MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

2012-08-28

Övningar till Matematisk analys III

Erik Svensson

1. För varje gränsvärde nedan bestäm gränsvärdet eller visa att gränsvärdet inte existerar.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{2x^3 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^3 - xy^5}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x\,\sin^2\pi y}{x^2+(y-1)^2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+y^2}{x^4+|y|}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sqrt{|y|}}{x^4+|y|}$

2. Låt f vara den funktion för vilken $f(0,0)=0$ och $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$ då $(x,y)\neq(0,0)$. Är f kontinuerlig i origo? Är f differentierbar i origo?

L 3. För ett godtyckligt reellt tal $\alpha>0$ låt f vara den tvåvariabelfunktion för vilken $f(0,0)=0$ och $f(x,y)=\frac{|xy|^\alpha}{x^2+xy+y^2}$ då $(x,y)\neq(0,0)$. För vilka reella tal $\alpha>0$ är f kontinuerlig i origo respektive differentierbar i origo?

4. Låt f vara funktionen $f(x,y)=4x^3y+xy^3$.

   (a) En person befinner sig i punkten $(1,2)$ på räta linjen $x+2y=5$ och kan bara röra sig längs denna räta linje. I vilken av de två möjliga rörelseriktningarna skall personen gå för att funktionen f åtminstone till att börja med skall växa.

   (b) Bestäm i punkten $(1,2)$ den riktning från punkten i vilken tillväxten av f per längdenhet är störst samt bestäm också hur stor denna största tillväxt per längdenhet är.

   (c) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $f(x,y)=f(1,2)$ i punkten $(1,2)$ på kurvan.

   (d) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z=f(x,y)$ i den punkt på ytan där $x=1$ och $y=2$.

L 5. Låt f vara den funktion för vilken $f(0,0)=0$ och $f(x,y)=\dfrac{x^3y+2xy^3}{x^2+y^2}$ då $(x,y)\neq(0,0)$. Avgör om f är kontinuerlig i origo. Visa att $f_1'(0,0)$ och $f_2'(0,0)$ båda existerar och ange värdena. Visa att $f_{12}''(0,0)$ och $f_{21}''(0,0)$ båda existerar och ange värdena.

L 6. Betrakta funktionen $f(x,y)=x^2y+axy$ där a är en reell konstant. För ett visst värde på konstanten a har f i punkten $(1,1)$ sin största tillväxt per längdenhet i riktningen $(3,1)$. Ange detta värde på a samt också hur stor den största tillväxten per längdenhet av f i punkten $(1,1)$ är för detta värde på a. Visa även att det inte finns något värde på a så att f i punkten $(1,1)$ har sin största tillväxt per längdenhet i riktningen $(1,3)$.

7. Bestäm alla skärningspunkter mellan kurvorna $2x^2 - 2xy - y^2 + 6 = 0$ och $xy = 2$. Bestäm också skärningsvinkeln mellan kurvorna i varje skärningspunkt.

8. Bestäm varje tal $a > 0$ för vilket de båda kurvorna $xy + y = 1$ och $x^2 + y^2 = a$ skär varandra under rät vinkel i minst en punkt. Ange också för varje sådant a varje punkt där de båda kurvorna skär varandra under rät vinkel.

L 9. Bestäm ekvationen för den kurva som går genom punkten $(1, 0)$ och är vinkelrät mot alla nivåkurvor till funktionen $f(x, y) = x^2 - y$.

L 10. På en karta över en kulle finns ett ortonormerat koordinatsystem inplacerat. Kullens höjd z över havet i en punkt (x, y) på kartan är $z = 500e^{-(2x^2+3y^2)}$. En person som skall gå till kullens topp väljer i varje punkt på sin väg att gå åt det håll där kullen är brantast uppåt. Personen startar i en punkt som på kartan har koordinaterna $(4, 8)$. Bestäm ekvationen för den kurva på kartan som personens gångväg svarar mot.

L 11. Bestäm ekvationen för den kurva som går genom punkten (1,1) och skär alla nivåkurvor till funktionen $f(x, y) = x^6 + 3y^4$ under rät vinkel.

12. Bestäm ekvationen för den kurva i första kvadranten som går genom punkten (1,1) och skär alla nivåkurvor till funktionen $f(x, y) = x^{1/4}y^{1/2}$, $x > 0$, $y > 0$ under rät vinkel.

13. Bestäm ekvationen för den kurva som går genom punkten (1,1) och skär alla nivåkurvor till funktionen $f(x, y) = e^x y$, under rät vinkel.

14. På mängden $x > 0$, $y > 0$ införs nya koordinater genom att sätta $u = xy$, $v = x/y$. Låt z vara en C^1-funktion i variablerna x och y på mängden $x > 0$, $y > 0$. Ange hur differentialuttrycket $xz'_x + yz'_y + z$ ser ut i variablerna u och v. Bestäm sedan den C^1-lösning z till differentialekvationen $xz'_x + yz'_y + z = 0$, $x > 0$, $y > 0$ för vilken $z = e^{-x}$ då $x > 0$ och $y = 4$.

15. Bestäm alla kontinuerligt deriverbara lösningar till partiella differentialekvationen $x^2z'_x + y^2z'_y = z$ i området $x > 0$, $y > 0$ genom att införa de nya variablerna $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$.

L 16. Betrakta partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

i området $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$. Bestäm den lösning $T(x, y, z)$ för vilken följande gäller:

i) $T(x, y, z)$ är en funktion enbart av avståndet från (x, y, z) till origo, dvs $T(x, y, z) = f(r)$ för någon funktion f, där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

ii) $T(x, y, z) = 0$ då $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, och $T(x, y, z) = 1$ då $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

17. Låt z vara en C^2-funktion i x och y på $\mathbf{R}^2$. Genom ett ett koordinatbyte av typen $u = x+ay$, $v = x+by$, där a och b är lämpliga reella tal, överförs differentialuttrycket $6z''_{xx} - 5z''_{xy} + z''_{yy}$ i ett differentialuttryck av typen cz''_{uv} där c är en konstant. Bestäm sådana reella tal a och b. Bestäm också alla C^2-funktioner z sådana att $6z''_{xx} - 5z''_{xy} + z''_{yy} = 1$ på $\mathbf{R}^2$.

L 18. På mängden $x > 0$, $y > 0$ införs nya koordinater u och v genom att sätta $u = xy^2$, $v = x/y$. Låt z vara en C^2-funktion i x och y på mängden $x > 0$, $y > 0$. Ange hur differentialuttrycket $2x^2z''_{xx} + xyz''_{xy} - y^2z''_{yy}$ ser ut i variablerna u och v. Bestäm också alla C^2-funktioner z sådana att $2x^2z''_{xx} + xyz''_{xy} - y^2z''_{yy} = 1$ då $x > 0$, $y > 0$.

L 19. På mängden $x > 0$, $y > 0$ införs nya koordinater u och v genom att sätta $u = x^2y^2$, $v = x/y$. Låt z vara en C^2-funktion i x och y på mängden $x > 0$, $y > 0$. Ange hur differentialuttrycket $x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} + 2xz'_x$ ser ut i variablerna u och v. Bestäm också alla C^2-funktioner z sådana att $x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} + 2xz'_x = 1$ då $x > 0$, $y > 0$.

20. På mängden $x > 0$, $y > 0$ införs nya koordinater u och v genom att sätta $u = y/x$, $v = x^2/y$. Låt z vara en C^2-funktion i x och y på mängden $x > 0$, $y > 0$. Ange hur differentialuttrycket $x^2 z''_{xx} + 3xyz''_{xy} + 2y^2 z''_{yy}$ ser ut i variablerna u och v. Bestäm också alla C^2-funktioner z sådana att $x^2 z''_{xx} + 3xyz''_{xy} + 2y^2 z''_{yy} = y^2$ då $x > 0$, $y > 0$.

L 21. Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 4x^2y$ och ange varje stationär punkts karaktär.

L 22. Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y) = (2x^4 - y^4)e^{-8x-4y}$ och ange varje stationär punkts karaktär.

L 23. Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y) = xy$ under bivillkoret $x^3 + 3xy + 8y^3 = 22$.

24. Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y, z) = x + y + z$ under bivillkoret $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$.

25. Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y, z) = x+y+z$ under bivillkoren $xy+yz = 1$ och $xz+yz = 4$.

26. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D |x^2 - y| \, dxdy$, där D är området $|x| \le 1$, $|y| \le 1$.

27. Beräkna $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_x^{x^3} x^2 e^{y^2} \, dy \right) dx + \int_2^8 \left(\int_x^8 x^2 e^{y^2} \, dy \right) dx$.

28. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x^2 + y^2) \, dxdy$ där D är området $x^2 + xy + y^2 \le 1$.

29. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dxdy$ där D är området $x^2 + y^2 \le x$.

30. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x^2 + y^2) \, dxdy$ där D är området $0 \le y \le x^2 + y^2 \le x$.

L 31. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{y} \sin\left(x^2y + \frac{x}{y}\right) dx\,dy$ där D är området $\pi/2 \le x^2y \le \pi$, $\pi/2 \le \dfrac{x}{y} \le \pi$.

32. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x/y)^4 e^{x^2/y} \, dx\,dy$ där D är området $y < x < 2y$, $y < x^2 < 4y$.

33. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \left(\ln \frac{y}{x}\right) e^{xy} \, dx\,dy$ där D är området $x \le y \le 2x$, $1 \le xy \le 2$.

L 34. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^3 + y^3} \, dx\,dy$, där D är området $\frac{1}{2}x < y < x$, $\sqrt{x} < y < 2\sqrt{x}$.

L 35. Visa att den generaliserade dubbelintegralen $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{(1 + x^2 + 2y^2)^2} \, dx\,dy$ är konvergent och beräkna dess värde.

L 36. Låt D vara det obegränsade området $x^4y > 1$, $xy^4 > 1$. Visa att den generaliserade dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\left(x^3 + y^3\right)^4} \, dx\,dy$ är konvergent och beräkna dess värde.

L 37. Bestäm volymen av området $x + y + z \leq 1$, $z \geq x^2 + y^2$.

38. Bestäm volymen av kroppen $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $(x-1)^2 + y^2 \geq 1$, $(x+1)^2 + y^2 \geq 1$.

L 39. Bestäm volymen av den del av området $2x^2 + 2y^2 \leq 1 + z^2$ som ligger mellan planen $z = x + 1$ och $z = x$.

L 40. Beräkna trippelintegralen $\iiint_D x^2 \, dx \, dy \, dz$ där D är området $x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 2$.

L 41. Beräkna trippelintegralen $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$ där D är området $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

L 42. Beräkna trippelintegralen $\iiint_D z \, dx \, dy \, dz$ där D är området $z \leq 7 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

L 43. Beräkna trippelintegralen $\iiint_D z \, dx \, dy \, dz$ där D är området $z \geq 0$, $z^2 \geq 2x^2 + 3y^2 - 1$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$.

L 44. Beräkna de båda trippelintegralerna $\iiint_D z \, dx \, dy \, dz$ och $\iiint_D z^2 \, dx \, dy \, dz$ där D är området $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq 1 + \frac{1}{2}x$.

Svar till övningarna

1. (a) 0. (b) 0. (c) 0. (d) Existerar ej.

2. Kontinuerlig men inte differentierbar i origo.

3. Kontinuerlig i origo precis om $\alpha > 1$ och differentierbar i origo precis om $\alpha > \frac{3}{2}$.

4. (a) I riktning $(2, -1)$. (b) I riktning $(2, 1)$, $16\sqrt{5}$. (c) $2x + y = 4$. (d) $z = 32x + 16y - 48$.

5. Kontinuerlig i origo. $f_1'(0,0) = f_2'(0,0) = 0$. $f_{12}''(0,0) = 2$, $f_{21}''(0,0) = 1$.

6. $a = -\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

7. Skärningspunkterna $(1, 2)$ och $(-1, -2)$. Skärningsvinkeln är $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ i båda skärningspunkterna.

8. $a = \frac{17}{4}$, $(-\frac{1}{2}, 2)$.

9. $y = -\frac{1}{2} \ln x$, $x > 0$.

10. $y = x^{3/2}$ från punkten $(4, 8)$ till punkten $(0, 0)$.

11. Parabeln $y = x^2$.

12. $y = \sqrt{2x^2 - 1}$, $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

13. Parabeln $x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$.

14. $z = \frac{4}{y} e^{-\frac{4x}{y}}$.

15. $z = e^{-\frac{1}{x}} \varphi\big(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\big)$ där $\varphi \in C^1(\mathbf{R})$ är godtycklig.

16. $T(x, y, z) = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 2$.

17. $z = -(x + 2y)(x + 3y) + \varphi(x + 2y) + \psi(x + 3y)$ där φ, $\psi \in C^2(\mathbf{R}_+)$ är godtyckliga.

18. $9uvz''_{uv} - 3vz'_v$. $z = \dfrac{1}{3}(\ln y - \ln x) + x^{1/3}y^{2/3}\varphi\Big(\dfrac{x}{y}\Big) + \psi(xy^2)$, $x > 0$, $y > 0$ där φ, $\psi \in C^2(\mathbf{R}_+)$ är godtyckliga.

19. $8uvz''_{uv} + 4uz'_u$. $z = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln y) + \sqrt{\dfrac{y}{x}}\varphi(x^2y^2) + \psi\Big(\dfrac{x}{y}\Big)$, $x > 0$, $y > 0$ där φ, $\psi \in C^2(\mathbf{R}_+)$ är godtyckliga.

20. $uvz''_{uv} - uz'_u$. $z = \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{x^2}{y}\varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big) + \psi\Big(\dfrac{x^2}{y}\Big)$, $x > 0$, $y > 0$ där φ, $\psi \in C^2(\mathbf{R}_+)$ är godtyckliga.

21. $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(-1, 1)$. Sadelpunkt, strängt lokalt minimum respektive strängt lokalt minimum.

22. $(0,0)$, och $(1,-1)$. Sadelpunkt respektive strängt lokalt maximum.

23. $(2,1]$.

24. $(-2,-2,-2)$, $(2,2,-2)$, $(2,-2,2)$, $(2,2,-2)$, och $(1,1,1)$.

25. $(\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}, 2)$, $(-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}, 2)$, $(\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}, -2)$ och $(-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}, -2)$.

26. $\frac{12}{5}$.

27. $\frac{1}{6}\Big(62e^{64}+e\Big)$.

28. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$.

29. $\frac{4}{9}$.

30. $\frac{1}{8}$.

31. $-\frac{2}{3}$.

32. $3e^4$.

33. $\frac{1}{4}(\ln 2)^2(e^2-e)$.

34. $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

35. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

36. $\frac{1}{360}$.

37. $\frac{9\pi}{8}$.

38. $\frac{128}{9}$.

39. $\frac{5\sqrt{2}\pi}{6}$.

40. $\frac{16\pi}{15}$.

41. $\frac{2\sqrt{2}-1}{6}\pi$.

42. $-\frac{9\pi}{4}$.

43. $\frac{\pi}{24}(16\sqrt{3}-\sqrt{6})$.

44. $\frac{8\pi}{9\sqrt{3}}$ respektive $\frac{136\pi}{135\sqrt{3}}$.

Lösningar till de med L markerade övningarna

3. *Kontinuitet i origo.*

En funktion $f(x,y)$ är kontinuerlig i en punkt (a,b) precis om $f(x,y) \to f(a,b)$ då $(x,y) \to (a,b)$. I vårt fall är $f(0,0) = 0$. Den givna funktionen är alltså kontinuerlig i origo precis om $f(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$. Med hjälp av polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ får vi att

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + xy + y^2} = \frac{r^{2\alpha}|\cos\theta\sin\theta|^\alpha}{r^2 + r^2\cos\theta\sin\theta}$$

$$= r^{2\alpha-2}\frac{|\cos\theta\sin\theta|^\alpha}{1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta} \leq r^{2\alpha-2}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2r^{2\alpha-2} = 2\big(x^2 + y^2\big)^{\alpha-1},$$

vilket visar att $f(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$ om $\alpha > 1$. Vidare har vi för godtyckligt $t > 0$ att

$$f(t,t) = \frac{1}{3}t^{2\alpha-2}, \quad \text{som inte går mot 0 då } t \to 0^+ \text{ om } 0 < \alpha \leq 1,$$

vilket visar att $f(x,y)$ inte går mot 0 då $(x,y) \to (0,0)$ om $0 < \alpha \leq 1$. Funktionen $f(x,y)$ är således kontinuerlig i origo precis om $\alpha > 1$.

Differentierbarhet i origo.

En funktion $g(x,y)$ är differentierbar i en punkt (a,b) precis om $g_1'(a,b)$ och $g_2'(a,b)$ existerar samt

$$\frac{g(x,y) - g(a,b) - g_1'(a,b)(x-a) - g_2'(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \to 0 \quad \text{då } (x,y) \to (a,b).$$

Vi tillämpar nu detta på funktionen $f(x,y)$ i origo. Notera först att

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0 \text{ för alla } h \neq 0$$

för alla $\alpha > 0$, och alltså att

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \to 0 \text{ då } h \to 0$$

för alla $\alpha > 0$, dvs $f_1'(0,0)$ existerar och är 0 för alla $\alpha > 0$. Eftersom $f(x,y)$ är symmetrisk i x och y följer sedan direkt att även $f_2'(0,0)$ existerar och är 0 för alla $\alpha > 0$. Funktionen $f(x,y)$ är såldes differentierbar för alla $\alpha > 0$ för vilka

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_1'(0,0)x - f_2'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{f(x,y) - 0 - 0\cdot x - 0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|xy|^\alpha}{\big(x^2+xy+y^2\big)\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \quad \text{då } (x,y) \to (0,0).$$

Med hjälp av polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ får vi att

$$0 \leq \varphi(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\big(x^2+xy+y^2\big)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^{2\alpha}|\cos\theta\sin\theta|^\alpha}{\big(r^2 + r^2\cos\theta\sin\theta\big)r}$$

$$= r^{2\alpha-3}\frac{|\cos\theta\sin\theta|^\alpha}{1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta} \leq r^{2\alpha-3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2r^{2\alpha-3} = 2\big(x^2+y^2\big)^{\alpha-3/2},$$

vilket visar att $\varphi(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$ om $\alpha > \frac{3}{2}$. Vidare har vi för godtyckligt $t > 0$ att

$$\varphi(t,t) = \frac{1}{3\sqrt{2}}t^{2\alpha-3}, \quad \text{som inte går mot 0 då } t \to 0^+ \text{ om } 0 < \alpha \leq 3/2,$$

vilket visar att $\varphi(x, y)$ inte går mot 0 då $(x, y) \to (0, 0)$ om $0 < \alpha \leq \frac{3}{2}$. Funktionen $f(x, y)$ är således differentierbar i origo precis om $\alpha > \frac{3}{2}$.

5. *Kontinuitet i origo?*

Vi har att

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^3y + 2xy^3}{x^2 + y^2} - 0\right| = \frac{|x^3y + 2xy^3|}{x^2 + y^2} \leq$$

(enligt triangelolikheten)

$$\leq \frac{|x|^3|y| + 2|x||y|^3}{x^2 + y^2} =$$

(inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$)

$$= \frac{r^4|\cos\theta|^3|\sin\theta| + 2r^4|\cos\theta||\sin\theta|^3}{r^2} = r^2|\cos\theta|^3|\sin\theta| + 2r^2|\cos\theta||\sin\theta|^3 \leq$$

(ty $|\cos\theta| \leq 1$, $|\sin\theta| \leq 1$ för alla θ)

$$\leq r^2 + 2r^2 = 3r^2 = 3(x^2 + y^2) \quad \text{för alla } (x, y) \neq (0, 0).$$

Dvs vi har att

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq 3(x^2 + y^2) \quad \text{för alla } (x, y) \neq (0, 0).$$

Det följer att $f(x, y) \to f(0, 0)$ då $(x, y) \to (0, 0)$. Funktionen f är alltså kontinuerlig i origo.

Derivatan $f_1'(0, 0)$

Vi har att

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0 \quad \text{för alla } h \neq 0.$$

och alltså att

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \to 0 \quad \text{då } h \to 0$$

Derivatan $f_1'(0, 0)$ existerar alltså och är 0.

Derivatan $f_2'(0, 0)$

Vi har att

$$\frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \frac{0 - 0}{k} = 0 \quad \text{för alla } k \neq 0.$$

och alltså att

$$\frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} \to 0 \quad \text{då } k \to 0$$

Derivatan $f_2'(0, 0)$ existerar alltså och är 0.

Derivatan $f_{12}''(0, 0)$

Derivering ger att

$$f_1'(x, y) = \frac{(3x^2y + 2y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y + 2xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{för alla } (x, y) \neq (0, 0)$$

och alltså är

$$f_1'(0, k) = \frac{(0 + 2k^3)(0 + k^2) - 0}{(0 + k^2)^2} = 2k \quad \text{för alla } k \neq 0$$

Vi får att

$$\frac{f_1'(0,0+k)-f_1'(0,0)}{k}=\frac{f_1'(0,k)-f_1'(0,0)}{k}=\frac{2k-0}{k}=2 \quad \text{för alla } k\neq 0$$

och alltså att

$$\frac{f_1'(0,0+k)-f_1'(0,0)}{k}\to 2 \quad \text{då } k\to 0.$$

Derivatan $f_{12}''(0,0)$ existerar alltså och är 2.

Derivatan $f_{21}''(0,0)$

Derivering ger att

$$f_2'(x,y)=\frac{(x^3+6xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y+2xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{för alla } (x,y)\neq(0,0)$$

och alltså är

$$f_2'(h,0)=\frac{(h^3+0)(h^2+0)-0}{(h^2+0)^2}=h \quad \text{för alla } h\neq 0$$

Vi får att

$$\frac{f_2'(0+h,0)-f_2'(0,0)}{h}=\frac{f_2'(h,0)-f_2'(0,0)}{k}=\frac{h-0}{h}=1 \quad \text{för alla } h\neq 0$$

och alltså att

$$\frac{f_2'(0+h,0)-f_2'(0,0)}{h}\to 1 \quad \text{då } h\to 0.$$

Derivatan $f_{21}''(0,0)$ existerar alltså och är 1.

6. Vi ska betrakta funktionen $f(x,y)=x^2y+axy$. Vi noterar att

$$\nabla f(x,y)=(f_1'(x,y),f_2'(x,y))=(2xy+ay,x^2+ax),$$

det vill säga $\nabla f(1,1)=(2+a,1+a)$. Enligt den allmänna teorin har f i punkten (1,1) sin största tillväxt per längdenhet i riktningen $\nabla f(1,1)$. Det följer att f i punkten (1,1) har sin största tillväxt per längdenhet i riktningen $(3,1)$ om och endast om $(2+a,1+a)$ är parallell med $(3,1)$ och riktad åt samma håll. Vi ska alltså undersöka för vilka a som det går att hitta ett positivt tal λ så att

$$\begin{cases} 3\lambda &= 2+a \\ \lambda &= 1+a \end{cases}.$$

Ekvationssystemet har den enda lösningen $\lambda=\frac{1}{2}$ och $a=-\frac{1}{2}$. Eftersom $\lambda>0$ i lösningen kan alltså f i punkten $(1,1)$ ha sin största tillväxt i riktningen $(3,1)$ och det inträffar för $a=-\frac{1}{2}$. Största tillväxten per längdenhet i en punkt är lika med längden av gradienten i punkten. För $a=-\frac{1}{2}$ är $\nabla f(1,1)=(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$, och största tillväxten per längdenhet i punkten (1,1) är alltså

$$|\nabla f(1,1)|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Vi ska nu undersöka om det är möjligt att finna ett a så att f i punkten $(1,1)$ har sin största tillväxt per längdenhet i riktningen $(1,3)$. Ekvationen som ska studeras är i detta fall

$$\begin{cases} \lambda &= 2+a \\ 3\lambda &= 1+a \end{cases}.$$

Den enda lösningen är $\lambda=-\frac{1}{2}$, $a=-\frac{5}{2}$. Eftersom $\lambda<0$ i den enda lösningen finns det alltså inget a sådant att f i punkten $(1,1)$ har sin största tillväxt per längdenhet i riktningen $(1,3)$.

9. Låt $y = g(x)$ vara ekvationen för den kurva som söks. Sätt $h(x, y) = g(x) - y$. Den sökta kurvan är då $h(x, y) = 0$. Låt (x_0, y_0) vara en godtycklig punkt på den sökta kurvan $h(x, y) = 0$. I varje sådan punkt (x_0, y_0) gäller:

   i) $h(x, y) = 0$ är vinkelrät mot den nivåkurva till f som går genom punkten.

   ii) $\nabla f(x_0, y_0)$ är vinkelrät mot den nivåkurva till f som går genom punkten.

   iii) $\nabla h(x_0, y_0)$ är vinkelrät mot kurvan $h(x, y) = 0$.

   (Att i) gäller är givet i problemtexten. Att ii) och iii) gäller är en egenskap hos gradientvektorn.)

   Det följer att $\nabla f(x_0, y_0)$ är vinkelrät mot $\nabla h(x_0, y_0)$. Eftersom $\nabla f(x_0, y_0) = (2x_0, -1)$ och $\nabla h(x_0, y_0) = (g'(x_0), -1)$, så ger det

$$(2x_0, -1) \cdot (g'(x_0), -1) = 2x_0 g'(x_0) + 1 = 0.$$

   Men (x_0, y_0) är en godtycklig punkt på kurvan $y = g(x)$. Alltså gäller

$$2xg'(x) + 1 = 0 \quad \text{för} \quad \text{alla } x \neq 0,$$

   dvs vi har att

$$g'(x) = -\frac{1}{2x} \quad \text{för} \quad \text{alla } x \neq 0.$$

   Vi har alltså att

$$y = g(x) = -\frac{1}{2} \ln x + C_1 \quad \text{om } x > 0 \tag{1}$$

   och att

$$y = g(x) = -\frac{1}{2} \ln(-x) + C_2 \quad \text{om } x < 0.$$

   Eftersom sökt kurva ska gå genom punkten $(1, 0)$ är det kurvan (1) vi söker. $x = 1$, $y = 0$ insatt i (1) ger att $C_1 = 0$. Sökt kurva är alltså kurvan

$$y = -\frac{1}{2} \ln x, \quad x > 0.$$

10. Kullens höjd i punkten (x, y) ges av

$$z = 500e^{-(2x^2+3y^2)}.$$

   Kullen är som brantast uppåt i gradientens riktning;

$$\text{grad } z = (z'_x, z'_y) = 500e^{-(2x^2+3y^2)}(-4x, -6y) = -1000e^{-(2x^2+3y^2)}(2x, 3y).$$

   Personen som hela tiden rör sig i gradientens riktning kommer därför att hela tiden gå till vänster och nedåt så länge hon befinner sig i första kvadranten. På hela den sökta vägen kan alltså y uttryckas som en enda funktion av x. Låt $y = \varphi(x)$ vara den sökta vägen. Att personen rör sig i gradientens riktning kan tolkas som att normalvektorn $(\varphi'(x), -1)$ till kurvan $y = \varphi(x)$ i punkten $(x, \varphi(x))$ hela tiden är vinkelrät mot grad z i samma punkt $(x, \varphi(x))$, dvs $(\varphi'(x), -1)$ är hela tiden vinkelrät mot $(2x, 3\varphi(x))$. Med andra ord har vi att

$$(\varphi'(x), -1) \cdot (2x, 3\varphi(x)) = 0 \iff 2x\varphi'(x) - 3\varphi(x) = 0,$$

   vilket innebär att

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{3}{2x}.$$

   Från bergets geometri är det klart att på kartan är personens väg mot toppen hela tiden en väg i första kvadranten och alltså är hela tiden $x > 0$ på den sökta vägen. Integration av differentialekvationen ovan ger därför att

$$\ln |\varphi(x)| = \frac{3}{2} \ln x + C \iff \varphi(x) = \pm e^C x^{3/2},$$

dvs $y = \varphi(x) = Ax^{3/2}$, där A är en konstant. Startvillkoret $x = 4$, $y = 8$ ger $8 = A \cdot 4^{3/2} \iff A = 1$, dvs $y = x^{3/2}$. Kullens högsta punkt ligger i origo. Sökt väg på kartan är alltså kurvan $y = x^{3/2}$ från punkten (4,8) till punkten (0,0).

11. Låt $y = g(x)$ vara ekvationen för den kurva som söks. Sätt $h(x, y) = g(x) - y$. Den sökta kurvan är då $h(x, y) = 0$. Låt (x_0, y_0) vara en godtycklig punkt på den sökta kurvan $h(x, y) = 0$. I varje sådan punkt (x_0, y_0) gäller:

    i) $h(x, y) = 0$ är vinkelrät mot den nivåkurva till f som går genom punkten.

    ii) $\nabla f(x_0, y_0)$ är vinkelrät mot den nivåkurva till f som går genom punkten.

    iii) $\nabla h(x_0, y_0)$ är vinkelrät mot kurvan $h(x, y) = 0$.

    (Att i) ska gälla är givet i problemtexten. Att ii) och iii) gäller är en egenskap hos gradientvektorn.) Det följer att $\nabla f(x_0, y_0)$ är vinkelrät mot $\nabla h(x_0, y_0)$. Men $\nabla f(x_0, y_0) = 6(x_0^5, 2y_0^3)$ och $\nabla h(x_0, y_0) = (g'(x_0), -1)$. Alltså $(x_0^5, 2y_0^3) \cdot (g'(x_0), -1) = x_0^5 g'(x_0) - 2y_0^3 = 0$. Används sedan att $y_0 = g(x_0)$, som gäller eftersom (x_0, y_0) är en punkt på kurvan $y = g(x)$, så fås att $x_0^5 g'(x_0) - 2g(x_0)^3 = 0$. Men (x_0, y_0) är en godtycklig punkt på kurvan $y = g(x)$. Alltså gäller $x^5 g'(x) - 2g(x)^3 = 0$ för alla x. Denna differentialekvation kan skrivas $\dfrac{g'(x)}{g(x)^3} = \dfrac{2}{x^5}$, som direkt kan integreras och ger att $-\dfrac{1}{2g(x)^2} = -\dfrac{1}{2x^4} + C$. Eftersom $g(1) = 1$ så är $C = 0$ och det följer att $g(x)^2 = x^4$. Alltså $g(x) = \pm x^2$. Men $g(1) = 1$ så endast $g(x) = x^2$ går. Sökt kurva är alltså kurvan $y = x^2$.

16. Derivering av $T(x, y, z) = f(r)$ där $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ger enligt kedjeregeln för funktioner av en variabel att

$$T'_x(x, y, z) = f'(r)r'_x = f'(r)\frac{x}{r}$$

och att

$$T''_{xx}(x, y, z) = f''(r)r'_x\frac{x}{r} + f'(r)\frac{1 \cdot r - x \cdot r'_x}{r^2} = f''(r)\frac{x}{r}\frac{x}{r} + f'(r)\frac{1 \cdot r - x \cdot \frac{x}{r}}{r^2}.$$

Dvs det gäller att

$$T''_{xx}(x, y, z) = f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

På grund av symmetri gäller vidare att

$$T''_{yy}(x, y, z) = f''(r)\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2 - y^2}{r^3},$$

$$T''_{zz}(x, y, z) = f''(r)\frac{z^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2 - z^2}{r^3}.$$

Vi får att

$$T''_{xx} + T''_{yy} + T''_{zz} = 0 \iff f''(r)\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + f'(r)\frac{3r^2 - x^2 - y^2 - z^2}{r^3} = 0 \iff$$

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0. \tag{1}$$

Derivatan $f'(r)$ kan bestämmas från (1) med metoden med integrerande faktor. $f(r)$ fås sedan genom integration av $f'(r)$.

$$\int \frac{2}{r}\,dr = 2\ln|r| \quad (+\text{konstant}) = (\text{ty } r > 0) \;\; 2\ln r = \ln r^2$$

En integrerande faktor till (1) är alltså $e^{\ln r^2} = r^2$. Multiplikation av (1) med r^2 ger

$$r^2 f''(r) + 2rf'(r) = 0 \iff \frac{d}{dr}(r^2 f'(r)) = 0.$$

Integration ger

$$r^2 f'(r) = A \iff f'(r) = \frac{A}{r^2}.$$

Ny integration ger

$$f(r) = -\frac{A}{r} + B.$$

Här är A och B konstanter. Men det är givet att $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ skall gälla. Det ger $A = B = 2$ och alltså att

$$f(r) = -\frac{2}{r} + 2.$$

Sökt lösning till givna partiella differentialekvationen är alltså

$$T(x, y, z) = -\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 2.$$

18. Eftersom z är en C^2-funktion kan vi använda kedjeregeln på z och dess partiella förstaderivator. Kedjeregeln tillsammans med sambanden $u = xy^2$, $v = \dfrac{x}{y}$ ger att

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = y^2 z'_u + \frac{1}{y} z'_v \tag{1}$$

$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = 2xy z'_u - \frac{x}{y^2} z'_v \tag{2}$$

Vi fortsätter att derivera.

Derivatan z''_{xx}

$$z''_{xx} = D_x z'_x =$$

$$\text{(enligt (1))}$$

$$= D_x\Big(y^2 z'_u + \frac{1}{y} z'_v\Big) = y^2 D_x z'_u + \frac{1}{y} D_x z'_v =$$

$$\text{(enligt (1) med } z \text{ utbytt mot } z'_u \text{ repektive } z'_v\text{)}$$

$$= y^2\Big(y^2 D_u z'_u + \frac{1}{y} D_v z'_u\Big) + \frac{1}{y}\Big(y^2 D_u z'_v + \frac{1}{y} D_v z'_v\Big) =$$

$$= y^2\Big(y^2 z''_{uu} + \frac{1}{y} z''_{uv}\Big) + \frac{1}{y}\Big(y^2 z''_{vu}) + \frac{1}{y} z''_{vv}\Big) =$$

$$\text{(ty } z''_{vu} = z''_{uv} \text{ eftersom } z \in C^2\text{)}$$

$$= y^4 z''_{uu} + 2y z''_{uv} + \frac{1}{y^2} z''_{vv} \tag{3}$$

Derivatan z''_{xy}

$$z''_{xy} = D_y z'_x =$$

$$(\text{enligt (1)})$$

$$= D_y\Big(y^2 z'_u + \frac{1}{y} z'_v\Big) =$$

$$(\text{enligt produktregeln för derivering})$$

$$= 2yz'_u + y^2 D_y z'_u - \frac{1}{y^2} z'_v + \frac{1}{y} D_y z'_v =$$

$$(\text{enligt (2) med } z \text{ utbytt mot } z'_u \text{ repektive } z'_v)$$

$$= 2yz'_u + y^2\Big(2xyD_u z'_u - \frac{x}{y^2} D_v z'_u\Big) - \frac{1}{y^2} z'_v + \frac{1}{y}\Big(2xyD_u z'_v - \frac{x}{y^2} D_v z'_v\Big) =$$

$$= 2yz'_u + 2xy^3 z''_{uu} - xz''_{uv} - \frac{1}{y^2} z'_v + 2xz''_{vu} - \frac{x}{y^3} z''_{vv} =$$

$$(\text{ty } z''_{vu} = z''_{uv} \text{ eftersom } z \in C^2)$$

$$= 2xy^3 z''_{uu} + xz''_{uv} - \frac{x}{y^3} z''_{vv} + 2yz'_u - \frac{1}{y^2} z'_v \tag{4}$$

Derivatan z''_{yy}

$$z''_{yy} = D_y z'_y =$$

$$(\text{enligt (2)})$$

$$= D_y\Big(2xyz'_u - \frac{x}{y^2} z'_v\Big) =$$

$$(\text{enligt produktregeln för derivering})$$

$$= 2xz'_u + 2xyD_y z'_u + \frac{2x}{y^3} z'_v - \frac{x}{y^2} D_y z'_v =$$

$$(\text{enligt (2) med } z \text{ utbytt mot } z'_u \text{ repektive } z'_v)$$

$$= 2xz'_u + 2xy\Big(2xyD_u z'_u - \frac{x}{y^2} D_v z'_u\Big) + \frac{2x}{y^3} z'_v - \frac{x}{y^2}\Big(2xyD_u z'_v - \frac{x}{y^2} D_v z'_v\Big) =$$

$$= 2xz'_u + 4x^2y^2 z''_{uu} - \frac{2x^2}{y} z''_{uv} + \frac{2x}{y^3} z'_v - \frac{2x^2}{y} z''_{vu} + \frac{x^2}{y^4} z''_{vv} =$$

$$(\text{ty } z''_{vu} = z''_{uv} \text{ eftersom } z \in C^2)$$

$$= 4x^2y^2 z''_{uu} - \frac{4x^2}{y} z''_{uv} + \frac{x^2}{y^4} z''_{vv} + 2xz'_u + \frac{2x}{y^3} z'_v \tag{5}$$

Vi får att

$$2x^2 z''_{xx} + xyz''_{xy} - y^2 z''_{yy} =$$

$$(\text{enligt (3), (4) och (5)})$$

$$= 9x^2 y z''_{uv} - 3\frac{x}{y} z'_v =$$

$$(\text{eftersom } x^2y = xy^2\frac{x}{y} = uv \text{ och } \frac{x}{y} = v)$$

$$= 9uvz''_{uv} - 3vz'_v,$$

som är det givna differentialuttrycket uttryckt i u och v.

Området $x > 0$, $y > 0$ övergår genom avbildningen $u = xy^2$, $v = \dfrac{x}{y}$ i området $u > 0$, $v > 0$, och vi får för den givna differentialekvationen att

$$2x^2z''_{xx} + xyz''_{xy} - y^2z''_{yy} = 1, \quad x > 0,\ y > 0 \iff$$

$$9uvz''_{uv} - 3vz'_v = 1, \quad u > 0,\ v > 0 \iff z''_{uv} - \tfrac{1}{3}u^{-1}z'_v = \tfrac{1}{9}u^{-1}v^{-1}, \quad u > 0,\ v > 0 \iff$$

$$(\text{ty } z''_{uv} = z''_{vu} \text{ eftersom } z \in C^2)$$

$$z''_{vu} - \tfrac{1}{3}u^{-1}z'_v = \tfrac{1}{9}u^{-1}v^{-1}, \quad u > 0,\ v > 0 \iff$$

$$D_uz'_v - \tfrac{1}{3}u^{-1}z'_v = \tfrac{1}{9}u^{-1}v^{-1}, \quad u > 0,\ v > 0 \tag{6}$$

Ekvationen (6) är för varje fixt v en första ordningens differentialekvation i u och kan lösas med metoden med integrerande faktor.

$$\int \left(-\tfrac{1}{3}u^{-1} \right) du = -\tfrac{1}{3}\ln|u| \ (+ \text{ godtycklig funktion av } v) =$$

$$(\text{eftersom } u > 0 \text{ i vårt område})$$

$$= -\tfrac{1}{3}\ln u = \ln u^{-1/3}.$$

En integrerande faktor till (6) är alltså $e^{\ln u^{-1/3}} = u^{-1/3}$. Multiplikation av (6) med $u^{-1/3}$ ger

$$u^{-1/3}D_uz'_v - \tfrac{1}{3}u^{-4/3}z'_v = \tfrac{1}{9}u^{-4/3}v^{-1}, \quad u > 0,\ v > 0 \iff$$

$$D_u(u^{-1/3}z'_v) = \tfrac{1}{9}u^{-4/3}v^{-1}, \quad u > 0,\ v > 0.$$

Integration med avseende på u ger sedan

$$u^{-1/3}z'_v = -\tfrac{1}{3}u^{-1/3}v^{-1} + \omega(v), \quad u > 0,\ v > 0 \iff$$

$$z'_v = -\tfrac{1}{3}v^{-1} + u^{1/3}\omega(v), \quad u > 0,\ v > 0.$$

(Här är ω en godtycklig funktion i $C^1(\mathbf{R}_+)$.) Integration med avseende på v ger därefter till slut

$$z = -\tfrac{1}{3}\ln v + u^{1/3}\varphi(v) + \psi(u), \quad u > 0,\ v > 0, \quad \text{där } \ \varphi' = \omega.$$

Eftersom $z \in C^2$ på $u > 0$, $v > 0$ så måste $\varphi, \psi \in C^2(\mathbf{R}_+)$, för övrigt är φ, ψ godtyckliga. Går vi tillbaka till de ursprungliga variablerna x, y har vi alltså visat att lösningarna $z \in C^2$ till givna differentialekvationen

$$2x^2z''_{xx} + xyz''_{xy} - y^2z''_{yy} = 1, \quad x > 0,\ y > 0$$

är funktionerna

$$z = \tfrac{1}{3}(\ln y - \ln x) + x^{1/3}y^{2/3}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \psi(xy^2), \quad x > 0,\ y > 0$$

där φ, $\psi \in C^2(\mathbf{R}_+)$ är godtyckliga.

19. Eftersom z är en C^2-funktion kan vi använda kedjeregeln på z och dess partiella förstaderivator. Kedjeregeln tillsammans med sambanden $u = x^2y^2$, $v = \dfrac{x}{y}$ ger att

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = 2xy^2 z'_u + \frac{1}{y} z'_v \tag{1}$$

$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = 2x^2 y z'_u - \frac{x}{y^2} z'_v \tag{2}$$

Fortsatt derivering ger

$$z''_{xx} = D_x z'_x =$$

(enligt (1))

$$= D_x\Big(2xy^2 z'_u + \frac{1}{y} z'_v\Big) =$$

(enligt produktregeln för derivering)

$$= 2y^2 z'_u + 2xy^2 D_x z'_u + \frac{1}{y} D_x z'_v =$$

(enligt (1) med z utbytt mot z'_u repektive z'_v)

$$= 2y^2 z'_u + 2xy^2\Big(2xy^2 D_u z'_u + \frac{1}{y} D_v z'_u\Big) + \frac{1}{y}\Big(2xy^2 D_u z'_v + \frac{1}{y} D_v z'_v\Big) =$$

$$= 2y^2 z'_u + 2xy^2\Big(2xy^2 z''_{uu} + \frac{1}{y} z''_{uv}\Big) + \frac{1}{y}\Big(2xy^2 z''_{vu}) + \frac{1}{y} z''_{vv}\Big) =$$

(ty $z''_{vu} = z''_{uv}$ eftersom $z \in C^2$)

$$= 4x^2y^4 z''_{uu} + 4xy z''_{uv} + \frac{1}{y^2} z''_{vv} + 2y^2 z'_u \tag{3}$$

samt

$$z''_{yy} = D_y z'_y =$$

(enligt (2))

$$= D_y\Big(2x^2 y z'_u - \frac{x}{y^2} z'_v\Big) =$$

(enligt produktregeln för derivering)

$$= 2x^2 z'_u + 2x^2 y D_y z'_u + \frac{2x}{y^3} z'_v - \frac{x}{y^2} D_y z'_v =$$

(enligt (2) med z utbytt mot z'_u repektive z'_v)

$$= 2x^2 z'_u + 2x^2 y\Big(2x^2 y D_u z'_u - \frac{x}{y^2} D_v z'_u\Big) + \frac{2x}{y^3} z'_v - \frac{x}{y^2}\Big(2x^2 y D_u z'_v - \frac{x}{y^2} D_v z'_v\Big) =$$

$$= 2x^2 z'_u + 4x^4 y^2 z''_{uu} - \frac{2x^3}{y} z''_{uv} + \frac{2x}{y^3} z'_v - \frac{2x^3}{y} z''_{vu} + \frac{x^2}{y^4} z''_{vv} =$$

(ty $z''_{vu} = z''_{uv}$ eftersom $z \in C^2$)

$$= 4x^4y^2z''_{uu} - \frac{4x^3}{y}z''_{uv} + \frac{x^2}{y^4}z''_{vv} + 2x^2z'_u + \frac{2x}{y^3}z'_v \tag{4}$$

Vi får alltså att

$$x^2z''_{xx} - y^2z''_{yy} + 2xz'_x =$$

$$\text{(enligt (1), (3) och (4))}$$

$$= 8x^3yz''_{uv} + 4x^2y^2z'_u =$$

$$\left(\text{eftersom } x^3y = x^2y^2\frac{x}{y} = uv \text{ och } x^2y^2 = u\right)$$

$$= 8uvz''_{uv} + 4uz'_u,$$

som är det givna differentialuttrycket uttryckt i u och v.

Området $x > 0$, $y > 0$ övergår genom avbildningen $u = x^2y^2$, $v = \dfrac{x}{y}$ i området $u > 0$, $v > 0$, och vi får för den givna differentialekvationen att

$$x^2z''_{xx} - y^2z''_{yy} + 2xz'_x = 1, \quad x > 0,\ y > 0 \iff$$

$$8uvz''_{uv} + 4uz'_u = 1, \quad u > 0,\ v > 0 \iff z''_{uv} + \tfrac{1}{2}v^{-1}z'_u = \tfrac{1}{8}u^{-1}v^{-1}, \quad u > 0,\ v > 0 \iff$$

$$D_vz'_u + \tfrac{1}{2}v^{-1}z'_u = \tfrac{1}{8}u^{-1}v^{-1}, \quad u > 0,\ v > 0 \tag{5}$$

Ekvationen (5) är för varje fixt u en första ordningens differentialekvation i v och kan lösas med metoden med integrerande faktor. $\int \frac{1}{2}v^{-1}\,dv = \frac{1}{2}\ln|v|$ (+ godtycklig funktion av u) = (eftersom $v > 0$ i vårt område) $= \frac{1}{2}\ln v = \ln v^{1/2}$. En integrerande faktor till (5) är alltså $e^{\ln v^{1/2}} = v^{1/2}$. Multiplikation av (5) med $v^{1/2}$ ger

$$v^{1/2}D_vz'_u + \tfrac{1}{2}v^{-1/2}z'_u = \tfrac{1}{8}u^{-1}v^{-1/2}, \quad u > 0,\ v > 0 \iff$$

$$D_v(v^{1/2}z'_u) = \tfrac{1}{8}u^{-1}v^{-1/2}, \quad u > 0,\ v > 0.$$

Integration med avseende på v ger sedan

$$v^{1/2}z'_u = \tfrac{1}{4}u^{-1}v^{1/2} + \omega(u), \quad u > 0,\ v > 0 \iff$$

$$z'_u = \tfrac{1}{4}u^{-1} + v^{-1/2}\omega(u), \quad u > 0,\ v > 0.$$

Integration med avseende på u ger till slut sedan

$$z = \tfrac{1}{4}\ln u + v^{-1/2}\varphi(u) + \psi(v), \quad u > 0,\ v > 0, \quad \text{där} \quad \varphi' = \omega.$$

Eftersom $z \in C^2$ på $u > 0$, $v > 0$ så måste $\varphi, \psi \in C^2(\mathbf{R}_+)$, för övrigt är φ, ψ godtyckliga. Går vi tillbaka till de ursprungliga variablerna x, y har vi alltså visat att lösningarna $z \in C^2$ till givna differentialekvationen

$$x^2z''_{xx} - y^2z''_{xy} + 2xz'_x = 1, \quad x > 0,\ y > 0$$

är funktionerna

$$z = \tfrac{1}{2}(\ln x + \ln y) + y^{1/2}x^{-1/2}\varphi(x^2y^2) + \psi\left(\frac{x}{y}\right), \quad x > 0,\ y > 0$$

där $\varphi, \psi \in C^2(\mathbf{R}_+)$ är godtyckliga.

21. • Stationära punkter.

$f_1'(x,y) = 8x(x^2-y)$, $f_2'(x,y) = 4(y^3-x^2))$. Vi har alltså att $f_1'(x,y) = f_2'(x,y) = 0 \iff$

$$\begin{cases} x(x^2-y) = 0 \\ y^3 - x^2 = 0. \end{cases}$$

Första ekvationen ovan är uppfylld då $x = 0$ och då $y = x^2$. Insättning av $x = 0$ i andra ekvationen ovan ger $y^3 = 0$ med enda lösningen $y = 0$. Insättning av $y = x^2$ i andra ekvationen ovan ger $x^6 - x^2 = 0 \iff x^2(x^4-1) = 0$ som har de reella lösningarna $x = 0$, $x = 1$ och $x = -1$. Av $y = x^2$ fås att motsvarande y-värden är $y = 0$, $y = 1$ och $y = 1$ respektive. De stationära punkterna till f är således punkterna $(0,0)$, $(1,1)$ och $(-1,1)$.

• De stationära punkternas karaktär.

$f_{11}''(x,y) = 8(3x^2-y)$, $f_{12}''(x,y) = -8x$, $f_{22}''(x,y) = 12y^2$. $Q(h,k) = f_{11}''h^2 + 2f_{12}''hk + f_{22}''k^2$.

I den stationära punkten $(0,0)$ är $Q(h,k) = 0$ för alla (h,k) så ingen säker slutsats kan dras från $Q(h,k)$ om karaktären av den stationära punkten $(0,0)$. Eftersom f är en så enkel funktion är det dock lätt att direkt se vad som gäller i $(0,0)$. Till exempel så är $f(t,t) = 3t^4 - 4t^3 = t^3(3t-4)$, varav följer att $f(t,t) < 0 = f(0,0)$ för alla $t \in]0, \frac{4}{3}[$ och att $f(t,t) > 0 = f(0,0)$ för alla $t < 0$. Funktionen f har således varken lokalt maximum eller lokalt minimum i $(0,0)$, och följaktligen har f en sadelpunkt i punkten $(0,0)$.

I den stationära punkten $(1,1)$ är $Q(h,k) = 16h^2 - 16hk + 12k^2 = 4(4h^2 - 4hk + 3k^2) = 4\big((2h-k)^2 + 2k^2\big)$, varav följer att $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k) samt att $Q(h,k) = 0 \Leftrightarrow 2h - k = k = 0 \Leftrightarrow h = k = 0$, och alltså har vi att $Q(h,k) > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$. Funktionen $f(x,y)$ har således ett strängt lokalt minimum i punkten $(1,1)$.

I den stationära punkten $(-1,1)$ är $Q(h,k) = 16h^2 + 16hk + 12k^2 = 4(4h^2 + 4hk + 3k^2) = 4\big((2h+k)^2 + 2k^2\big)$, varav följer att $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k) samt att $Q(h,k) = 0 \Leftrightarrow 2h + k = k = 0 \Leftrightarrow h = k = 0$, och alltså har vi att $Q(h,k) > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$. Funktionen $f(x,y)$ har således ett strängt lokalt minimum i punkten $(-1,1)$.

22. • Stationära punkter

$f_1'(x,y) = 8(x^3 - (2x^4 - y^4))e^{-8x-4y}$
$f_2'(x,y) = 4(-y^3 - (2x^4 - y^4))e^{-8x-4y}$.
Vi får att $f_1'(x,y) = f_2'(x,y) = 0 \iff$

$$\begin{cases} x^3 &= 2x^4 - y^4 \\ -y^3 &= 2x^4 - y^4, \end{cases}$$

som ger $-y^3 = x^3$, dvs $y = -x$, och detta insatt i någon av ekvationerna ovan ger sedan att $x^4 = x^3$, en ekvation med lösningarna $x = 0$ och $x = 1$. Lösningarna till ekvationssystemet ovan är alltså $(x,y) = (0,0)$ och $(x,y) = (1,-1)$. Funktionen f har alltså de båda stationära punkterna $(0,0)$ och $(1,-1)$.

• De stationära punkternas karaktär

$f_{11}''(x,y) = 8(16x^4 - 16x^3 + 3x^2 - 8y^4)e^{-8x-4y}$
$f_{12}''(x,y) = 32(2x^4 - x^3 - y^4 + y^3)e^{-8x-4y}$
$f_{22}''(x,y) = 4(8x^4 - 4y^4 + 8y^3 - 3y^2)e^{-8x-4y}$
$Q(h,k) = f_{11}''h^2 + 2f_{12}''hk + f_{22}''k^2$

Punkten $(1,-1)$:

$$Q(h,k) = (-40h^2 - 64hk - 28k^2)e^{-4} = -40e^{-4}\Big(h^2 + \frac{8}{5}hk + \frac{7}{10}k^2\Big) = -40e^{-4}\Big(\Big(h + \frac{4}{5}k\Big)^2 + \frac{3}{50}k^2\Big),$$

vilket visar att $Q(h,k) \leq 0$ för alla (h,k) och att $Q(h,k) = 0 \iff h + \frac{4}{5}k = k = 0 \iff h = k = 0$, dvs

$Q(h,k) < 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$. Funktionen f har alltså ett strängt lokalt maximum i $(1,-1)$.

Punkten $(0,0)$:

I denna punkt är $f''_{11} = f''_{12} = f''_{22} = 0$ och det går alltså inte att använda Q för att avgöra karaktären hos den stationära punkten $(0,0)$. Det är dock inte svårt att se vad som gäller i $(0,0)$. Vi ser att $f(x,0) = 2x^4e^{-8x} > 0$ för alla $x \neq 0$, samt att $f(0,y) = -y^4e^{-4y} < 0$ för alla $y \neq 0$, och alltså har f varken lokalt maximum eller minimum i $(0,0)$, dvs f har en sadelpunkt i $(0,0)$.

23. Sätt $g(x,y) = x^3 + 3xy + 8y^3 - 22$. De stationära punkterna till $f(x,y)$ under bivillkoret att $g(x,y) = 0$ är de punkter (x,y) där $\nabla f(x,y)$ och $\nabla g(x,y)$ är linjärt beroende. Derivering ger

$$\nabla f(x,y) = (y,x) \text{ och } \nabla g(x,y) = 3(x^2 + y, x + 8y^2).$$

Enligt teorin för determinanter är två vektorer i $\mathbf{R}^2$ linjärt beroende om och endast om deras determinant är 0. Det följer att $\nabla f(x,y)$ och $\nabla g(x,y)$ är linjärt beroende $\iff$

$$\begin{vmatrix} y & x \\ x^2+y & x+8y^2 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$xy + 8y^3 - (x^3 + xy) = 0 \iff x^3 = 8y^3 \iff x = 2y.$$

Insättning av $x = 2y$ i $g(x,y) = 0$ ger $8y^3 + 3y^2 = 11$, en ekvation som uppenbarligen löses av $y = 1$. Division av $8y^3 + 3y^2 - 11$ med $y - 1$ ger kvoten $8y^2 + 11y + 11$, ett polynom som saknar reella nollställen. Lösningen $y = 1$ är alltså den enda reella lösnigen till ekvationen $8y^3 + 3y^2 = 11$. Av $y = 1$ fås $x = 2y = 2 \cdot 1 = 2$ Den erhållna punkten $(2,1)$ är alltså den enda punkt där $\nabla f(x,y)$ och $\nabla g(x,y)$ är linjärt beroende. Den enda stationära punkten är således $(2,1)$.

31. Gör variabelsubstitutionen

$$u = x^2y, \;\; v = \frac{x}{y}. \tag{1}$$

Området D övergår då i området $\pi/2 \leq u \leq \pi$, $\pi/2 \leq v \leq \pi$. Multipliceras sambanden i (1) fås att $x^3 = uv$, $x = u^{1/3}v^{1/3}$. Det ger sedan att $y = u^{1/3}v^{-2/3}$. Vidare får vi att

$$\frac{x^2}{y} = \frac{\left(u^{1/3}v^{1/3}\right)^2}{u^{1/3}v^{-2/3}} = u^{1/3}v^{4/3}$$

och att

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{-2/3} & -\frac{2}{3}u^{1/3}v^{-5/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}u^{-1/3}v^{-4/3}.$$

Formeln för variabelsubstitution i dubbelintegral och fortsatt räkning ger sedan att

$$\iint_D \frac{x^2}{y} \sin\left(x^2y + \frac{x}{y}\right) dx\,dy = \iint_{\substack{\pi/2 \leq u \leq \pi \\ \pi/2 \leq v \leq \pi}} u^{1/3}v^{4/3}\big(\sin(u+v)\big)\left| -\frac{1}{3}u^{-1/3}v^{-4/3}\right| du\,dv =$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{\substack{\pi/2 \leq u \leq \pi \\ \pi/2 \leq v \leq \pi}} \sin(u+v)\,du\,dv = \frac{1}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(u+v)\,dv\right) du =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\big[-\cos(u+v)\big]_{v=\pi/2}^{v=\pi}\right) du = \frac{1}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}\big(\cos(u+\pi/2) - \cos(u+\pi)\big)\,du =$$

$$= \frac{1}{3}\big[\sin(u+\pi/2) - \sin(u+\pi)\big]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{2}{3}.$$

34. Olikheten $\frac{1}{2}x < y < x$, som gäller i D, medför $x > \frac{1}{2}x$, dvs $x > 0$. (Även $y > 0$ i D ty $y > \frac{1}{2}x > 0$ i D.) Eftersom $x > 0$ i området D, kan D skrivas $\frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 1$, $1 < \frac{y}{\sqrt{x}} < 2$. Vi försöker med variabelsubstitutionen $u = \frac{y}{x}$, $v = \frac{y}{\sqrt{x}}$. Området D övergår då i området $\frac{1}{2} < u < 2$, $1 < v < 2$, och vidare gäller att $x = u^{-2}v^2$, $y = u^{-1}v^2$. Substitutionens funktionaldeterminant

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2u^{-3}v^2 & 2u^{-2}v \\ -u^{-2}v^2 & 2u^{-1}v \end{vmatrix} = -2u^{-4}v^3.$$

Formeln för variabelsubstitution i dubbelintegral och fortsatt räkning ger sedan

$$\iint_D \frac{1}{x^3+y^3}\,dx\,dy = \iint_{\substack{1/2<u<1\\1<v<2}} \frac{1}{u^{-6}v^6+u^{-3}v^6}\left|-2u^{-4}v^3\right|\,du\,dv =$$

$$= 2\iint_{\substack{1/2<u<1\\1<v<2}} \frac{u^2}{1+u^3}v^{-3}\,du\,dv = 2\int_{1/2}^{1}\frac{u^2}{1+u^3}\,du\int_1^2 v^{-3}\,dv =$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}\ln|1+u^3|\right]_{1/2}^{1}\left[-\frac{1}{2}v^{-2}\right]_1^2 = 2\cdot\frac{1}{3}\left(\ln 2 - \ln\frac{9}{8}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

35. Vi har att

$$\iint_{\mathbf{R}^2}\frac{1}{(1+x^2+2y^2)^2}\,dx\,dy =$$

$$\text{(gör variabelsubstitutionen } u = x,\ v = \sqrt{2}y \iff x = u,\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}v,$$

$$\text{substitutionens funktionaldeterminant } \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.)$$

$$= \iint_{\mathbf{R}^2}\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\,du\,dv = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\mathbf{R}^2}\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}\,du\,dv =$$

$$\text{(inför polära koordinater } u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta.)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\substack{0\le r<\infty\\0\le\theta<2\pi}}\frac{1}{(1+r^2)^2}\,r\,dr\,d\theta = \pi\sqrt{2}\int_0^\infty\frac{r}{(1+r^2)^2}\,dr,$$

där enkelintegralen här är generaliserad enbart genom att den övre integrationsgränsen är ∞. Men

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T\frac{r}{(1+r^2)^2}\,dr = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}\right]_0^T = \frac{1}{2}.$$

Den givna dubbelintegralen är således konvergent och har värdet $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

36. Vi fösöker med variabelsubstitutionen $u = x^4y$, $v = xy^4$. Området D övergår då i området $u > 1$, $v > 1$. Av $u = x^4y$ fås $y = x^{-4}u$, som insatt i $v = xy^4$ ger $v = x^{-15}u^4$, varav följer att $x = u^{4/15}v^{-1/15}$. Insättning av $x = u^{4/15}v^{-1/15}$ i $y = x^{-4}u$ ger sedan att $y = u^{-1/15}v^{4/15}$. Den valda variabelsubstitutionen har alltså den entydiga inversen $x = u^{4/15}v^{-1/15}$, $y = u^{-1/15}v^{4/15}$ och ger således en bijektionen av D på området $u > 1$, $v > 1$. Substitutionens funktionaldeterminant

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{4}{15}u^{-11/15}v^{-1/15} & -\dfrac{1}{15}u^{4/15}v^{-16/15} \\ \dfrac{-1}{15}u^{-16/15}v^{4/15} & \dfrac{4}{15}u^{-1/15}v^{-11/15} \end{vmatrix} = \frac{1}{15}u^{-4/5}v^{-4/15}.$$

Angiven variabelsubstitution ger därför enligt formeln för variabelsubstitution i dubbelintegral att

$$\iint_D \frac{1}{\left(x^3+y^3\right)^4}\,dx\,dy = \iint_{\substack{u>1\\v>1}} \frac{1}{\left(u^{4/5}v^{-1/5}+u^{-1/5}v^{4/5}\right)^4}\left|\frac{1}{15}u^{-4/5}v^{-4/15}\right|du\,dv \tag{1}$$

$$= \frac{1}{15}\iint_{\substack{u>1\\v>1}} \frac{1}{(u+v)^4}\,du\,dv.$$

Betrakta nu den itererade enkelintegralen

$$\int_1^\infty \left(\int_1^\infty \frac{1}{(u+v)^4}\,du\right)dv, \tag{2}$$

den ena av de båda itererade enkelintegraler som hör till sista dubbelintegralen i (1). Den inre enkelintegralen i (2) är generaliserad genom att övre integrationsfränsen är ∞. Vi har att

$$\int_1^T \frac{1}{(u+v)^4}\,du = \left[-\frac{1}{3}\frac{1}{(u+v)^3}\right]_{u=1}^{u=T} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(1+v)^3}-\frac{1}{(T+v)^3}\right),$$

$$\text{som} \longrightarrow \frac{1}{3}\frac{1}{(1+v)^3} \quad \text{då} \quad T\longrightarrow\infty \quad \text{för varje } v>1.$$

Den inre integralen i (2) är således konvergent och har värdet $\frac{1}{3}\frac{1}{(1+v)^3}$ för varje $v>1$. Detta insatt i (2) ger enkelintegralen

$$\frac{1}{3}\int_1^\infty \frac{1}{(1+v)^3}\,dv, \tag{3}$$

som är generaliserad genom att övre integrationsgränsen är ∞. Vi har att

$$\frac{1}{3}\int_1^T \frac{1}{(1+v)^3}\,dv = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+v)^2}\right]_{v=1}^{v=T} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+T)^2}\right), \quad \text{som} \longrightarrow \frac{1}{24} \quad \text{då} \quad T\longrightarrow\infty.$$

Den generaliserade enkelintegralen (3) är således konvergent och har värdet $\frac{1}{24}$, dvs den itererade enkelintegralen (2) är konvergent och har värdet $\frac{1}{24}$. Eftersom integranden är positiv gäller detsamma motsvarande dubbelintegral, dvs den sista dubbelintegralen i (1) är konvergent och har värdet $\frac{1}{24}$. Följaktligen är även den första dubbelintegralen i (1) konvergent och har värdet $\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{24}$, dvs

$$\iint_D \frac{1}{\left(x^3+y^3\right)^4}\,dx\,dy = \frac{1}{360}.$$

37. Låt D beteckna det givna området $x+y+z\le 1$, $z\ge x^2+y^2$, låt γ vara skärningskurvan mellan planet $x+y+z=1$ och paraboloiden $z=x^2+y^2$, låt Γ vara projektionen av γ på xy-planet och låt E vara området innanför Γ i xy-planet. Då gäller (rita figur) att givna området D är området bestående av alla (x,y,z) sådana att $(x,y)\in E$ och $x^2+y^2\le z\le 1-x-y$. Sambandet $z=1-x-y$ från planets ekvation insatt i paraboloidens ekvation ger att $1-x-y=x^2+y^2$, vilket kan skrivas $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$. Kurvan γ består alltså av alla (x,y,z) sådana att $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$ och $z=1-x-y$. Kurvan Γ är alltså kurvan $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$ i xy-planet, och E är alltså området $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{3}{2}$ i xy-planet. Vi får att

$$\operatorname{vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_E\left(\int_{x^2+y^2}^{1-x-y} dz\right)dx\,dy = \iint_E \left(\left[z\right]_{z=x^2+y^2}^{z=1-x-y}\right)dx\,dy =$$

$$= \iint_E (1-x-y-x^2-y^2)\,dx\,dy = \iint_E\left(\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\right)dx\,dy =$$

$$(\text{gör substitutionen } u = x + \frac{1}{2},\ v = y + \frac{1}{2},\ \text{dvs } x = u - \frac{1}{2},\ y = v - \frac{1}{2},$$
$$\text{substitutionens funktionaldeterminant } \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = 1.)$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \le \frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} - u^2 - v^2\right) |1|\, du\, dv = \iint_{u^2+v^2 \le \frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} - u^2 - v^2\right) du\, dv =$$

$$(\text{inför polära koordinater } u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta)$$

$$= \iint_{\substack{0 \le r \le \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 \le \theta \le 2\pi}} \left(\frac{3}{2} - r^2\right) r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3}{2} r - r^3\right) dr =$$

$$= 2\pi \left[\frac{3}{4} r^2 - \frac{1}{4} r^4\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{9\pi}{8}.$$

39. Sökt volym är volymen av området Ω, där Ω är området $2x^2 + 2y^2 \le 1 + z^2$, $x \le z \le x + 1 \iff 2x^2 + 2y^2 \le 1 + z^2$, $0 \le z - x \le 1$. Vi använder att $\mathrm{vol}\,(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz$ och gör variabelsubsttutionen $u = x$, $v = y$, $w = z - x \iff x = u$, $y = v$, $z = u + w$. Substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = 1$ som en enkel räkning visar, och $(x, y, z) \in \Omega$ övergår i $(u, v, w) \in \Omega'$ där Ω' är området $2u^2 + 2v^2 \le 1 + (u+w)^2$, $0 \le w \le 1 \iff u^2 - 2uw + 2v^2 \le 1 + w^2$, $0 \le w \le 1 \iff (u-w)^2 + 2v^2 \le 1 + 2w^2$, $0 \le w \le 1$. Vi får att

$$\mathrm{vol}\,(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iiint_{\Omega'} |1|\, dudvdw = \tag{4}$$
$$= \iiint_{\Omega'} dudvdw = \int_0^1 \left(\iint_{(u-w)^2+2v^2 \le 1+2w^2} dudv\right) dw.$$

I dubbelintegralen ovan gör vi för varje fixt w substitutionen $s = u - w$, $t = \sqrt{2}v \iff u = s + w$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}} t$. Substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och $(u-w)^2 + 2v^2 \le 1 + 2w^2$ övergår i $s^2 + t^2 \le 1 + 2w^2$. Det följer att

$$\iint_{(u-w)^2+2v^2 \le 1+2w^2} dudv = \iint_{s^2+t^2 \le 1+2w^2} \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| dsdt = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \le 1+2w^2} dsdt = \tag{5}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \mathrm{area}\left(s^2 + t^2 \le 1 + 2w^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \pi \left(\sqrt{1+2w^2}\right)^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1 + 2w^2).$$

Av (4) och (5) får vi att

$$\mathrm{vol}\,(\Omega) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 (1 + 2w^2)\, dw = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[w + \frac{2}{3} w^3\right]_0^1 = \frac{5\sqrt{2}\pi}{6}.$$

40. Vi har att

$$\iiint_D x^2\, dxdydz =$$

$$(\text{Gör variabelsubstitutionen } u = z,\ v = \sqrt{2}y,\ w = x \Leftrightarrow x = w,\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} v,\ z = u,$$

$$\text{substitutionens funktionaldeterminant är } \frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.)$$

$$= \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 2} w^2 \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} \right| du dv dw = \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 2} w^2 \, du dv dw =$$

(Rymdpolära koordinater $u = r\sin\theta\cos\varphi$, $v = r\sin\theta\sin\varphi$, $w = r\cos\theta$ införs.)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\substack{0\le r\le\sqrt{2}\\ 0\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi<2\pi}} r^2\cos^2\theta \; r^2\sin\theta \, dr d\theta d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} r^4 \, dr \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{5} r^5\right]_0^{\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi} 2\pi = \frac{16\pi}{15}.$$

Anmärkning: Den avslutande trippelintegralen kan också beräknas genom att enbart använda vanliga polära koordinater. Se lösningen av uppgift 22, där en likartad trippelintegral beräknas på detta sätt.

41. Vi har att (rita figur)

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \left(\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dx\, dy \right) dz =$$

(inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$)

$$= \int_0^1 \left(\iint_{\substack{0\le r\le z\\ 0\le\theta<2\pi}} \sqrt{r^2+z^2} \; r\, dr\, d\theta \right) dz = 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^z \sqrt{r^2+z^2} \; r\, dr \right) dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{3} (r^2+z^2)^{3/2} \right]_0^z \right) dz = 2\pi \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \int_0^1 z^3 \, dz = \frac{2\sqrt{2}-1}{6} \pi.$$

42. Vi bestämmer först skärningen mellan de båda ytorna $z = 7 - x^2 - y^2$ och $x^2+y^2+z^2 = 9$. Sambandet $x^2 + y^2 = 7 - z$ från den ena ytans ekvation ger insatt i den andra ytans ekvation att $7 - z + z^2 = 9$, en andragradsekvation med lösningarna $z = 2$ och $z = -1$. Skärningen mellan ytorna är alltså dels kurvan bestående av alla (x, y, z) sådana att $z = 2$ och $x^2 + y^2 = 5$ samt dels kurvan bestående av alla (x, y, z) sådana att $z = -1$ och $x^2 + y^2 = 8$. Området D kan därför delas upp i följande delområden (rita figur):

D_1 bestående av alla (x, y, z) sådana att $-3 \le z < -1$ och $x^2 + y^2 \le 9 - z^2$,

D_2 bestående av alla (x, y, z) sådana att $-1 \le z < 2$ och $x^2 + y^2 \le 7 - z$,

D_3 bestående av alla (x, y, z) sådana att $2 \le z \le 3$ och $x^2 + y^2 \le 9 - z^2$.

Vi får att

$$\iiint_D z \, dx\, dy\, dz = \iiint_{D_1} z \, dx\, dy\, dz + \iiint_{D_2} z \, dx\, dy\, dz + \iiint_{D_3} z \, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_{-3}^{-1} z \left(\iint_{x^2+y^2\le 9-z^2} dx\, dy \right) dz + \int_{-1}^{2} z \left(\iint_{x^2+y^2\le 7-z} dx\, dy \right) dz +$$

$$+ \int_2^3 z \left(\iint_{x^2+y^2\le 9-z^2} dx\, dy \right) dz =$$

(eftersom $\iint_A dx\, dy = \text{area}(A)$)

$$= \int_{-3}^{-1} z\pi(9-z^2)\,dz + \int_{-1}^{2} z\pi(7-z)\,dz + \int_{2}^{3} z\pi(9-z^2)\,dz =$$

$$= \pi\int_{-3}^{-1}(9z-z^3)\,dz + \pi\int_{-1}^{2}(7z-z^2)\,dz + \pi\int_{2}^{3}(9z-z^3)\,dz = -\frac{9\pi}{4}.$$

Anmärkning: Området D kan också delas upp i följande delområden:

E_1 bestående av alla (x,y,z) sådana att $5 \le x^2+y^2 \le 8$ och $-\sqrt{9-x^2-y^2} \le z \le 7-x^2-y^2$,

E_2 bestående av alla (x,y,z) sådana att $x^2+y^2 < 5$ och $-\sqrt{9-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}$.

Använder vi den uppdelningen får vi istället att

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{E_1} z\,dx\,dy\,dz + \iiint_{E_2} z\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_{5\le x^2+y^2\le 8}\left(\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{7-x^2-y^2} z\,dz\right)dx\,dy + \iint_{x^2+y^2<5}\left(\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\,dz\right)dx\,dy =$$

$$= \iint_{5\le x^2+y^2\le 8}\left(\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{7-x^2-y^2}\right)dx\,dy + \iint_{x^2+y^2<5}\left(\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right)dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{5\le x^2+y^2\le 8}\left((7-x^2-y^2)^2 - 9 + x^2 + y^2\right)dx\,dy + 0 =$$

(inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$)

$$= \frac{1}{2}\iint_{\substack{\sqrt{5}\le r\le\sqrt{8}\\ 0\le\theta\le 2\pi}}\left((7-r^2)^2 - 9 + r^2\right)r\,dr\,d\theta = \pi\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}}\left(r(7-r^2)^2 - 9r + r^3\right)dr = -\frac{9\pi}{4}.$$

43. Vi bestämmer först skärningen mellan de båda ytorna $z^2 = 2x^2+3y^2-1$ och $x^2+y^2+z^2 = 3$. Sambandet $z^2 = 2x^2+3y^2-1$ från första ytans ekvation ger insatt i den andra ytans ekvation att $x^2+y^2+2x^2+3y^2-1 = 3$, dvs $3x^2+4y^2 = 4$. Skärningen mellan ytorna är alltså dels kurvan bestående av alla (x,y,z) sådana att $3x^2+4y^2 = 4$ och $z = \sqrt{2x^2+3y^2-1}$ samt dels kurvan bestående av alla (x,y,z) sådana att $3x^2+4y^2 = 4$ och $z = -\sqrt{2x^2+3y^2-1}$. Området D kan därför delas upp i följande delområden (rita figur):

D_1 bestående av alla (x,y,z) sådana att $2x^2+3y^2 < 1$ och $0 \le z \le \sqrt{3-x^2-y^2}$,

D_2 bestående av alla (x,y,z) sådana att $(x,y) \in E$ och $\sqrt{2x^2+3y^2-1} \le z \le \sqrt{3-x^2-y^2}$, där E är området i xy-planet mellan de båda kurvorna $2x^2+3y^2 = 1$ och $3x^2+4y^2 = 4$.

Vi får att

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_1} z\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} z\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_{2x^2+3y^2<1}\left(\int_0^{\sqrt{3-x^2-y^2}} z\,dx\right)dx\,dy + \iint_E\left(\int_{\sqrt{2x^2+3y^2-1}}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} z\,dx\right)dx\,dy =$$

$$= \iint_{2x^2+3y^2<1}\left(\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=\sqrt{3-x^2-y^2}}\right)dx\,dy + \iint_E\left(\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=\sqrt{2x^2+3y^2-1}}^{z=\sqrt{3-x^2-y^2}}\right)dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{2x^2+3y^2<1}(3-x^2-y^2)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint_E(4-3x^2-4y^2)\,dx\,dy =$$

(Eftersom E är området mellan de båda kurvorna $2x^2+3y^2=1$ och $3x^2+4y^2=4$, och kurvan $2x^2+3y^2=1$ helt och hållet ligger innanför kurvan $3x^2+4y^2=4$.)

$$= \frac{1}{2}\iint_{2x^2+3y^2<1}(3-x^2-y^2)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint_{3x^2+4y^2\le 4}(4-3x^2-4y^2)\,dx\,dy -$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{2x^2+3y^2<1}(4-3x^2-4y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{2x^2+3y^2<1}(2x^2+3y^2-1)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint_{3x^2+4y^2\le 4}(4-3x^2-4y^2)\,dx\,dy =$$

(Gör substitutionen $u=\sqrt{2}x$, $v=\sqrt{3}y$, dvs $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}u$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}v$ i den första integralen. Substitutionens funktionaldeterminant $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Gör substitutionen $u=\sqrt{3}x$, $v=2y$, dvs $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}u$, $y=\dfrac{1}{2}v$ i den andra integralen. Substitutionens funktionaldeterminant $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.)

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\iint_{u^2+v^2<1}(u^2+v^2-1)\,du\,dv + \frac{1}{4\sqrt{3}}\iint_{u^2+v^2\le 4}(4-u^2-v^2)\,du\,dv =$$

(Övergå till polära koordinater i båda integralerna.)

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}}(r^2-1)r\,dr\,d\theta + \frac{1}{4\sqrt{3}}\iint_{\substack{0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi}}(4-r^2)r\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{6}}\int_0^1 (r^3-r)\,dr + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\int_0^2 (4r-r^3)\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{6}}\left[\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{2}r^2\right]_0^1 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[2r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^2 = \frac{\pi}{24}(16\sqrt{3}-\sqrt{6}).$$

44 Låt γ vara skärningskurvan mellan planet $z=1+\frac{1}{2}x$ och konen $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Insättning av $z=1+\frac{1}{2}x$ i $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ger $1+\frac{1}{2}x=\sqrt{x^2+y^2}$, vilket efter kvadrering kan skrivas $\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{4}{3}$. Kurvan γ består alltså av alla $(x.y,z)$ sådana att $\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{4}{3}$ och $z=1+\frac{1}{2}x$. Projektionen av kurvan γ på xy-planet är således kurvan $\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{4}{3}$ i xy-planet. Låt E vara området $\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2\le\frac{4}{3}$ i xy-planet. Då gäller (rita figur) att givna området D är området bestående av alla (x,y,z) sådana att $(x,y)\in E$ och $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1+\frac{1}{2}x$. Använder vi denna beskrivning av D får vi att

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \iint_E\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\frac{1}{2}x} z\,dz\right)dx\,dy = \iint_E\left(\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=1+\frac{1}{2}x}\right)dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_E\left(\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2-\left(x^2+y^2\right)\right)dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_E\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-y^2\right)dx\,dy$$

och att

$$\iiint_D z^2\,dx\,dy\,dz = \iint_E\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\frac{1}{2}x} z\,dz\right)dx\,dy = \iint_E\left(\left[\frac{1}{3}z^3\right]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=1+\frac{1}{2}x}\right)dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{3} \iint_E \left(\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3 - \left(x^2 + y^2\right) 3/2 \right) dx\, dy$$

Den erhållna dubbelintegralen på slutet för den första trippelintegralen ovan kan sedan enkelt beräknas genom att först göra variabelsubstitutionen $u = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{3}{4}\right)$, $v = y$, och sedan använda polära koordinater. Den erhållna dubbelintegralen på slutet för den andra trippelintegralen ovan kan dock inte enkel beräknas.

Båda trippelintegralerna ovan ska dock beräknas och vi gör istället på följande sätt. Med hjälp av en linjär variabelsubstitution inför vi nya koordinater som överför planet $z = 1 + \frac{1}{2}x$ till ett plan parallellt med ett koordinatplan i de nya koordinaterna. Sedan beräknar vi de båda trippelintegralerna i de nya koordinaterna genom att genom att snitta integrationskroppen med plan parallella med detta koordinatplanet. Mera precist gör vi såhär. Vi gör varibelsubstitutionen $u = x$, $v = y$, $w = z - \frac{1}{2}x$ $\iff x = u$, $y = v$, $z = \frac{1}{2}u + w$. Variabelsubstitutionen överför planet $z = 1 + \frac{1}{2}x$ till planet $w = 1$. Insättning av $x = u$, $y = v$, $z = \frac{1}{2}u + w$ i $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ ger $\frac{1}{2}u + w \geq \sqrt{u^2 + v^2}$, vilket efter kvadrering kan skrivas $\frac{3}{4}\left(u - \frac{2}{3}w\right)^2 + v^2 \leq \frac{4}{3}w^2$. Planet $z = \frac{1}{2}x$, planet $w = 0$ i de nya koordinaterna, går genom punkten $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, spetsen på konytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Med den använda variabelsubstitutionen avbildas således området D i xyz-rummet på området D' i uvw-rummet där D' är området $\frac{3}{4}\left(u - \frac{2}{3}w\right)^2 + v^2 \leq \frac{4}{3}w^2$, $0 \leq w \leq 1$. Den använda variabelsubstitutionens funktionaldeterminant är $\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = 1$ som en enkel räkning visar. Vi får att

$$\iiint_D z\, dx\, dy\, dz = \iiint_{D'} \left(\frac{1}{2}u + w\right) |1|\, du\, dv\, dw =$$

$$= \int_0^1 \left(\iint_{\frac{3}{4}\left(u - \frac{2}{3}w\right)^2 + v^2 \leq \frac{4}{3}w^2} \left(\frac{1}{2}u + w\right) du\, dv \right) dw$$

och att

$$\iiint_D z^2\, dx\, dy\, dz = \iiint_{D'} \left(\frac{1}{2}u + w\right)^2 |1|\, du\, dv\, dw =$$

$$= \int_0^1 \left(\iint_{\frac{3}{4}\left(u - \frac{2}{3}w\right)^2 + v^2 \leq \frac{4}{3}w^2} \left(\frac{1}{2}u + w\right)^2 du\, dv \right) dw.$$

I de båda inre dubbelintegralerna ovan gör vi för varje fixt w substitutionen $s = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(u - \frac{2}{3}w\right)$, $t = v \iff u = \frac{2}{\sqrt{3}}s + \frac{2}{3}w$, $v = t$. Substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, och $\frac{3}{4}\left(u - \frac{2}{3}w\right)^2 + v^2 \leq \frac{4}{3}w^2$ övergår i $s^2 + t^2 \leq \frac{4}{3}w^2$. Det följer att

$$\iint_{\frac{3}{4}\left(u - \frac{2}{3}w\right)^2 + v^2 \leq \frac{4}{3}w^2} \left(\frac{1}{2}u + w\right) du\, dv = \iint_{s^2 + t^2 \leq \frac{4}{3}w^2} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s + \frac{2}{3}w\right) + w\right) \left|\frac{2}{\sqrt{3}}\right| ds\, dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{s^2 + t^2 \leq \frac{4}{3}w^2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}s + \frac{4}{3}w\right) ds\, dt =$$

(Eftersom s är udda i s och området $s^2 + t^2 \leq \frac{4}{3}w^2$ är symmetriskt kring $s = 0$.)

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{s^2 + t^2 \leq \frac{4}{3}w^2} \frac{4}{3}w\, ds\, dt = \frac{8}{3\sqrt{3}}w \iint_{s^2 + t^2 \leq \frac{4}{3}w^2} ds\, dt =$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{3}}w \operatorname{area}\left(s^2 + t^2 \leq \frac{4}{3}w^2\right) = \frac{8}{3\sqrt{3}}w \cdot \pi\frac{4}{3}w^2 = \frac{32\pi}{9\sqrt{3}}w^3$$

och att

$$\iint_{\frac{3}{4}\left(u - \frac{2}{3}w\right)^2 + v^2 \leq \frac{4}{3}w^2} \left(\frac{1}{2}u + w\right)^2 du\, dv = \iint_{s^2 + t^2 \leq \frac{4}{3}w^2} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s + \frac{2}{3}w\right) + w\right)^2 \left|\frac{2}{\sqrt{3}}\right| ds\, dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{s^2+t^2 \le \frac{4}{3}w^2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} s + \frac{4}{3} w \right)^2 ds\, dt = \frac{2}{3\sqrt{3}} \iint_{s^2+t^2 \le \frac{4}{3}w^2} \left(s^2 + \frac{8}{\sqrt{3}} ws + \frac{16}{3} w^2 \right) ds\, dt =$$

(Eftersom s är udda i s och området $s^2 + t^2 \le \frac{4}{3}w^2$ är symmetriskt kring $s = 0$.)

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} \iint_{s^2+t^2 \le \frac{4}{3}w^2} \left(s^2 + \frac{16}{3} w^2 \right) ds\, dt =$$

(Eftersom området $s^2 + t^2 \le \frac{4}{3}w^2$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} \iint_{s^2+t^2 \le \frac{4}{3}w^2} \left(\frac{1}{2}(s^2 + t^2) + \frac{16}{3} w^2 \right) ds\, dt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} \iint_{\substack{0 \le r \le \frac{2}{\sqrt{3}}w \\ 0 \le \theta < 2\pi}} \left(\frac{1}{2} r^2 + \frac{16}{3} w^2 \right) r\, dr\, d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}w} \left(\frac{1}{2} r^3 + \frac{16}{3} w^2 r \right) dr =$$

$$= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \left[\frac{1}{8} r^4 + \frac{8}{3} w^2 r^2 \right]_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}w} = \frac{136\pi}{27\sqrt{3}} w^4.$$

Detta visar att

$$\iiint_D z\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \frac{32\pi}{9\sqrt{3}} w^3\, dw = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}}$$

och att

$$\iiint_D z^2\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \frac{136\pi}{27\sqrt{3}} w^4\, dw = \frac{136\pi}{135\sqrt{3}}.$$