

Det materialet bör fungera som en vägledning till det teoretiska kursinnehållet och är riktat till de studenter som läser kurser på distans, men alla andra är välkomna att läsa det och delta i diskussionen på kurshemsidan. Dokumentet kan uppdateras under kursens gång.

Listan nedan med ämnen som ska utvecklas och frågor att besvara är avsedd att belysa några av de viktigaste teoretiska punkterna i varje föreläsning. Detta är varken en uttömmande lista över ämnen eller en lista med frågor som kommer att ställas på den skriftliga tentamen. Däremot kan den hjälpa er att förbereda er inför tentamen.

Syftet med denna lista är att hjälpa dig att fokusera på att läsa kursmaterialet, skapa dina egna kursanteckningar och behärska materialet.

Notera att videorna är ett mycket hjälpsamt komplement till kurslitteraturen men ersätter inte den. Så man behöver även kolla kurslitteraturen och kompletterande material. Svaren på (nästan) alla frågor kan hittas inom kursmaterialet. Vi har inkluderat några länkar, definitioner och kommentarer för dem som inte finns där. Ni är välkomna att diskutera det med varandra i kursforumet.

Vi rekommenderar starkt att ni skriver ner definitioner i era anteckningar, både i löpande text och med enbart formella logiska uttryck, där alla kvantifikatorer och implikationer som ingår i varje påstående specificeras.

Vi anger med U de punkter som är övningar och vars lösningar inte direkt finns i kursmaterialet men det kan lösas med det, och med F de punkter som syftar till att fördjupa din förståelse av ämnet, men som kan undvikas vid en första genomgång av kursmaterialet.

Föreläsning 1

1. Definiera begreppet (egentligt) gränsvärde av en funktion $f(x)$ då $x \rightarrow \infty$ och $x \rightarrow -\infty$.

Illustrera begreppet med en bild.

Vilka förutsättningar i definitionsmängden av f behövs för att kunna göra definitionen?

Kan det finnas två olika gränsvärden?

2. Vad är en talföljd? Hur definieras begreppet gränsvärde för en talföljd?
3. Vad är en omgivning till en punkt a av radie ε (bredden 2ε)? Kolla [PB], sidan 44. Vi ska beteckna det i kursen som $B_\varepsilon(a)$.
Givet $r > 0$, låt $B_r^*(a)$ beteckna mängden

$$B_r^*(a) := B_r(a) \setminus \{a\},$$

som kallas den punkterade omgivningen till a av radie r .

4.

Definition. Vi säger att en punkt är en **hopningspunkt** till en mängd M , om varje omgivning av punkten a innehåller punkter ur M .
(Notera att vi säger 'punkter' i plural).

Illustrerar begreppet med en bild. Visa att det är ekvivalent med

Definition. Vi säger att en punkt är en **hopningspunkt** till en mängd M , om varje punkterad omgivning av punkten a innehåller punkter ur M .

Vad innebär det att a **inte** är en hopningspunkt? Formulera detta på ett formellt sätt.

5. Definiera begreppet gränsvärde för en funktion $f(x)$ när $x \rightarrow a$, där $a \in \mathbb{R}$. I detta fall, måste punkten a vara en hopningspunkt till definitionsmängden för f ?

NB. I kursboken [PB] erkänner författarna att deras definition inte är den standardmässiga, men de vill förenkla formulering för regeln (9). Den standard definitionen, som vi skulle använda i kursen, kräver $0 < |x - a| < \delta$.

Definition. Om en punkt a tillhör till M och är inte det en hopningspunkt, säger vi att a är en **isolerad punkt** i M .

- F 6. Med den standard definition av gränsvärdet för $f(x)$ när $x \rightarrow a$, visa följande sats:

Sats. [Sammansättningslagen] Låt f vara definierad i en punkterad omgivning till a , $B_s^*(a) \subset D_f$. Låt g vara definierad i en punkterad omgivning av b , $B_t^*(b) \subset D_g$ och antag att äntligen gäller att

(a) $g(B_t^*(b)) \subset B_s^*(a)$; eller

(b) f är definierad i a , $f(a) = A$ och $g(B_t^*(b)) \subset B_s(a)$.

Om $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = a$ och $\lim_{y \rightarrow a} f(y) = A$, så blir $\lim_{x \rightarrow b} f(g(x)) = A$.

7. I definitionen av gränsvärdet för en funktion $f(x)$ när $x \rightarrow a$, där $a \in \mathbb{R}$, kan vi alltid anta i definitionen att $\delta < 1$? Eller att $\delta < 10^{-10}$?
8. Definiera begreppet (egentligt) höger- och vänstergränsvärde för en funktion $f(x)$ när $x \rightarrow a^+$ (respektive när $x \rightarrow a^-$). Vilka antaganden om definitionsmängden för f och a behöver göras för att kunna definiera detta?
9. Vilka samband finns mellan existensen av högergränsvärdet och vänstergränsvärdet och existensen av gränsvärdet? Bevisa detta.
10. Definiera begreppet oegentliga gränsvärden. Kan du skriva detta på ett symboliskt sätt? Kan du illustrera det med en bild?
11. Formulera och bevisa räknelagarna för egentliga gränsvärden (additionslagen, produktlagen och kvotregeln). Ange alla förutsättningar. Överväg båda fallen där $x \rightarrow \infty$ eller $x \rightarrow a$.

12. Beviset av produktlagen (och kvotlagen) i kursboken behövs Satsen 1 i boken och det används implicit att, om $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = B$, så är $g(x)$ begränsad för stora x .

Ge ett bevis för detta, och förklara i vilket steg i beviset av produktlagen dessa används.

- U 13. Låt g vara definierad i ett område kring punkten a . Visa att, om $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, så gäller det att, i ett lite området av a , funktionen är begränsad. Dvs. Vi kan hitta $s > 0$ och $C > 0$ sådan

$$|g(x)| \leq C$$

för alla $x \in D_g \cap (a - s, a + s)$.

14. Formulera och bevisa olikhetslagen, instängningsregeln för gränsvärden.

15. Formulera och bevisa sammansättningsregeln för gränsvärden.

NB. Beviset i kursboken fungerar bra med den standarddefinition (som vi använder i kursen) om vi lägger till antagandet att f är definierad vid ett område till punkten a och $f(a) = A$.

- U 16. Vilka av dessa följande påstående motsvarar definitionen att funktionen f har ett gränsvärde då $x \rightarrow +\infty$. Vilka motsvarar att funktionen f har ingen gränsvärde då $x \rightarrow +\infty$.

(a) $\exists L \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \forall x \in D_f (|f(x) - L| < \varepsilon \implies x > M).$

(b) $\exists L \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \forall x \in D_f (x > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon).$

(c) $\exists L \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \forall x \in D_f (|f(x) - L| \geq \varepsilon \implies x \leq M).$

(d) $\forall L \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall M \in \mathbb{R} \exists x \in D_f (x > M \text{ och } |f(x) - L| \geq \varepsilon).$

Föreläsning 2

- Definiera begreppet övre (undre) begränsning för en delmängd $M \subset \mathbb{R}$.
Förklara formellt vad det innebär att vara den "minsta" övre begränsning.
- Definiera begreppen supremum och infimum för en mängd. Vad innebär det att en övre begränsning av en mängd inte är supremum för mängden?
- Definiera begreppen supremum och infimum för en funktion. Vad innebär det att en funktion är uppåt (nedåt) begränsad?
- Definiera begreppet för att en funktion är monoton på ett intervall.
- Visa, med utgångspunkt i supremumaxiomet, att en monoton funktion har ett gränsvärde (egentligt eller oegentligt) när $x \rightarrow \infty$. I vilket fall är det egentligt?
- Hur definieras talet e i kursboken? Visa att

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

- F 7. I kursboken används att logaritmfunktioner (också exponentialfunktioner och potensfunktioner) är kontinuerliga funktioner i deras definitionsmängd, men det bevisas inte! En komplett bevis från första principer kan vara mycket krävande för den kurs, så vi kommer att ta dessa som fakta för givna. För dem som vill fördjupa om det, försöka att hitta en bra referens för att läsa om det. En bra bok är:

[1] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976.

- F 8. Härled hur kan man definiera e^t för alla $t \in \mathbb{R}$.
9. Visa att om $a > 1$, och $\alpha > 0$ så gäller $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$. Visa även att $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ och att $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.
10. Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
11. Visa följande gränsvärden: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ och $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Föreläsning 3

1. Låt $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, och låt $a \in D_f \subset \mathbb{R}$.

Definition. Vi säger att f är **kontinuerlig i punkten** a om för varje tal $\varepsilon > 0$ finns det ett tal $\delta > 0$ sådant att

$$x \in D_f \quad \text{och} \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (1)$$

I fallet där a är en hopningspunkt av D_f , visa att det är ekvivalent med gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ existerar och därmed är lika med $f(a)$. Illustrera begreppet med en bild.

2. Notera att om $D_f = \mathbb{N}$, med definitionen (1), är f kontinuerlig i alla punkter $a \in \mathbb{N}$, men vi kan inte prata om gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, eftersom alla punkter i D_f är isolerad.
3. Om D_f är ett intervall, och $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, definiera begreppet kontinuitet för f på ett intervall.
- U 4. Bevisa att om f är kontinuerlig i en punkt a och $f(a) \neq 0$, så finns ett $r > 0$ sådant att $f(x) \neq 0$ för alla $x \in D_f$ som uppfyller $|x - a| < r$.
5. Om f är kontinuerlig och a är en hopningspunkt till definitionsmängden av f , omformulera detta med hjälp av höger- och vänstergränsvärden.
- U 6. (Denna uppgift syftar till att ge en förklaring till kommentaren i kursboken [PB] i avsnitt 'De elementära funktionerna är kontinuerliga'.)
- Visa att mängden av alla kontinuerliga funktioner definierad på ett intervall $[a, b]$, försedd med den naturliga summan av funktioner och multiplikation med en skalär, definierar ett **vektorrum** över de reella talen (Vad tror du är dess dimension?), som betecknas som $\mathcal{C}[a, b]$. Dvs. Visa att, för varje $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$, och för varje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gäller det att

$$\alpha f + \beta g \in \mathcal{C}[a, b].$$

- Om $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$, visa att produkten fg definierad som

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

också tillhör till $\mathcal{C}[a, b]$. Produkten kan betecknas också som $f \cdot g$.

- Om $f \in \mathcal{C}[a, b]$, med $f([a, b]) \subset [c, d]$, och $g \in \mathcal{C}[c, d]$, gäller det att $g \circ f \in \mathcal{C}[a, b]$.

Tips: Använd egenskaperna för gränsvärden av funktioner mot ett punkt, och omformulering av kontinuitet som du har visat i Frågan 3.5.

7. Formulera och bevisa intervallinkapslingssatsen.
 8. Formulera och bevisa satsen om mellanliggande värden. Kan kontinuitetsvillkoret uteslutas i denna sats?
 9. Formulera och bevisa Bolzano–Weierstrass sats.
 10. Visa att om en funktion f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, så antar f sitt största och minsta värde där (Weierstrass extremvärdessats).
 11. Visa att en monoton funktion definierad inom ett slutet och begränsad intervall vars värdemängd är ett intervall är kontinuerlig.
 12. Visa att, om ett funktion är definierad i ett intervall samt är stängt monoton och kontinuerlig, så är f inverterbar och dess invers är också kontinuerlig.
- NB. En följsats av denna sats är att om vi kan visa att exponentialfunktionen e^x är strikt växande och kontinuerlig, så följer att även funktionen $\ln x$ är det. På detta sätt motiveras i kursboken varför logaritmer är kontinuerliga.

Föreläsning 4

1. Definiera begreppet derivata för en funktion i en punkt a . Vilka förutsättningar behöver punkten a uppfylla? Varför är dessa förutsättningar viktiga?
2. Definiera begreppet deriverbarhet punktvis och på ett intervall.
3. Bevisa utifrån definitionen att x^n är deriverbar och att dess derivata är nx^{n-1} , där $n \in \mathbb{N}$.
4. Formulera och bevisa räknelagarna för derivator i en punkt (additionslagen, produktlagen och kvotlagen).
5. Formulera och bevisa kedjeregeln för derivator.
6. Formulera och bevisa satsen om derivatan av en invers till en funktion.
7. Härled formlerna för derivatorna av $\sin x$, $\arcsin x$, e^x och $\ln x$. Formeln $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$ får användas utan bevis.

8. Visa att om en funktion f har ett lokalt maximum eller minimum i en punkt a , så gäller, under vissa förutsättningar, att $f'(a) = 0$.

9. Formulera och bevisa Rolles sats.

10. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats.

U 11. Formulera och bevisa Cauchys medelvärdessats:

Sats (Cauchys medelvärdessats). Om f, g är kontinuerliga på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Antag att $g(a) \neq g(b)$, och att $f'(x)$ och $g'(x)$ har ingen gemensamma nollställe i (a, b) . Så finns ett tal $\xi \in (a, b)$ så att

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Tips: Definiera F som

$$F(x) = \frac{(f(b) - f(a))}{(g(b) - g(a))}(g(x) - g(a)) - f(x),$$

och använd Rolles sats.

12. Formulera och bevisa sambandet mellan derivata och monotonicitet.

Föreläsning 5

1. Vad är en indelning av ett intervall $[a, b]$? Vad är en delindelning (förfining)? Ge ett exempel på en indelning av intervallet $[0, 1]$, och en förfining av ditt exempel.
2. Vad är en trappfunktion på ett intervall? Ge ett exempel på en trappfunktion och en indelning av intervallet $[0, 1]$.
3. Hur definieras integralen för en trappfunktion? Varför är denna definition oberoende av valet av indelning? Vad händer med integralen för trappfunktionen om vi ändrar värdena för trappfunktionen i en punkt?
4. Visa att om $\Phi \leq \Psi$ på $[a, b]$ gäller att

$$\int_a^b \Phi(x) \, dx \leq \int_a^b \Psi(x) \, dx.$$

5. Definiera begreppen underintegral och överintegral för en begränsad funktion inom ett intervall $[a, b]$. Varför existerar dessa (som ändliga tal)? Kan vi definiera dessa begrepp för obegränsade funktioner?

6. Visa att för alla begränsade funktioner f på $[a, b]$, gäller att

$$\int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Ge ett exempel där olikheten är strikt.

7. Definiera begreppet för en funktion att vara integrerbar inom ett intervall $[a, b]$.

8. Visa att om f, g är två begränsade funktioner definierade på $[a, b]$ sådana att $f(x) \leq g(x)$ för alla $x \in [a, b]$, så gäller

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Formulera och bevisa ett motsvarande påstående för överintegralen.

9. Visa att om f, g är två begränsade funktioner definierade på $[a, b]$ och $a < c < b$, så gäller

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Formulera och bevisa ett motsvarande påstående för överintegralen.

10. Visa att alla trappfunktioner är integrerbara (kontrollera gärna ditt svar på Fråga 3 i den här föreläsningen).

11. Visa räknelagar för integraler: Om f, g är integrerbar över $[a, b]$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, då är $\alpha f(x) + \beta g(x)$ integrerbar över $[a, b]$ och

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

- F 12. I kursboken ges en definition av integrerbarhet (Definition 2 i Kap. 6 [PB]) som skiljer sig något från den som ges i kompendiet och videorna. Visa att de två definitionerna är ekvivalenta.

13. Visa att en monoton funktion på ett slutet intervall är integrerbar.

- F 14. I kursboken (Kap. 6.2) definieras begreppet likformig kontinuitet. Visa att en kontinuerlig funktion på ett slutet intervall också är likformigt kontinuerlig (Se Appendix C i Kursboken [PB]).

15. Kolla definitionen och visa, som görs i kursboken (Sats 3 i Kap. 6.2 [PB]), att en kontinuerlig funktion på ett slutet intervall är integrerbar. I beviset:

- (a) Argumentera varför finns två punkter $a_k, b_k \in [x_{k-1}, x_k]$ sådan att

$$m_k = f(a_k), \quad M_k = f(b_k).$$

- (b) Härled en motivation om varför gäller i beviset att

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b - a}?$$

- U 16. Antag att $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är integrerbar, sådan att värdemängden av f uppfyller att $f([a, b]) \subset [c, d]$, och $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Visa att $g \circ f$ är också integrerbar.

17. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats.

18. Formulera och bevisa analysens huvudsatsen och insättningsformeln.

Föreläsningar 6 och 7

1. Redogör för begreppen delsumma (partialsumma) av en serie, konvergens, absolutkonvergens samt betingad konvergens för serier.
2. Vad är en positiv serie?
3. Vad är en geometrisk serie? Under vilka förutsättningar konvergerar en geometrisk serie? Under vilka förutsättningar divergerar en geometrisk serie?
4. Vad är det som talföljden $\{a_k\}_k$ måste uppfylla för att serien $\sum_k a_k$ ska konvergera? Bevisa det. Är villkoret tillräckligt?
5. Formulera och bevisa ett kriterium för konvergens för positiva serier. Är det tillräckligt?
6. Formulera och bevisa jämförelsekriterierna I och II för positiva serier.
7. Bevisa att mängden av alla konvergenta serier är ett reellt vektorrum.
8. Visa att om en serie är absolutkonvergent, så är den konvergent. Visa ett exempel där motsatsen inte gäller.
9. Formulera och bevisa Cauchys rotkriterium och d'Alemberts kvotkriterium för serier.
10. Formulera och bevisa Leibniz konvergenstkriterium för alternerande serier. Gäller satsen om vi tar bort förutsättningarna "*positiv*", "*avtagande*" eller " $a_k \rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$ "?
11. Hur definieras begreppet generaliserad integral för en funktion om:
 - (a) integrationsområdet är oändligt, det vill säga $[a, +\infty)$ eller $(-\infty, b]$? Och i fallet $(-\infty, \infty)$.
 - (b) integranden är obegränsad, antingen i det inre av integrationsområdet eller då vi närmar oss någon av ändpunkterna av intervallet.
12. För vilka exponenter $p \in \mathbb{R}$ är integralen $\int_0^1 x^p dx$ generaliserad? För vilka exponenter konvergerar det?
13. För vilka exponenter konvergerar $\int_1^\infty x^p dx$?
14. Formulera och bevisa jämförelsekriterier I och II för generaliserad integraler med kontinuerliga positiva funktioner. Gäller fortfarande satsen om man tar bort villkoret om positivitet? Var används kontinuitet i beviset? Kan man bevisa det utan kontinuitet?
15. Formulera och bevisa Cauchys integralkriterium. Kan man dra samma slutsats om f inte är positiv eller avtagande?
16. Bestäm för vilka exponenter $p \in \mathbb{R}$ gäller att serien $\sum_{k \geq 1} k^p$ konvergerar.

Föreläsning 8

“Distress not yourself if you cannot at first understand the deeper mysteries of Spaceland. By degrees they will dawn upon you.”

Edwin A. Abbott, Flatland: A Romance of Many Dimensions

“I see!” she cried. “I got it! For just a moment I got it! I can’t possibly explain it now, but there for a second I saw it!” She turned excitedly to Calvin. “Did you get it?”

Madeleine L’Engle, A Wrinkle in Time

Verkliga problem har många frihetsgrader; för att förstå dem måste vi lära oss att tänka i hundratals, tusentals eller till och med miljontals variabler – och flervariabelanalys är verktyget som gör det möjligt. Vi börjar i lågdimensionella fall ($n = 2, 3$) för att bygga intuition genom visualisering, men för att verkligen bemästra dessa verktyg – och möta utmaningarna i högdimensionella system – måste vi lära oss att tänka bortom det vi kan se. När ni läser materialet för de kommande dagarna, en bra utmaning består att generalisera det för ett godtyckligt dimension n , och jämföra begrepp med den endimensionella fallet så vi har mer erfarenhet med. Rita bilder för $n = 2$ för att visualisera alla begrepp. Om ni behöver det, svara alla frågor för $n = 2$ och sen för $n = 3$.

En kommentar om den konvention vi använder i kursen: Givet den standardbas vi använder för $\mathbb{R}^n$, identifierar vi vektorer i $\mathbb{R}^n$ med kolonnmatriser. På den sätt, $x \in \mathbb{R}^3$ har koordinater $x = (x_1, x_2, x_3)^T$.

1. Hur beräknas avståndet mellan två punkter i det euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$.
2. Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz’ olikhet och triangelolikheten.
3. Var är ett öppet klot i rummet $\mathbb{R}^n$? Vi ska beteckna det som $B_r(a)$. Vad är ett öppet klot i fallet där $n = 1$?
4. Definiera begrepp inre punkt, yttre punkt och randpunkt för en mängd.
5. Definiera begrepp i $\mathbb{R}^n$: öppen mängd, sluten mängd, begränsad mängd och kompakt mängd.
6. Visa att en mängd D är obegränsad om, för varje $r > 0$, mängden

$$\{x : x \in D \text{ och } |x| > r\}$$

är inte tomt.

7. Notera från definitionen att $\partial M = \partial(M^c)$. Visa att en mängd är sluten om, och bara om, dess komplement är öppen.

- U
8. Man definiera det slutna höljet av en mängd M som $\overline{M} := M \cup \partial M$. Visa att $\partial \overline{M} = \partial M$, och medför att $\overline{M}$ är slutet.
 9. Definiera begreppet gränsvärde av en vektorvärd funktion $f(x)$ då $x \rightarrow a$, där $a \in \mathbb{R}^n$. Jämföra det med definitionen för reellvärda funktioner från Föreläsning 1. I kursbok [PB2] erkänner författarna att deras definition inte är den standardmässiga, men de vill förenkla formulering för regeln (9). Den standard definitionen krävs $0 < |x - a| < \delta$.

Problemet med “definitionen” som ges i [PB2] är att den tillåter att prata om gränsvärden för isolerade punkter, som reflekterar inte begreppet som vi vill definiera.

I kursboken antas att a är en inre punkt eller en randpunkt till definitionsmängden av f , men randpunkter kan vara isolerade punkter! (tänka t.ex. om $D = \{0\}$, så $\partial D = D$). Det som krävs för att prata om gränsvärdet där $x \rightarrow a$ är för a att vara en hopningspunkt till definitionsmängden av f . En väg med att undvika problemet, är att anta att mängden D är en mängd utan isolerade punkter, och kaver då att a är en inre punkt, eller en randpunkt.

- U 10. Visa att summaregeln för gränsvärden gäller och, om både f och g är reellvärda, visa att produktregeln också gäller. Jämför detta med beviset för funktioner av en variabel.
- U 11. Om $F : D_F \rightarrow \mathbb{R}^m$ där $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$, a är en hopningspunkt till $D_F \subset \mathbb{R}^n$ och $A = (A_1, \dots, A_m)^T \in \mathbb{R}^m$, visa att $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = A$ om och endast om $\lim_{x \rightarrow a} f_j(x) = A_j$ för $j = 1, \dots, m$. (Det räcker med att bevisa det i fallet där $m = 2$).

12. Vad är en kurva i $\mathbb{R}^n$? Vad betyder en orientering till kurvan?

13. Låt $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en kontinuerlig kurva som uppfyller att $\gamma(0) = a$. Visa att om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i a gäller då att

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = f(a).$$

För en godtycklig funktion f definierad i ett öppet området till punkten a , vad kan vi säga om vi kan hitta två kontinuerliga kurvor $\gamma_j : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ för $j = 1, 2$ sådan att

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t))?$$

14. Följande definition verkar saknas i kurslitteratur:

Definition. Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ sådan att, för alla $r > 0$, mängden

$$\{x : x \in D \text{ och } |x| > r\}$$

är inte tomt. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, och $L \in \mathbb{R}$.

Vi säger att f konvergerar mot L då $|x| \rightarrow +\infty$, och vi betecknar det som

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = L, \quad (2)$$

om, för varje $\varepsilon > 0$ det finns $r_0 > 0$ sådan att

$$x \in D \quad \text{och} \quad |x| > r \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Likadant kan vi definiera oegentliga gränsvärden $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, om det gäller att för varje $M \in \mathbb{R}$, det finns $r > 0$ sådan att

$$x \in D \quad \text{och} \quad |x| > r \Rightarrow f(x) > M.$$

Anmärkning: I två variabler kan vi skriva om (2) som

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 : x \in D \text{ och } x^2 + y^2 > r^2 \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

U Definiera oegentliga gränsvärden $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

F 15. I den reella linjen har vi en naturlig orientering, som kommer från den naturliga ordning av reella tal: Vi har en väg med att jämföra två reella tal och bestämma om $x < y$, eller $y < x$, eller $x = y$. Tyvärr kan vi inte skaffa en (total) ordning i planet (eller i rummet), som uppfyller alla villkor som vi känner om ordning i reella tal (Om man identifiera punkter i planet med komplexa tal, finns det en kort bevis av det. Man kan läsa det t.ex. [här](#)).

Har det något mening att prata om

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} f(x, y)?$$

Tips. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{och} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right).$$

16. Definiera begrepp *bågvis sammanhängande mängd*.
17. Formulera extremvärdessatsen för funktioner $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Vilka förutsättningar antar vi om D och f ?
18. Formulera och bevisa mellanliggande värden för funktioner $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Vilka förutsättningar antar vi om D ?

Föreläsningar 9 och 10

1. Definiera differentierbarhet för en funktion $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i en punkt a . Varför behövs att anta att a är en inre punkt till definitionsmängden av f ?

Kolla definitionen i kursboken, och byta texten som finns i definition i boken “*det finns konstanter $A_1, \dots, A_n$* ” för “*det finns en $1 \times n$ matris $A = (A_1, \dots, A_n)$* ”, och skriv om den linjära termen i definitionen som en matrisprodukt av en $1 \times n$ -matris A med en $n \times 1$ -matris.

Detta matris kallas **total derivata** av f i punkt a och betecknas $f'(a)$, eller $df(a)$ (I kursboken kallas också som funktionalmatrisen till f i punkten a . Se Kap. 3.2 i [\[PB2\]](#)). Den linjär avbildningen $h \mapsto df(a)h$ kallas i kursboken också för differentialen av f i punkten a .

En $1 \times n$ matris kallas för en radmatris, medan en $n \times 1$ matris kallas för en kolonmatris. Kolonmatriser identifieras med vektorer.

2. Låt $f_j : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ för $j = 1, \dots, m$ vara differentierbar, med total derivata som radmatrisen A^j . Vi definiera den vektorvärda funktion $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ som $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$, och en $m \times n$ matris A , där raden j är den $1 \times n$ matris som ges av A^j .

Skriv om $F(x+h) - F(x)$ med hjälp av matrisen A och matrisprodukt, och jämföra det med definitionen för reellvärda funktionen.

Hur skulle du definiera differentierbarhet för en vektorvärd funktion F i en punkt a ? Hur skulle total derivata för funktionen F i punkten a definieras? (I kursboken kallas det också "Funktionalmatris"). När du har svarat på Frågan 9 nedan, kan du kolla ditt svar med Kap. 3.2 i kursboken [PB2].

3. Visa att, om derivata existerar, det är unik.
4. Vad är en riktning w ? Hur definieras riktningsderivata av en reellvärd funktion i en punkt?
5. Hur definieras partiella derivator av en reellvärd funktion i en punkt? Vad är gradientvektorn?
6. Visa sambandet mellan riktningsderivata och gradient för en differentierbar funktion vid en punkt.
7. Vad betyder för en reellvärd funktion att vara partiellt deriverbar i en punkt? Gäller det att alla partiella deriverbara funktioner i en punkt också är differentierbara i den punkt? Gäller det omvända, dvs. att en differentierbar funktion är partiellt deriverbar?
8. Vad betyder för en reellvärd funktion att vara partiellt deriverbar i ett området?
9. I fallet av f är differentierbar i punkten a , hur bestäms total derivata av funktionen f ? Vilken är sambandet med gradientvektorn av f ?
10. I fallet av f är differentierbar i punkten a , hur kan man beräkna riktningsderivatan från total derivata?
11. Visa att en reellvärd funktion av två variabler växer snabbast i gradientens riktning.
12. Ett **hyperplan** är en affin mängd i $\mathbb{R}^n$ som bestäms, med hjälp av en normalvektor $d \neq 0$ till hyperplanet och en punkt $a \in \mathbb{R}^m$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^m : d^T(x - a) = 0\}.$$

Notera att vi kan skriva om villkoret som

$$0 = d^T(x - a) = \sum_{j=1}^m d_j(x_j - a_j).$$

Där $m = 2$, ett hyperplan är ett affint linje, och då $m = 3$ det motsvarar ett affint plan i rummet $\mathbb{R}^3$, givet båda i normalform.

Om $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i ett inre punkt $a \in D$, skriv ekvationen av tangenthyperplanet till grafen av f

$$G(f) = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in D \text{ och } x_{n+1} = f(x)\}$$

i punkten $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Vilken är normalvektorn till hyperplanet?

Det räcker med att svara på frågan för $n = 1$ (då det kallas tangentlinje, se Avsnitt 3.2 i [PB]) och $n = 2$ (då det kallas tangentplan. Kolla avsnitt 2.2 i [PB2]) och gissa svaret för $n \geq 3$.

13. Formulera och bevisa kedjeregeln för funktioner i flera variabler. (Jämföra det med beviset för envariabel funktioner från Föreläsning 4). Det räcker med att bevisa fallet där $n = 2$.

Om du skriver formel (18) från Satsen 4 (sid. 54) i boken som en matrisprodukt, kan kedjeregeln skrivas som

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t).$$

(Ordningen är viktig!) På detta sätt påminner notationen oss om det endimensionella fallet.

- F 14. Om F är nu en vektorvärd funktion $F : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ som i frågan 2 ovan, argumentera varför gäller att

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t).$$

Om dessutom är $G : D_G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ är differentierbar, sådan att $G(D_G) \subset D_f$, vilken är den total derivata för $F \circ G$? Kolla gärna Kap. 3.2, sidan 138 i [PB2].

15. Definiera vad menas för en funktion att vara klass $\mathcal{C}^1$.
16. Visa att om f är klass $\mathcal{C}^1$ i ett öppet området, då är f differentierbar i området.
17. Hur definieras partiella derivator av högre ordning?
18. Formulera och bevisa Schwarzs sats om symmetri av partiella derivator av andra ordning (Sats 9, sidan 87 i kursboken). Vilka förutsättningar krävs i beviset i kursboken?
19. Hur kan gradientvektorn tolkas geometriskt?

Föreläsning 11

1. Definiera Taylorpolynomet av grad n för en funktion av en variabel. Formulera och bevisa Taylors formel, och beskriv explicit resttermen.
2. Visa att Taylorutvecklingen är entydig.
3. Formulera och bevisa Taylors formel av andra ordning för funktioner i flera variabler (det räcker med två).
4. Hur definieras **Hessian** för f ? Vilken är sammankoppling med den kvadratiske formen associerad med f ?

Föreläsning 12

1. Definiera begreppen supremum och infimum för en reellvärd funktion av flera variabler. Vad betyder att en sådan funktion är uppåt (nedåt) begränsat.
2. Vad betyder för en reellvärd funktion av flera variabler att ha en lokal maximipunkt? Och en minimipunkt? Och en sadelpunkt? Vad är en extrempunkt?
3. Om f är en partiellderiverbar funktion, vad är en stationär punkt för f ?
4. Formulera ett nödvändigt villkor för en differentierbar funktion att ha en extrempunkt? Är det ett tillräckligt villkor?
5. Vad är en kvadratisk form i n variabler? Hu definieras att vara positivt definit? Och negativt definit? Positivt semi definit? Negativt semidefinit? Indefinit? (Kolla kap. 2.6, s. 101-110 i [PB2])

6. Visa att, om Q är positivt definit, gäller det att det finns $\delta > 0$ sådan att för alla $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$Q(h) \geq \delta |h|^2.$$

Generalisera beviset av Lemma 1 i avsnitt 2.6 i [PB2].

7. Låt $f(x, y)$ vara av klass $\mathcal{C}^3$ i en omgivning av origo, och antag att $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$. Visa att om den kvadratiske formen i Taylorutvecklingen av f i $(0, 0)$ är positivt definit så är $(0, 0)$ ett lokalt minimum.
8. Låt $f(x, y)$ vara av klass $\mathcal{C}^3$ i en omgivning av origo, och antag att $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$. Visa att om den kvadratiske formen i Taylorutvecklingen av f i $(0, 0)$ är negativt definit så är $(0, 0)$ ett lokalt maximum.
9. Låt $f(x, y)$ vara av klass $\mathcal{C}^3$ i en omgivning av origo, och antag att $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$. Visa att om den kvadratiske formen i Taylorutvecklingen av f i $(0, 0)$ är indefinit så är $(0, 0)$ ett sadelpunkt.
10. Hur bestäms karaktär av en kvadratiske formen?

Föreläsning 13

1. Hur löser man en optimeringsproblem med bivillkor? Formulera satsen och bevisa det i dimension 2 med ett bivillkor. Notera att, att vara parallella, är ekvivalent med att säga att vektorerna är linjärt beroende.

Läs också Sats 2 för att se hur p bivillkoren hanteras.

- F 2. I Sats 2 (som generaliserar Sats 1) i kursboken fås, att för $p < n$ bivillkoren, vektorerna

$$\nabla f(a), \quad \nabla g_1(a), \quad \dots, \quad \nabla g_p(a)$$

måste vara linjärt beroende.

I fallet där $p = n - 1$, omformulera detta i termer av en determinant.

I en allmänt fall, omformulera det i termer av rang av matrisen med $(p + 1)$ -kolonner, och n rader

$$(\nabla f(a) \mid \nabla g_1(a) \mid \dots \mid \nabla g_p(a))$$

om vi antar att vektorerna

$$\nabla g_1(a), \quad \dots, \quad \nabla g_p(a)$$

är linjärt oberoende.

3. Hur definieras Lagrangesfunktion.

Föreläsning 14

1. Formulera satsen som garanterar att en kontinuerlig funktion definierad i en kompakt område antar största och minsta värde. Var kan de antas?

2. Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion och antag att

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

gäller. Visa att varje nivåkurva av g utgör en kompakt mängd.

F 3. Låt $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion och antag att

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

gäller. Visa att för varje $C \in \mathbb{R}$, mängden

$$\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = C\}$$

är en kompakt mängd.

U 4. Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ vara en sluten obegränsad mängd. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, är vara en kontinuerlig funktion sådan att $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Visa att det finns $x_0 \in D$ sådan att $\inf_{x \in D} f(x) = f(x_0)$.

Litteraturförteckning

[PB] A. Persson and L.-C. Böiers, *Analys i en variabel*, 3rd ed., Studentlitteratur, 2010.

[PB2] ———, *Analys i flera variabler*, 3rd ed., Studentlitteratur, 2005.