, sid. 5).

3.25. Definiera funktionen f genom att sätta $f(x) = 0$ då x är rationellt och $f(x) = 1$ då x är irrationellt. Beräkna $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ och $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Är f integrerbar över intervallet $[0,1]$?

3.26. Visa sats 8, sid. 6 för överintegraler.

3.27. Visa analysens huvudsats (sats 10, sid. 6) för under- och överintegraler.

3.28. Visa olikheten för överintegraler i sats 14, sid. 9.

3.29. Definiera funktionerna f och g genom att sätta $f(x) = 0$ då x är rationellt och $f(x) = 1$ då x är irrationellt samt $g(x) = 1$ då x är rationellt och $g(x) = 0$ då x är irrationellt. Visa att stränga olikheter gäller i del (i) av sats 14, sid. 9 vid integration över intervallet $[0,1]$.