5/5 Serier

Likformig konvergens

$f_k(x) \to f(x)$ på $x \in [a,b]$

* gå till definitionen:

$$M_k = \sup_{x \in [a,b]} |f_k(x) - f(x)|$$

$$\lim_{k \to \infty} M_k = 0 \; .$$

* serier: Weierstrass M-kriterium.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$ konvergerar när $x \in [a,b]$

d.v.s $\boxed{S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k(x)}$

$\lim_{N \to \infty} S_N(x)$ existerar

Likformig konvergens?

Antag $\boxed{\begin{array}{ll} (*) & |f_k(x)| \le M_k, \; x \in [a,b] \\ (**) & \sum_{k=0}^{\infty} M_k \end{array}}$ för varje k, existerar, konvergerar.

Då gäller att $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ existerar,

och att konvergensen av

$S_N(x) \to \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ är

likformig!!

Konsekvenser om $f_k(x)$ alla är kontinuerliga
så är också $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ kontinuerlig

$$\lim \int \sum_{k}$$

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)dx = \sum \left(\int_a^b f_k(x)\,dx\right)$$

---

ex Visa att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boxed{\frac{\sin(e^x + \arctan x)}{k^2 + e^x}} = f_k(x)$$

konvergerar likformigt för $x \in [0,\infty[$

Leta efter M_k $\sum M_k < \infty$

$$\left|\frac{\sin(e^x + \arctan x)}{k^2+e^x}\right| \le 1/(k^2+e^x) \le \boxed{1/(k^2+1)} = M_k$$

$e^x \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} < \infty \quad \text{ty} \quad \sum \frac{1}{k^2} \text{ konvergerar}$$

(en standardserie) och vi använder jämförelsekriteriet.

Alltså ger Weierstrass M-test likformig konvergens.

---

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+k^2x^2}$ konvergerar likformigt på ett intervall $[-a,a]$

$\frac{x^2}{1+k^2x^2}$ på $[-a,a]$ har max/min

$$\left(\frac{x^2}{1+k^2x^2}\right)' = \frac{2x(1+k^2x^2) - x^2(2\cdot k^2\cdot x)}{(1+k^2x^2)^2}$$

$$= \frac{2x + \cancel{2x^3k^2} - \cancel{2x^3k^2}}{(1+k^2x^2)^2} = 0$$

$\iff x=0$

i $x=0$ är $\left.\frac{x^2}{1+k^2x^2}\right|_{x=0} = 0$, så där har vi minimum.

Det betyder att max antas i ändpunkterna:

$$\boxed{M_k = \frac{a^2}{1+k^2a^2}} = \frac{(-a)^2}{1+k^2(-a)^2}$$

Så om $S=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^2}{1+k^2a^2}$ konvergerar så

ger M-testet likformig konvergens

av $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+k^2x^2}$.

Koll $S=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{a^2}{a^2}}{\frac{1}{a^2}+k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^2}+k^2}$

$= \frac{1}{\frac{1}{a^2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^2}+k^2}$

jämför med $\sum \frac{1}{k^2}$

Ta kvoten mellan serierna: $\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{\frac{1}{a^2}+k^2}} = \frac{\frac{1}{a^2}+k^2}{k^2} \to 1$

när $k\to\infty$

Jämförelsekriteriet ger att bägge serierna konvergerar ~~eller~~ / divergerar samtidigt. Men vi vet att $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergerar.

Alltså konvergerar vår funktionsserie likformigt!

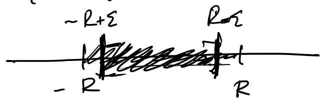
Konvergensradie

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ Maclaurinserie

jämför med en geometrisk serie

$|a_k|^{1/k} \to \frac{1}{R}$

Då gäller att $f(x)$ konvergerar om $|x|<R$ och att konvergensen är likformig på alla intervall $|x| \le R-\varepsilon$ $\varepsilon>0$



---

ex $e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\dots$

$a_k = \frac{1}{k!}$ . . .

$|a_k|^{1/k} = \left|\frac{1}{k!}\right|^{1/k} = 0 = \frac{1}{R}$,

(eh...) $R=\infty$

konvergens för alla $|x|<\infty$

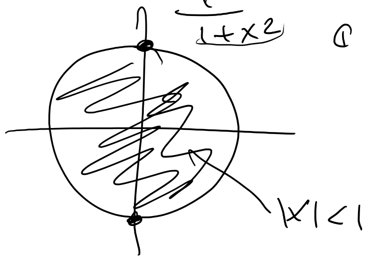
likformig konvergens i alla kompakta intervall!

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$|a_k| = \begin{cases} 0 & k \text{ udda} \\ 1 & k \text{ jämnt} \end{cases}$$

$$|a_k|^{1/k} = 1 = \frac{1}{1}$$

konvergensradie 1



---

ex $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ exakt?

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^k}$$

Vad är $f(1/2)$?

relatera till kända funktioner

Börja med en en känd funktion

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$|x|<1$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{k \cdot x^{k-1}}$$

$$x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^k = f(x)$$

$$\parallel$$

$$\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$f(1/2) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{2}$$

$$= 2.$$

$$\sum (k^{17}+k^{16})x^k$$

nån rationell funktion som vi (mathematica) kan fått!

ex

anta vi vet att $f_k(x) \to 0$ likformigt mot 0 på $[a,b]$ kompakt intervall.

Sätt

$$g_k(x) = f_k(x) + \frac{x}{n}.$$

Visa $g_k(x) \to 0$ likformigt på $[a,b]$.

Enda chansen att lösa problemet är att använda definitionen!

Vet $f_k(x) \to 0$

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_k(x) - 0| = \sup_{x\in[a,b]} |f_k(x)| =: M_k \to 0$$

Vill

$$\tilde{M}_k = \sup_{x\in[a,b]} |g_k(x) - 0| = \sup_{x\in[a,b]} |g_k(x)| =$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} \underbrace{\left|f_k(x) + \frac{x}{k}\right|}_{\to 0 ?} \le \underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |f_k(x)|}_{= M_k \to 0} + \underbrace{\sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{x}{k}\right|}_{\to 0}$$

TRIANGELOLIKHETEN!

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{x}{k}\right| \le \frac{\max(|a|,|b|)}{k} \to 0 \text{ när } k \to \infty$$

$$\therefore \quad \boxed{\tilde{M}_n \to 0 \quad \text{när } k \to \infty}$$

och därmed så $g_n(x) \to 0$ likformigt.

ex

$y' = y$ $\quad (y = e^x)$

$y = A \cdot e^x$ löser ekvationen.

Finns en snäll lösning

$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$

$a_0 \in \mathbb{R}$

$\overset{(?)}{\Longrightarrow}$ $a_1 = a_0$

$2a_2 = a_1 = a_0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} a_0$

$3a_3 = a_2 = \frac{1}{2} a_0 \quad a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} \cdot a_0$

$4a_4 = a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} a_0 \quad a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot a_0$

$5a_5 = a_4 \quad a_5 = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_0$

$\vdots$

$y(x) = a_0 \left(1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots\right)$

Hittat Maclaurinserien för e^x