

## Rekommenderade Uppgifter

I den dokument anges rekommenderade uppgifter att lösa.

Som ni ser anges ganska många rekommenderade uppgifter, och ni hinner kanske inte lösa alla. Ni bör försöka lösa några varje dag för att kontrollera er förståelse. Många av problemen kommer vi gå igenom under räkneövningstiden. För att få ut så mycket som möjligt av räkneövningar är det en bra idé att försöka lösa så många uppgifter som möjligt innan respektive tillfälle.

Under räkneövningarna kan vi då fokusera på de uppgifter där ni har kört fast eller känner sig osäkra, så att ni kan få direkt stöd och förklaringar. Detta stärker både förståelsen och självförtroendet inför tentamen.

För er som läser kursen på distans går det bra att ställa frågor på kursforumet, och samarbeta med andra studenter i kursen.

Under kursens gång kommer vi att publicera tre extra listor av uppgifter, som även kan innehålla några av uppgifterna från denna lista. Ni kommer att ha möjlighet att försöka lösa dem i mindre grupper och få återkoppling på era lösningar från kursassistenten.

För detta ändamål bör ni redan under kursens första veckor organisera en arbetsgrupp med minst fyra och högst sex studenter och lämna in eran lösningar gemensamt i en enda PDF-fil inom de angivna tidsramarna. Specifika datum kommer att publiceras på kurssidan. Endast inlämningar som görs inom grupparbete kommer att få återkoppling (Ni får bara bilda grupper med studenter som är registrerade på kursen).

Att arbeta tillsammans med dessa listor kommer att fördjupa er förståelse av kursmaterialet. Dessutom kommer minst en uppgift från dessa tre problemuppsättningar att förekomma på tentamen, vilket gör dem till utmärkt förberedelse inför examinationen.

Kurslitteratur som refereras är:

- [PB2] Arne Persson and Lars-Christer Böiers, *Analys i flera variabler*, 3rd ed., Studentlitteratur.
- [ÖPB2] ———, *Övningar i analys i flera variabler*, 8th ed., Studentlitteratur, Lund.
- [K1] *Kompletterande material*.
- [K2] *Kompendium om serier och generaliserade integraler*.
- [Ö3] *Övningar till Matematisk analys III*.

Uppgifterna markerade med (ÅÅMMDD) är uppgifter som har varit inkluderade i en tentamen.

Uppgifterna markerade med **F** (för Fördjupning) är inriktade på studenter som vill fördjupa sig i materialet.

Om du skulle stöta på tryckfel i kursmaterialet får du gärna skicka ett meddelande till föreläsaren.

**Dag 1: Definition av gränsvärde.**

1.1 Visa direkt från definitionen av gränsvärde för en talföljd:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0 \qquad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+5} = 1 \qquad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$$

För  $\varepsilon = 10^{-4}$ , om  $l$  är respektive gränsvärdet, bestäm det minsta  $n_0 \in \mathbb{N}$  sådant att  $|a_n - l| < \varepsilon$  för varje  $n > n_0$  i varje av gränsvärdena ovan.

1.2 Visa att om gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existerar, så finns det tal  $B > 0$  och  $\omega > 0$  sådana att för varje  $x \geq \omega$  gäller  $|f(x)| \leq B$ . I detta fall säger vi att  $f$  är begränsad för stora  $x$ .

*Tips:* Låt  $\varepsilon = 1$  i definitionen av gränsvärdet och använd triangelolikheten.

1.3 Låt

$$D = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup (3, 4) \cup (4, 5] \cup \{6\} \subset \mathbb{R}.$$

Skissa mängden  $D$  och bestäm alla hopningspunkter till mängden  $D$ . Motivera ditt svar.

**Svar:**  $\{1\} \cup [3, 4] \cup [4, 5]$

1.4 Visa direkt från definitionen av gränsvärde:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \qquad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x+1} = 2 \qquad (c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x} = \frac{3}{2}$$

1.5 Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , och  $a \in \mathbb{R}$  sådan att  $a$  är en hopningspunkt till  $D$ . Bevisa följande påstående: Om  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  medför det att för varje talföljder  $\{x_n\}_{n \geq 1}$ , där  $x_n \in D$  och  $x_n \neq a$  för varje  $n$ , sådana att  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , gäller att  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ .

1.6 Bevisa att  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$  inte existerar.

*Tips:* Notera att, från föregående uppgiften, för att visa att gränsvärdet inte existerar, räcker det att hitta två talföljder  $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$  sådana att  $x_n \neq 0 \neq y_n$  för varje  $n \in \mathbb{N}$  och  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$  men  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ .

1.7 Definiera begreppet (oegentligt) gränsvärde

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty,$$

där  $f$  är en envariabelfunktion definierad i intervallet  $(0, 1)$ .

1.8 Visa direkt från definitionen av oegentligt gränsvärde:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \qquad (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - x^2 = -\infty \qquad (e) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty \qquad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad (f) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$$

1.9 Låt  $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ . Visa från definitionen av gränsvärdet att

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} |g(t)| = 0.$$

1.10 [K1] 3.4

1.11 [K1] 3.5

1.12 (a) Skriv negationen av påståenden: "För varje  $\varepsilon > 0$  finns det  $n_0 \in \mathbb{N}$  sådan att  $|a_n - L| < \varepsilon$  för varje  $n \geq n_0$  (dvs. talföljden  $\{a_n\}_n$  konvergerar mot  $L$  då  $n \rightarrow \infty$ )".

(b) Visa att talföljden  $\{(-1)^n\}_n$  inte konvergerar mot något reellt tal  $L$ .

---

**Dag 2: Supremum och infimum.**

---

2.1 Låt  $S \subset \mathbb{R}$  vara en icke-tom mängd. Visa att om  $u$  är supremum för  $S$ , så gäller:

- (a) För varje  $n \in \mathbb{N}$  är  $u - \frac{1}{n}$  inte en övre begränsning för  $S$ .
- (b) För varje  $n \in \mathbb{N}$  är  $u + \frac{1}{n}$  en övre begränsning för  $S$ .

Visa dessutom att det omvända också gäller, det vill säga att om (a) och (b) är uppfyllda, så är

$$u = \sup S.$$

2.2 (250508) Låt  $M \subset \mathbb{R}$ , och  $a \in \mathbb{R}$ . Vilket begrepp karakteriseras av att båda följande villkor är uppfyllda:

- (a)  $a \leq x$ , för varje  $x \in M$ ;
- (b) till varje  $b > a$  finns ett element  $x \in M$  sådant att  $x < b$ .

Motivera ditt svar.

2.3 Låt  $T$  vara en mängd  $T \subset \mathbb{R}$  med  $\sup T = s \in \mathbb{R}$ .

- (a) Visa att  $T$  är uppåt begränsad.
- (b) Visa att, för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $t \in T$  så att  $s - \varepsilon < t \leq s$ .
- (c) Visa att det finns en följd  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  med  $x_n \in M$  sådan att  $x_n \rightarrow s$  då  $n \rightarrow \infty$ .
- (d) Visa analoga egenskaper till (b) och (c) för  $\inf T$ , om  $T$  är nedåt begränsad.

2.4 [K1] 3.6

2.5 (250317) Talföljden  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  definieras rekursivt av

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{x_n + 3}, \quad \text{för } n \geq 1.$$

- (i) Visa att  $0 \leq x_n \leq 1$  för varje  $n \geq 1$ .
- (ii) Visa att talföljden  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  konvergerar och bestäm dess gränsvärde.

*Tips:* Studera monotonicitet av talföljden.

2.6 Låt  $A$  och  $B$  vara två icke-tomma mängder av reella tal sådan att  $A \subset B$ . Bevisa följande påståenden:

- (a) Om  $B$  är uppåt begränsad, så är även  $A$  uppåt begränsad, och  $\sup A \leq \sup B$ .
- (b) Om  $B$  är nedåt begränsad, så är även  $A$  nedåt begränsad, och  $\inf A \geq \inf B$ .

2.7 Låt  $A \subset \mathbb{R}^n$  och anta att funktionerna  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  är begränsade. Låt  $\lambda > 0$ . Visa att:

$$(a) \sup_{x \in A} (-f(x)) = - \inf_{x \in A} f(x).$$

$$(b) \inf_{x \in A} (-f(x)) = - \sup_{x \in A} f(x).$$

$$(c) \sup_{x \in A} \lambda f(x) = \lambda \sup_{x \in A} f(x).$$

$$(f) \inf_{x \in A} \lambda f(x) = \lambda \inf_{x \in A} f(x).$$

$$(g) \left| \sup_{x \in A} f(x) \right| \leq \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

$$(h) \left| \inf_{x \in A} f(x) \right| \leq \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

$$(d) \sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x).$$

$$(e) \inf_{x \in A} (f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in A} f(x) + \inf_{x \in A} g(x).$$

Ge exempel på  $f$  och  $g$  för vilka olikheterna i

(d) och (e) är strikta (dvs.  $<$  resp.  $>$  gäller).

2.8 Bestäm supremum och infimum för talföljderna

$$(a) \left\{ \frac{4n}{9n-2} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$(b) \left\{ n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$(c) \left\{ \frac{n+(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

2.9 Visa att, om  $\{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_n$  är två konvergenta talföljder, sådana att  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  och  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$  med  $x_0 < y_0$ , så finns det ett  $n_0 \in \mathbb{N}$  sådant att  $\sup_{n \geq n_0} x_n < \inf_{n \geq n_0} y_n$ .

*Tips:* Låt  $\varepsilon = (y_0 - x_0)/3 > 0$  och använd definitionen av gränsvärde.

---

**Dag 3: Egenskaper hos kontinuerliga funktioner.**

---

3.1 Bevisa att om  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  är kontinuerlig i  $a \in D$ , så är även  $|f|$  kontinuerlig i  $a$ . Ge ett exempel på en funktion som är diskontinuerlig men vars absolutbelopp är kontinuerligt.

3.2 Betrakta funktionen  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  definierad av  $f(n) = n$ . För vilka  $m \in \mathbb{Z}$  är funktionen kontinuerlig? Finns det några hopningspunkt  $x_0$  i definitionsmängden för  $f$  sådana att vi kan studera  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ? Motivera ditt svar.

3.3 Låt  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion. Antag att  $x_0 \in \mathbb{R}$  uppfyller  $f(x_0) > 0$ . Visa att det finns en  $\delta > 0$  sådan att för varje  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = B_\delta(x_0)$  gäller  $f(x) > f(x_0)/2 > 0$ .

*Tips:* Använd  $\varepsilon = f(x_0)/2$  i definitionen av kontinuitet i  $x_0$ .

3.4 [K1] 3.12

3.5 [K1] 3.13

3.6 (250317) Låt  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion sådan att dess värdemängden är  $[0, 2]$ . Visa att det finns ett tal  $x_0 \in [0, 1]$  sådant att  $f(x_0) - 2x_0 = 0$ .

3.7 Visa (utan att använda derivatan!) att ekvationen

$$x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$$

har minst en reell lösning i det slutna intervallet  $[0, 1]$ .

3.8 (250317) Ge ett fullständigt argument för att visa att det finns en reell lösning till ekvationen  $x^3 - 4x^2 + 3x + 3 = 0$ .

3.9 Visa att följande ekvationer har minst en lösning:

(a)  $x - \sin x - 1 = 0$

(b)  $x^7 + \frac{213}{2 + x^2 + \tan^2 x} = 0$

3.10 Låt  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig och växande funktion sådan att  $f(0) = 0$ . Visa att ekvationen

$$x^2 + (f(x))^2 = 1$$

har exakt två lösningar.

3.11 Antag att  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  är kontinuerlig och att  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Visa att  $f$  är begränsad och att den antar antingen ett maximum eller ett minimum (notera att både kan också antas).

Ge ett exempel som visar att det inte nödvändigtvis behöver finnas både ett maximum och ett minimum. Strider detta mot Weierstrass extremvärdessatsen?

3.12 Vi säger att en talföljd  $\{x_i\}_{i \geq 1}$  med  $x_i \in \mathbb{R}$  är en **Cauchyföljd** om följande gäller: givet  $\varepsilon > 0$  finns det ett  $N \in \mathbb{N}$  sådant att för varje  $i, j \geq N$  gäller

$$|x_i - x_j| < \varepsilon.$$

- (a) Antag att talföljden  $\{x_i\}_{i \geq 1}$  konvergerar mot  $x$ . Visa att  $\{x_i\}_{i \geq 1}$  är en Cauchyföljd.

*Tips:* Skriv

$$x_i - x_j = (x_i - x) - (x_j - x)$$

och använd triangelolikheten.

- (b) Antag att  $\{x_i\}_{i \geq 1}$  är en Cauchyföljd. Visa att  $\{x_i\}_{i \geq 1}$  är också begränsad.

*Tips:* Använd definitionen av Cauchyföljd med  $\varepsilon = 1$  och triangelolikheten.

- F** (c) Visa att varje Cauchyföljd i  $\mathbb{R}$  konvergerar.

*Tips:* Använd Bolzano–Weierstrass sats för att skapa en konvergent delföljd och använd Cauchyegenskapen för att visa konvergens.

- F3.13** Betrakta en begränsad följd  $\{x_n\}_{n \geq 1}$ . Visa att om varje konvergent delföljd av  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  konvergerar mot samma gränsvärde  $L$ , så konvergerar  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  mot  $L$ .

*Tips:* Antag att påståendet inte gäller, och konstruera en delföljd där alla termer ligger minst  $\varepsilon$  från  $L$  (för en tillräckligt  $\varepsilon > 0$ ). Använd Bolzano–Weierstrass sats för att skapa en konvergent delföljd av denna delföljd, och visa att detta leder till en motsägelse.

- 3.14 Vi säger att en funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , där  $I \subset \mathbb{R}$  är ett intervall, är **likformigt kontinuerlig** på  $I$  om det gäller att för varje  $\varepsilon > 0$ , finns ett  $\delta > 0$  (beroende endast på  $\varepsilon$ ), sådant att, för varje  $x, y \in I$  gäller

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Låt  $\alpha \in (0, 1)$ . Vi säger att  $f$  tillhör klass Hölder- $\alpha$ , om det finns ett konstant  $C > 0$  sådant att, för varje  $x, y \in I$  gäller att

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha.$$

- (a) Visa att om  $f$  är likformigt kontinuerlig, är det också kontinuerligt på intervallet. Vad är skillnaden mellan dessa två begrepp?
- (b) Visa att om  $f$  tillhör klass Hölder- $\alpha$ , är det likformigt kontinuerligt.

*Anmärkning:* Om ni är nyfikna på hur en sådan funktion kan se ut, kan ni läsa mer om Brownsk rörelse. Man kan visa att för  $\alpha < \frac{1}{2}$ , beskriver nästan säkert en sådan rörelsen en funktion som tillhör klass Hölder- $\alpha$ .

**Dag 4: Derivatans definition, egenskaper hos deriverbara funktioner.**

4.1 [K1] 3.15

4.2 Betrakta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{om } x \neq 0, \\ 0, & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

(a) Visa från derivatans definition att  $f$  är deriverbar i  $x = 0$ . Beräkna  $f'(0)$ .(b) Beräkna  $f'(x)$  för  $x \neq 0$ , och visa att  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  inte existerar.*Tips:* Kolla gärna Uppgift 1.6.4.3 Låt  $r \in \mathbb{R}$ . Betrakta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} |x|^r \sin(1/x), & \text{om } x \neq 0, \\ 0, & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

(a) För vilka värden av  $r$  är funktionen  $f$  kontinuerlig i  $\mathbb{R}$ ?(b) För vilka värden är funktionen  $f$  deriverbar i  $\mathbb{R}$ ?**Svar:** (a)  $r > 0$  (b)  $r > 1$ .

4.4 [K1] 3.16

4.5 [K1] 3.17

4.6 (250508) Låt  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vara en funktion av klass  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . Visa att, om  $f$  har 2025 nollställen, måste  $f'$  ha minst 2024 nollställen. Kan  $f'$  ha fler än 2024?4.7 Betrakta funktionen  $f(x) = 4 - (x^2)^{1/3}$ . Kontrollera att  $f(-8) = f(8)$ , men att  $f'(x) \neq 0$  för varje  $x$  där funktionen är deriverbar. Motbevisar detta Rolle's sats?4.8 Låt  $0 < x < y$ . Använd Lagranges medelvärdessatsen för att visa att

$$\frac{y-x}{y} < \log y - \log x < \frac{y-x}{x}.$$

4.9 Låt  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vara kontinuerlig på  $[a, b]$  och två gånger deriverbar på  $(a, b)$ . Antag att linjesegmentet med ändpunkterna  $(a, f(a))$  och  $(b, f(b))$  skär grafen för  $f$  i en punkt  $(c, f(c))$  med  $a < c < b$ . Visa att det finns minst en punkt  $d \in (a, b)$  sådan att  $f''(d) = 0$ .*Tips:* Tolk resultatet grafiskt. Använd Lagranges medelvärdessats med  $f$  och Rolles sats med  $f'$ .

---

**Dag 5: Riemannintegral**

5.1 Visa att om  $\Phi$  och  $\Psi$  är två trappfunktioner, så gäller:

$$\int_a^b (\Phi(x) + \Psi(x)) dx = \int_a^b \Phi(x) dx + \int_a^b \Psi(x) dx.$$

5.2 **Sats 7** i kompendiet [K1] kallas  $\varepsilon$ -kriteriet för integrerbarhet. Använd endast denna sats för att visa att om en funktion  $f$  är Riemannintegrerbar på intervallet  $[a, b]$ , så är den även integrerbar på intervallet  $[c, d]$ , där  $a < c < d < b$  är givna reella tal.

5.3 Dirichlet-funktionen definieras som

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } x \text{ är irrationell,} \\ 1, & \text{om } x \text{ är rationell} \end{cases}$$

Beräkna

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx, \quad \text{och} \quad \underline{\int_a^b} f(x) dx.$$

Visa att funktionen  $f$  inte är Riemann-integrerbar över intervallet  $[0, 1]$ .

5.4 Bevisa direkt utifrån definitionen av överintegral att om  $f, g$  är två begränsade funktioner definierade på  $[a, b]$  sådana att  $f(x) \leq g(x)$  för varje  $x \in [a, b]$ , så gäller

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx \leq \overline{\int_a^b} g(x) dx < +\infty.$$

5.5 Låt  $f$  och  $g$  vara två begränsade funktioner på intervallet  $[a, b]$ . Visa att

$$\overline{\int_a^b} (f(x) + g(x)) dx \leq \overline{\int_a^b} f(x) dx + \overline{\int_a^b} g(x) dx.$$

Ge en exempel för  $f, g$  där strikt olikheten gäller. *Tips:* Kan  $f$  och  $g$  vara integrerbara?

5.6 Låt  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  vara en monoton funktion.

(a) Visa att det är begränsad.

(b) Visa att

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(r) dr.$$

*Tips:* Kolla beviset av Sats 13 i [K1]. I fallet där  $f$  är avtagande, visa att

$$0 \leq \underline{\int_0^1} f(x) dx - \int_0^1 \Phi(x) dx \leq \overline{\int_0^1} f(x) dx - \int_0^1 \Phi(x) dx \leq \int_0^1 \Psi(x) dx - \int_0^1 \Phi(x) dx,$$

och använd därefter instängningslaget för gränsvärdet. Anpassa sedan argumentet till fallet där  $f$  är växande.

(c) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \dots + \frac{1}{n^2+n^2} \right).$$

- 5.7 Låt  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vara två kontinuerliga funktioner och antag dessutom att  $g(x) \geq 0$  för varje  $x \in [a, b]$  och att  $\int_a^b g(x) dx > 0$ . Visa att vi kan hitta  $\xi \in [a, b]$  så att

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

*Tips:* Kolla beviset av Integralkalkylens medelvärdessatsen, och anpassa argument till det fall.

- 5.8 (250318) Visa att det finns ett tal  $\xi \in [0, 2]$  sådan att  $\int_0^2 e^{x^2} dx = 2e^{\xi^2}$ .

- 5.9 Visa att följande funktioner är deriverbara för  $x \in \mathbb{R}$  och bestäm deras derivator:

(a)  $F(x) = \int_a^x \sin^3(t) dt$

(c)  $F(x) = \int_a^{g(x)} h(t) dt$  med  $h$  kontinuerlig och  $g$  deriverbar i  $\mathbb{R}$ .

(b)  $F(x) = \int_a^b f(x+t) dt$ , med  $f$  kontinuerlig i  $\mathbb{R}$ . *Tips:* Gör en variabelbyte först.

(d)  $F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt$  med  $h$  kontinuerlig och  $f, g$  deriverbara i  $\mathbb{R}$ .

- 5.10 Låt  $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$  vara en kontinuerlig funktion. Visa att ekvationen

$$2x - 1 = \int_0^x f(s) ds$$

har en entydig lösning i intervallet  $[0, 1]$ .

- 5.11 Låt  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion. Låt oss definiera

$$F(x) := \begin{cases} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(s) ds, & \text{om } x \neq 0 \\ f(0), & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

Visa att

(a)  $F$  är kontinuerlig i  $\mathbb{R}$ , och  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .

(b) Om  $f$  är deriverbar i 0, så är också  $F$  det.

- 5.12 Låt  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion. Låt oss definiera

$$F(x) := \int_0^x xf(s) ds, \quad x \in [0, +\infty).$$

(a) Visa att  $F$  är deriverbar i  $(0, +\infty)$  och beräkna  $F'(x)$  för varje  $x \in (0, +\infty)$ .

(b) Visa att

$$\int_0^x f(s)(x-s) ds = \int_0^x \left( \int_0^s f(t) dt \right) ds, \quad \text{för varje } x > 0.$$

*Tips:* Visa att båda uttrycken definiera deriverbara funktioner, och studera deras derivator.

## Dag 6: Serier och generaliserade integraler.

6.1 Bestäm den serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vars  $n$ :te partialsumma är

(a)  $s_n = \frac{n}{n+1}$

(c)  $s_n = n$

(b)  $s_n = \frac{2n^2 + 4}{n^2 + 1}$

(d)  $s_n = \frac{5n^2 - 3n + 2}{n^2 + 1}$

Vilka av dessa serier konvergerar?

*Tips:* Kom ihåg att den  $n$ :te partialsumman för en serie  $\sum_{j=1}^{\infty} a_n$  är  $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$ . Notera att  $s_n = a_n + s_{n-1}$  för  $n \geq 2$  och  $s_1 = a_1$ .

6.2 En serie av reella tal  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sägs vara *teleskoperande* om det finns en följd  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  sådan att

$$a_n = x_n - x_{n+1},$$

för varje  $n \in \mathbb{N}$ . Visa att serien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  är konvergent om och endast om följden  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  är konvergent. Beräkna seriens summa när det är möjligt.

Visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)},$$

är en konvergent teleskoperande serie och beräkna seriens summa.

6.3 Visa att följande serier divergerar

(a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\arctan k}$

(b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$

(c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$

6.4 Använd Jämförelsekriterier I eller II för att avgöra om följande serier konvergerar eller divergerar:

(a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 - 1}$

(d)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k + 4^k}$

(g)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k} + 2} \left(1 - \cos \frac{1}{k}\right)$

(b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k - 1}$

(e)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{k}$

(h)  $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$

(c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + 10\sqrt{k}}$

(f)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{k}\right)$

(i)  $\sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 + \sin \left(\frac{1}{k}\right)\right)$

**Svar:** Följande serier är konvergenta: (a), (d), (e), (f), (g). De övriga är divergenta.

6.5 Använd d'Alemberts Kvotkriterium för att avgöra om följande serier konvergerar eller divergerar:

(a)  $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{5}{2}\right)^k$

(b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

(c)  $\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(k!)^3}{(3k)!}$

---

**Svar:** Serier (b) och (c) konvergerar.

6.6 Avgör för vilka reella värde av  $x$  följande serier konvergerar:

(a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

(b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

(c)  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$

(d)  $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$

**Svar:** Serien (a) konvergerar för  $x \in [-1, 1]$ . Serien (b) konvergerar för  $x \in (-1, 1)$ . Serierna (c) och (d) konvergerar för  $x \in (-1, 1)$ . Annars är dem divergenta.

6.7 Använd Cauchys rotkriteriet för att avgöra om följande serier konvergerar eller divergerar:

(a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k+2}{2k+3} \right)^k$

(c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

(b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2k^3+2}{k^3+1} \right)^k$

(d)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right)^{k^3}$

**Svar:** Följande serier är konvergenta: (a), (c), (d).

6.8 (250317) Bestäm för vilka värden på  $\alpha > 0$  serien

$$\sum_{k \geq 1} \left( \frac{\alpha k + 1}{k + 4} \right)^k$$

divergerar.

6.9 [K2] 8.1: a)-d),f)-i),k)-n).

## Dag 7: Serier och generaliserade integraler (fortsättning).

7.1 För vilka av följande serier kan vi direkt använda Leibniz kriterium för att avgöra om serierna konvergerar?

$$(a) \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$(c) \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{(1 + \cos(\pi k) + k)^2}$$

$$(b) \sum_{k \geq 2} \frac{\cos(\pi k)}{\sqrt{k}}$$

$$(d) \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^{2k+1}}{k^2}$$

**Svar:** (a) och (b).

7.2 Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut?

$$(a) \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k \log k}{k}$$

$$(b) \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k \log k}{k^2}$$

$$(c) \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{k^3}{(\log 2)^k}$$

**Svar:** (a) Konvergent men inte absolutkonvergent. (b) Absolut konvergent. (c) Divergent.

7.3 (241028) Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut?

$$(a) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{e^{k^2} - 1}$$

$$(b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + \sqrt{k}}$$

7.4 För vilka funktioner kan vi direkt använda Cauchys integral kriterium för att avgöra om serien  $\sum_{k \geq 3} f(k)$  konvergerar?

$$(a) f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$(c) f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$$

$$(b) f(x) = \frac{1 - \pi \sin(x\pi)}{(x + \cos(x\pi))^2}$$

$$(d) f(x) = \frac{\log x}{x}$$

**Svar:** (a) och (d).

7.5 [K1] 8.1: e), j), o).

7.6 [K1] 8.2: a)-i).

7.7 (250317) Undersök om den generaliserade integralen  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x}} dx$  konvergerar.

7.8 (a) Visa att för  $x, y \in (0, \infty)$  är följande integraler konvergenta:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

(b) Visa att  $x \Gamma(x) = \Gamma(x+1)$  för varje  $x > 0$ . *Tips:* Vad är  $\frac{d}{dt} t^x$ ?

(c) Visa att  $\Gamma(n+1) = n!$  för alla  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

*Anmärkning:* Funktionerna  $\Gamma$  och  $B$  kallas gammafunktionen respektive betafunktionen.

## Dag 8: Gränsvärden och kontinuitet för funktioner mellan $\mathbb{R}^n$ och mängder i $\mathbb{R}^m$

8.1 I kursboken [PB2] sida 13, definieras randen för en mängd  $M$ , betecknad  $\partial M$ , som mängden av alla punkter  $x$ , som uppfyller att för varje  $r > 0$  gäller  $B_r(x) \cap M \neq \emptyset$  och  $B_r(x) \cap M^c \neq \emptyset$ , där  $M^c$  betecknar komplementet till mängden  $M$  (i kursboken, betecknas det  $\mathbb{C}M$ ).

- (a) Visa att  $x \in \partial M$  om och endast om, det finns två talföljder  $\{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_n$  som båda konvergerar mot  $x$  då  $n \rightarrow \infty$ , sådana att för varje  $n \geq 1$ , gäller  $x_n \in M$  och  $y_n \in M^c$ .  
*Tips:* Använd definitionen av randpunkt med  $r = n \in \mathbb{N}$  för att skapa följderna.
- (b) Man definierar det **slutna höljet** av en mängd  $M$  som  $\overline{M} := M \cup \partial M$ . Visa att  $\partial \overline{M} = \partial M$ , och dra därav slutsatsen att  $\overline{M}$  är slutet.

8.2 I kursboken [PB2], sida 13, definieras öppna och slutna mängder. Visa, utgående från denna definition, att följande gäller:

- (a) En mängd  $M$  är öppen om, och endast om, till varje  $a \in M$  finns ett öppet klot  $B_r(a)$  som ligger i  $M$ , dvs.  $B_r(a) \subseteq M$ .
- (b) En mängd  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  är sluten om och endast om komplementet  $M^c = \mathbb{R}^n \setminus M$  är öppet.

8.3 Betrakta funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Visa att  $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$  för varje  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,
- (b) Visa att  $\lim_{s \rightarrow 0} f(s, s^2) = \frac{1}{2}$ .
- (c) Existerar gränsvärdet  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ? Argumentera ditt svar.

8.4 Låt  $L \in \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Vi sätter  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , för  $r > 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Visa utifrån definitionen av gränsvärdet att det gäller

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = L, \quad \text{för varje } \theta \in [0, 2\pi),$$

men

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = L \text{ för varje } \theta \in [0, 2\pi) \not\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L.$$

*Anmärkning:* Man måste vara försiktig vid användning av polära koordinater. Det räcker inte att bara kontrollera gränsvärdet längs räta linjer. Det som gäller är att

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = L, \quad \text{likförmigt i } \theta \in [0, 2\pi),$$

det vill säga

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \sup_{\theta \in [0, 2\pi)} |f(r \cos \theta, r \sin \theta) - L| = 0.$$

8.5 [ÖPB2] 1.6

8.6 [ÖPB2] 1.7

8.7 [ÖPB2] 1.8.

8.8 [ÖPB2] 1.24abcdg

8.9 [ÖPB2] 1.27

8.10 [ÖPB2] 1.29

8.11 [ÖPB2] 1.30

8.12 [ÖPB2] 1.31

---

**Dag 9: Differentialkalkyl för funktioner i flera variabler**

---

9.1 Undersök existensen av de partiella derivatorna och differentierbarheten i  $(0, 0)$  för funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{om } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{om } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

9.2 Låt  $p \in \mathbb{N}$  och definiera funktionen  $f_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  genom

$$f_p(x, y) = \begin{cases} \frac{x^p}{x^2 + y^2}, & \text{om } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{om } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Visa att  $f_p$  är differentierbar om och endast om  $p > 3$ .

9.3 (240411) För varje  $\alpha \in \mathbb{R}$ , låt  $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vara funktionen definierad av

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{xy^2}}{(2x^2 + 3y^2)^\alpha}, & \text{om } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{om } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Bestäm för vilka värden av  $\alpha$  som funktionen  $f_\alpha$  är kontinuerlig i  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Bestäm för vilka värden av  $\alpha$  som funktionen  $f_\alpha$  är partiellt deriverbar i origo.
- (c) Bestäm för vilka värden av  $\alpha$  som funktionen  $f_\alpha$  är differentierbar i origo.

9.4 [ÖPB2] 2.12

9.5 [ÖPB2] 2.13

9.6 [ÖPB2] 2.17

9.7 [ÖPB2] 2.21 (250508)

9.8 [ÖPB2] 2.23

9.9 (240411) Lös differentialekvationen

$$\sin y \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + y^2}, \quad f(x, 0) = x^2 + 2x + 1,$$

t.ex. genom att införa de nya variablerna  $u = x + \cos y$  och  $v = y$ .

9.10 (240229) Lös differentialekvationen

$$2y \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad f(x, 0) = \ln |x|,$$

t.ex. genom att införa de nya variablerna  $u = x - y^2$  och  $v = y$ .

---

**Dag 10: Gradient, riktningsderivata och kedjeregeln**

---

10.1 Beräkna alla riktningsderivator vid origo för funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{om } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{om } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Är  $f$  differentierbar i origo?

10.2 [ÖPB2] 2.30

10.3 [ÖPB2] 2.34

10.4 [ÖPB2] 2.39

10.5 [ÖPB2] 2.41

10.6 [ÖPB2] 2.42

10.7 [ÖPB2] 2.43

10.8 [ÖPB2] 2.75

10.9 Låt  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vara två gånger deriverbara funktioner och  $c > 0$  en konstant. Visa att funktionen  $\phi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$  uppfyller vågekvationen

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0.$$

10.10 Låt  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vara funktionen definierad av

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{om } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{om } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Visa att:

(a)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$  för varje  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

(b) Funktionen  $f$  är av klass  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ .

(c)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ , och dra därav slutsatsen att  $f$  inte är av klass  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ .

10.11 Kontrollera att de blandade andraderivatorna av funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2 \sin \frac{1}{y}, & \text{om } y \neq 0, \\ 0, & \text{om } y = 0, \end{cases}$$

är lika vid  $(0, 0)$ , även om villkoren i Schwarz sats inte är uppfyllda.

10.12 [ÖPB2] 2.52

10.13 [ÖPB2] 2.57

10.14 [ÖPB2] 2.58

## Dag 11: Högre derivator. Maclaurin- och Taylorutvecklingar

11.1 Använd lämpliga Taylorpolynom för att beräkna gränsvärdena i origo för följande funktioner:

(a)  $\frac{x - \tan x}{\log(1 - x^3)}$

(b)  $\frac{1 - \cos(x^2)}{\arcsin(x^4)}$

(c)  $\frac{e^x - x - \cos x}{\sin^3 x}$

Behåll resttermen i Taylorutvecklingen för båda nämnaren och täljaren. Skriv den på formen  $x^k B(x)$ , för lämpligt  $k$ , och förklara varför  $B(x)$  är begränsad när  $x \rightarrow 0$ .

11.2 [ÖPB2] 2.60

11.3 [ÖPB2] 2.61

11.4 [ÖPB2] 2.62

11.5 Bestäm Taylorutvecklingen för följande funktioner:

(a)  $f(x, y, z) = xyz$  i en omgivning av punkten  $(1, 2, 5)$ .

(b)  $f(x, y) = x^y$  i en omgivning av punkten  $(1, 1)$ , upp till och med termer av andra ordningen.

(c)  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$  i en omgivning av punkten  $(0, 0)$ , upp till och med termer av ordning 5.

11.6 Låt  $f(x, y)$  vara av klass  $\mathcal{C}^3$  i en omgivning av origo, och antag att  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ . Visa att om den kvadratiske formen i Taylorutvecklingen av  $f$  i  $(0, 0)$  är negativt definit så är  $(0, 0)$  ett lokalt maximum.

11.7 Syftet med den här uppgiften är att ge en bevis av Taylors formel.

(a) Låt  $g \in \mathcal{C}^1([a, b])$ . Använd partiell integration för att visa att för varje naturligt tal  $j \geq 1$  gäller

$$\int_a^b g(t)(b-t)^{j-1} dt = g(a)(b-a)^j + \frac{1}{j} \int_a^b g'(t)(b-t)^j dt$$

*Tips:* Notera att  $(b-t)^{j-1} = -\frac{1}{j} \frac{d}{dt}(b-t)^j$ .

(b) Givet ett naturligt tal  $k \geq 0$ , låt  $f \in \mathcal{C}^{k+1}([a, b])$ . Visa att det gäller

$$f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^k \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (b-a)^j + \int_a^b f^{(k+1)}(t) \frac{(b-t)^k}{k!} dt.$$

(c) Låt  $f$  vara av klass  $\mathcal{C}^{k+1}([a, b])$ . Använd föregående uppgift och Uppgift 5.7 för att medföra att det finns  $\xi \in (a, b)$  sådant att

$$f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^k \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (b-a)^j + f^{(k+1)}(\xi) \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

---

## Dag 12: Lokala undersökningar: Stationära punkter och lokala extremvärden.

---

12.1 (250508) Betrakta en funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  som är kontinuerlig och uppfyller:

- $f(a\mathbf{x}) = a^2 f(\mathbf{x})$ , för varje  $a \in \mathbb{R}$  och  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
- $f(\mathbf{x}) > 0$ , för varje  $\mathbf{x} \neq (0, 0)$ ,  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

(a) Beräkna  $f(0, 0)$ .

(b) Visa att det finns ett tal  $m > 0$  sådant att  $f(\mathbf{x}) \geq m |\mathbf{x}|^2$  för varje  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .

(c) Visa att  $f$  är partiellt deriverbar i origo.

(d) Måste  $f$  vara differentierbar i origo? Om du svarar *Ja*, bevisa det. Om du svarar *Nej*, ge ett motexempel.

12.2 [ÖPB2] 2.64

12.3 [ÖPB2] 2.65

12.4 [ÖPB2] 2.66

12.5 [ÖPB2] 2.67

12.6 [ÖPB2] 2.68

12.7 [ÖPB2] 2.94

12.8 [Ö3] 3.21 Bestäm alla stationära punkter till  $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 4x^2y$  och ange varje stationär punkts karaktär.

12.9 [Ö3] 3.22 Bestäm alla stationära punkter till  $f(x, y) = (2x^4 - y^4)e^{-8x-4y}$  och ange varje stationär punkts karaktär.

12.10 (241028) Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x, y) = (x - y)^3(x + y)$$

samt avgör deras karaktär.

12.11 (240229) Betrakta funktionen

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2 + 3xy + y^3 - 3y^2 + 4.$$

- (a) Hitta alla stationära punkter för denna funktion, och bestäm, för varje av dessa, den associerade kvadratiska formen.
- (b) Bestäm om de stationära punkterna är lokala maxima, minima eller sadelpunkter.

---

**Dag 13: Optimering med bivillkor.**

---

13.1 [ÖPB2] 4.23

13.2 [ÖPB2] 4.25

13.3 [ÖPB2] 4.26

13.4 [ÖPB2] 4.27

13.5 [ÖPB2] 4.28

13.6 [ÖPB2] 4.31

13.7 [ÖPB2] 4.33

13.8 [Ö3] 3.23 Bestäm alla stationära punkter till  $f(x, y) = xy$  under bivillkoret

$$x^3 + 3xy + 8y^3 = 22.$$

13.9 [Ö3] 3.24. Bestäm alla stationära punkter till  $f(x, y, z) = x + y + z$  under bivillkoret

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4.$$

13.10 [Ö3] 3.25 Bestäm alla stationära punkter till  $f(x, y, z) = x + y + z$  under bivillkoren

$$xy + yz = 1 \quad \text{och} \quad xz + yz = 4.$$

13.11 (250317) Betrakta funktionen

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

- (a) Bestäm samtliga stationära punkter för denna funktion och avgör om de är lokala maximipunkter, lokala minimipunkter eller sadelpunkter.
- (b) Bestäm de absoluta extremvärdena för funktionen  $f$  på cirkeln med radie 2 centrerad i origo.

13.12 (230823) Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x, y) = 1 + e^x(x^2y - y)$$

samt avgör deras karaktär.

13.13 (210414)

- (a) Motivera varför funktionen  $f(x, y) = xy$  antar både största och minsta värde på kurvan

$$(x^2 + y^2)^2 + 8xy = 12.$$

- (b) Bestäm de största och minsta värdena i (a).

**Dag 14: Allmänna optimeringsproblem: sammanfattning och teori.**

14.1 [ÖPB2] 4.10

14.2 [ÖPB2] 4.16

14.3 [ÖPB2] 4.18

14.4 [ÖPB2] 4.21

14.5 [ÖPB2] 4.22

14.6 Avgör om max/min till funktionen

$$f(x, y) = (2xy - x^2) e^{-2(x^2+y^2)/3}$$

i området

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y\}$$

antas och bestäm dessa i förekommande fall.

14.7 (250826) Betrakta funktionen

$$f(x, y) = \frac{x|y|}{x^2 + |y|}$$

på mängden

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, -x^2 < y < x^2\}.$$

Bestäm supremum och infimum för  $f$  på  $D$ .

14.8 (241213) Betrakta funktionen

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

på mängden

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z^3 = 1\}.$$

Bestäm supremum och infimum för  $f$  på  $D$ .

14.9 (241028) Betrakta funktionen

$$f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$$

på mängden

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0\}.$$

Är  $f$  uppåt begränsad på  $D$ ? Är  $f$  nedåt begränsad? Är  $f$  begränsad?

14.10 (241213) Antar funktionen

$$f(x, y) = x^3y - y^2$$

ett största och ett minsta värde under bivillkoret  $x^3 + y^4 = 0$ ?14.11 (240229) Låt  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ . Betrakta funktionen

$$f(x, y) = (x + y)e^{-2x-4y^2}, \quad (x, y) \in D.$$

(a) Bevisa att  $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in D}} f(x,y) = 0$ .

(b) Undersök om funktionen  $f$  har ett största och ett minsta värde i mängden  $D$ , och bestäm dessa i så fall.

14.12 (240411) Låt  $g(x,y) = (x^2 + y^2)^3 - 8xy$  och  $f(x,y) = x + y$ .

(a) Bevisa att

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} g(x,y) = +\infty,$$

och bevisa från det att varje nivåkurva av  $g$  är kompakta.

(b) Visa att funktionen  $f(x,y) = x + y$  antar största och minsta värde på kurvan

$$(x^2 + y^2)^3 - 8xy = 48,$$

och bestäm de största och minsta värdena.