

Några ord om matematiska utsagor

I den här kursen kommer vi att fokusera, särskilt under den första delen av kursen, på de teoretiska aspekterna av Matematisk Analys som ni har sett i kursen Matematik-I. Därför behöver vi behärska fundamentala teoretiska begrepp, och för detta behöver vi lära oss att gå från den intuitiva uppfattningen av dessa, till de formella Matematiska definitionerna. I den sista sektionen av detta dokument, har vi inkluderat en lista över matematiska symboler och notationer som vi kommer att använda i kursen.

När vi skriver en bok, en forskningsartikel eller kursanteckningar använder vi sällan formella logiska uttryck i löpande text. De kan kännas tekniska och ibland svåra att läsa. Samtidigt är de ett mycket hjälpsamt verktyg: de hjälper oss att uttrycka matematiska idéer kortfattat, exakt och utan risk för missuppfattning. Därför är det bra att känna igen dem och förstå hur de fungerar, även om vi inte använder dem hela tiden. I den här kursen kommer vi ibland att ta hjälp av sådana uttryck för att förklara viktiga begrepp.

För att illustrera situationen, kommer vi att jobba med ett specifikt exempel som begreppet av konvergenta talföljder. För förklara begreppet på ett intuitivt sätt, kan vi kanske skriva det som:

Intuitiv uppfattning. Vi säger att talföljden $\{a_n\}_n$ konvergerar mot L då n går mot oändligheten om, a_n är godtyckligt nära L , för tillräckligt stora n .

Matematiska definitioner måste vara precisa, och vi vill beskriva begreppet utan något möjligt utrymme för missuppfattning. Idén att något är godtyckligt nära kan kvantifieras med avståndet mellan elementen a_n och L , och vi kan tolka detta avstånd som felet i approximationen av L med a_n . Detta kan uttryckas som

$$|a_n - L|,$$

och vi vill att detta ska vara mindre än ett godtyckligt litet givet fel eller tolerans, som vi betecknar med ε .

Vår intuitiva definition säger att om n är tillräckligt stort, så kommer felet $|a_n - L|$ alltid att vara litet. Det betyder att, givet en tolerans $\varepsilon > 0$, kan vi hitta ett index som är tillräckligt stort – låt oss kalla det ω . Detta index beror på den valda toleransen ε (vi kan skriva detta som $\omega = \omega(\varepsilon) > 0$, men vi låter beroendet vara underförstått i notation, även om vi måste ha det i åtanke). För alla naturliga tal n som ligger efter detta ω är felet i approximationen av L med a_n mindre än vår tolerans.

Matematiskt kan vi uttrycka detta mer koncist som:

Definition 1. Vi säger att talföljden $\{a_n\}_n$ konvergerar mot L då n går mot oändligheten om, för varje $\varepsilon > 0$, finns ett $\omega > 0$ sådant att avståndet mellan a_n och L är mindre än ε för alla $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq \omega$.

eller

Definition 2. Vi säger att talföljden $\{a_n\}_n$ konvergerar mot L då n går mot oändligheten om, för varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\omega > 0$ sådant att

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

för alla $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq \omega$.

Med hjälp av kvantifikatorer kan vi skriva om det, på en mer kompakt form som

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \omega > 0 \forall n \in \mathbb{N} (n \geq \omega \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

Detta kan läsas högt som

$\forall \varepsilon > 0$	$\exists \omega > 0$	$\forall n \in \mathbb{N}$	$\left(\begin{array}{c} n \geq \omega \\ \text{om} \end{array} \right)$	$\Rightarrow$	$ a_n - L < \varepsilon$
För varje	finns ett	sådant		medför	avståndet
$\varepsilon > 0$	tal $\omega > 0$	att givet	$n \geq \omega$	det att	mellan a_n
		ett god-			och L är
		tyckligt			mindre än
		naturligt			ε
		tal n			

Ett exempel

Vi ska nu se hur definitionen används i praktiken genom ett enkelt exempel. Betrakta följden

$$a_n := \frac{1}{n},$$

som vi intuitivt ser uppfyller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

men vi vill visa detta direkt ur definitionen.

För att göra det, fixerar vi först ett godtyckligt $\varepsilon > 0$. Enligt definitionen, behöver vi att hitta ett tal $\omega > 0$ sådant att för alla $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq \omega$ gäller att $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Observera att

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

vilket gäller om, och endast om $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Detta leder oss till att definiera, till exempel

$$\omega = \omega(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil,$$

där, för ett givet $x \in \mathbb{R}$ betecknar $\lceil x \rceil$ det minsta naturliga tal som uppfyller att $x < \lceil x \rceil$. På så sätt garanterar vi att för alla naturliga tal n med $n \geq \omega$, gäller $|a_n - 0| < \varepsilon$. Om vi sammanfattar vad har vi gjort:

För ett godtyckligt $\varepsilon > 0$, finns ett $\omega = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$, sådan att för alla $n \in \mathbb{N}$ med $n > \omega$ gäller att $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Alltså har vi formellt bevisat att $\{a_n\}_n$ konvergerar mot 0 då n går mot oändligheten.



Figur 1: Hur koncis kan den logiska notationen vara? Bilden visar ett mynt till ära för Stefan Banach (diametern är 27 mm). Där finns ett påstående om Banachs fixpunktsats och även idén bakom beviset.

Negation av ett Påstående

Vi har sett hur man kan använda definitionen för att bevisa att en talföljd $\{a_n\}_n$ konvergerar mot ett gränsvärdet L då $n \rightarrow \infty$. Frågan är nu hur man kan bevisa att ett talföljd *inte* konvergerar mot L ?

För att hantera den typen av frågor är det mycket hjälpsamt att kunna skriva negationen av ett påstående. Om man har en tydlig bild av hur påståendet uttrycks med logiska matematiska symboler blir problemet enkelt, så länge man följer några grundläggande regler. Dessa regler sammanfattas i tabellen nedan.

Påstående	Läsning	Negation	Läsning av negation
$\forall x \in D P(x)$	För alla x i D gäller $P(x)$	$\exists x \in D \neg P(x)$	Det finns ett x där $P(x)$ inte gäller
$\exists x \in D P(x)$	Det finns ett x i D som uppfyller $P(x)$	$\forall x \in D \neg P(x)$	För alla x gäller att $P(x)$ är falskt
$P \wedge Q$	P och Q	$\neg P \vee \neg Q$	Inte P eller inte Q
$P \vee Q$	P eller Q	$\neg P \wedge \neg Q$	Varken P eller Q
$P \Rightarrow Q$	Om P så Q P medför Q	$P \wedge \neg Q$	P är sant men Q är falskt
$P \Leftrightarrow Q$	P om och endast om Q P är ekvivalent med Q	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$	Antingen P eller Q (men inte båda)
$\neg P$	Icke P	$\neg \neg P = P$	Negationen av negationen av P är P

Vi vill visa med ett exempel hur man kan skriva negationen av ett påstående. Vi försätter med definitionen av konvergens för en talföljd. Kom ihåg att vi har visat att följden $\{a_n\}_n$ konvergerar mot L om och endast om

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \omega > 0 \forall n \in \mathbb{N} (n \geq \omega \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon) \quad (1)$$

Vi vill skriva negationen av det påståendet. För att göra processen tydligare, delar vi upp den utsagan i flera mindre utsagor $R(\varepsilon), Q(\omega, \varepsilon), P(n, \omega, \varepsilon)$, som vi visar nedan:

$$\forall \varepsilon > 0 \underbrace{\exists \omega > 0 \underbrace{\forall n \in \mathbb{N} \underbrace{(n \geq \omega \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)}_{P(n, \omega, \varepsilon)}}_{Q(\omega, \varepsilon)}}_{R(\varepsilon)} \quad (2)$$

På det sättet blir påståendet (1)

$$\forall \varepsilon > 0 R(\varepsilon).$$

Negationen av definitionen av konvergens blir då, enligt tabellen,

$$\exists \varepsilon > 0 \neg R(\varepsilon).$$

Om vi nu omskriver $\neg R(\varepsilon)$ med hjälp av tabellen, får vi

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \omega > 0 \neg Q(\omega, \varepsilon).$$

Nästa steg är att omskriva $\neg Q(\omega, \varepsilon)$, vilket ger

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \omega > 0 \exists n \in \mathbb{N} \neg P(n, \omega, \varepsilon)$$

Notera att $\neg P(n, \omega, \varepsilon)$ blir

$$n \geq \omega \text{ och } \neg(|a_n - L| < \varepsilon)$$

Negationen av påståendet $(|a_n - L| < \varepsilon)$ är

$$|a_n - L| \geq \varepsilon.$$

Slutligen får vi negationen av (1) är

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \omega > 0 \exists n \in \mathbb{N} (n \geq \omega \text{ och } |a_n - L| \geq \varepsilon). \quad (3)$$

Vi kan läsa det som

Det finns $\varepsilon > 0$ sådant att för varje $\omega > 0$ finns det ett $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq \omega$ och $|a_n - L| \geq \varepsilon$.

Intuitivt kan vi tolka utsagan som:

Det finns ett positivt $\varepsilon > 0$, sådant att för godtyckliga stora ω , kan vi alltid hitta ett tillräcklig stort $n \geq \omega$ sådant att avståndet mellan a_n och L är minst ε .

Ett exempel

Vi vill visa att följderna $\{a_n\}_n = \{1/n\}_n$ inte konvergerar mot 1. För att göra det behöver vi hitta ett tal $\varepsilon > 0$ som uppfyller (3). I det fall behöver vi att

$$|a_n - 1| = 1 - \frac{1}{n} \geq \varepsilon,$$

gäller. Vi noterar att för varje $n \geq 3$, gäller

$$1 - \frac{1}{n} \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0.$$

Därför kan vi välja $\varepsilon = \frac{2}{3}$ och notera att för varje $\omega > 0$, om vi låter $n = \lceil \omega \rceil$, så gäller

$$n \geq \omega \text{ och } |a_n - 1| \geq \frac{2}{3} = \varepsilon.$$

Detta visar att villkoret i (3) är uppfyllt, och därmed konvergerar följden inte mot 1.

2.1 Öva med följande påstående

Formulera negationen av följande begrepp från kursen:

2.1 Gränsvärde för en funktion i en punkt c . Vi säger att $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ om

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, (0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon).$$

2.2 Gränsvärde när x går mot oändligheten. Vi säger att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ om

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in D_f, (x > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon).$$

2.3 Oändligt gränsvärde i en punkt c . Vi säger att $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ om

$$\forall K > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, (0 < |x - c| < \delta \implies f(x) < -K).$$

2.4 Oändligt gränsvärde vid oändligheten. Vi säger att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ om:

$$\forall K > 0, \exists M > 0, \forall x \in D_f, (x > M \implies f(x) > K).$$

2.5 Kontinuitet i en punkt c . Funktionen f är kontinuerlig i punkten $c \in D_f$ om

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, (|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

2.6 Likformig kontinuitet på mängden D . Funktionen f är likformigt kontinuerlig på D om:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in D \times D, (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Anmärkning

En mjuk introduktion, med fler detaljer och anpassad till kursen, ges i [LA14]. Om ni vill läsa mer om negationer rekommenderar vi kapitel 4 i [Viv14] (särskilt avsnitt 4.4 och 4.5).

Facit till uppgiften

3.1 Negation av gränsvärde i en punkt c : $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq L$ om

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D_f, (0 < |x - c| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon).$$

3.2 Negation av gränsvärde när $x \rightarrow \infty$: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq L$ om

$$\exists \varepsilon > 0, \forall M > 0, \exists x \in D_f, (x > M \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon).$$

3.3 Negation av oändligt gränsvärde $(-\infty)$ i en punkt c : $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq -\infty$ om

$$\exists K > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D_f, (0 < |x - c| < \delta \wedge f(x) \geq -K).$$

3.4 Negation av oändligt gränsvärde (∞) vid oändligheten: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq \infty$ om

$$\exists K > 0, \forall M > 0, \exists x \in D_f, (x > M \wedge f(x) \leq K).$$

3.5 Negation av kontinuitet i en punkt c (Diskontinuitet): f är inte kontinuerlig i $c \in D_f$ om

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D_f, (|x - c| < \delta \wedge |f(x) - f(c)| \geq \varepsilon).$$

3.6 Negation av likformig kontinuitet på mängden D : f är inte likformigt kontinuerlig på D om

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists (x, y) \in D \times D, (|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

En lista över några vanliga symboler och notationer

Symbol	Betydelse	Exempel
$\in$	Tillhör	$2 \in [1, 3]$
$\notin$	Tillhör inte	$5 \notin (0, 4)$
$\mathbb{N}$	Mängden av alla naturliga tal	$3 \in \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$	Mängden av alla heltal	$-2 \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	mängden av alla rationella tal	$\frac{5}{7} \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$	Mängden av alla reella tal	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	Mängden av alla komplexa tal	$2 + 3i \in \mathbb{C}$
$\{x_1, x_2\}$	Mängden med elementen x_1 och x_2	$\{1, 4\}$
$:$ (eller ‘ ’ eller ‘;’)	Sådana att $\{x : P(x)\}$ Mängden av alla x sådana att påstående $P(x)$ är sann	$\{x : x^2 = 1\}$ $\{x \mid x^2 = 1\}$
$\emptyset$	Tomma mängden	$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\} = \emptyset$
$A \subset B$	A är en delmängd av B . Det betyder att varje element i A är också ett element i B .	$\{1, 2\} \subset \mathbb{N}$
$A \cup B$	Om $x \in A$ medför det att $x \in B$ Unionen av A och B Mängden som innehåller alla element som finns i A men även alla som finns i B , men inga andra $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ eller $x \in B$ Snitt av A och B	$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
$A \cap B$	Mängden som innehåller alla element som A och B har gemensamt $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ och $x \in B$ Differens av A och B	$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$
$A \setminus B$	A minus B Mängden som innehåller alla element som finns i A men inte i B $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ och $x \notin B$	$\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$
A^c eller $\complement A$	Komplement till A Mängden av element som inte tillhör mängden A $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$	$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$

$[a, b]$	Slutet intervall $[a, b] = \{x : a \leq x \text{ och } x \leq b\}$	$[1, 4]$
(a, b)	Öppet intervall $(a, b) = \{x : a < x \text{ och } x < b\}$	$(0, 1)$
$B_r(a)$	öppet klot med centrum a och radie r $B_r(a) = \{x : x - a < r\}$	$B_1(0) = (-1, 1)$
$B_r^*(a)$	punkterat öppet klot med centrum a och radie r $B_r^*(a) = \{x : 0 < x - a < r\} = B_r(a) \setminus \{a\}$	$B_1^*(0) = B_1(0) \setminus \{0\}$

$\forall$	för alla/för varje/för godtycklig	$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$
$\exists$	det finns/existerar/för tillräcklig	$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$
$\exists!$	det finns en unik/existerar en unik	$\exists! x \in \mathbb{R} : x - 4 = 0$
$\Rightarrow$	medför att/ om ... så $P_1 \Rightarrow P_2$ betyder att om påstående P_1 är sann så är P_2	$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$
$\Leftrightarrow$	om och endast om $P_1 \Leftrightarrow P_2$ betyder att om P_1 är sann så är P_2 och om P_1 är falsk så är P_2	$x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$

n, m, k, i, j	Vi använder ofta små bokstäver n, m, k, i, j för naturliga tal eller heltal.	Låt $n \in \mathbb{N}$
x, y, z, r, s, t	Vi använder vanligtvis små bokstäver x, y, z, r, s, t för reella tal	Givet $x \geq 2$
$\mapsto$	Används för att ange hur ett element i en mängd avbildas på ett element i en annan mängd	$x \mapsto x^2$
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$	Funktion med definitionsmängden D till $\mathbb{R}$. Notera att kolontecknet används här för att ge funktionen namnet f	$f(x) = x^2$
$\{a_n\}_n$, eller $\{a_n\}_{n \geq 1}$, eller $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ eller $(a_n)_n \dots$	En (reellt) talföljd. En funktion $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$	$\{a_n\}_n = \{\frac{1}{n}\}_n$

ε	Femte bokstaven i den grekiska alfabetet ‘epsilon’ Det motsvaras av E i det latinska alfabetet. Notation introducerades 1800 talet för att beteckna feluppskattning (“erreur” på franska) i utdata. Vi använder det ofta för att beteckna positiva tal som är godtyckligt små. Grekiska bokstaven ‘delta’	$\varepsilon = 0.00001$
δ	Notationen används för att beteckna feluppskattning i indata. Vi använder det ofta för att beteckna positiva tal som är tillräckligt små.	$0 < \delta < \varepsilon^2$
ω	Den sista bokstaven i den grekiska alfabet kallas för ‘omega’ Vi använder det ofta för att beteckna positiva tal som är tillräckligt stora.	$\omega = 10^6$
∞	Oändlighet i allmänhet, ofta antagen som positiv	$n \rightarrow \infty$
$+\infty$	plus oändlighet	$x \rightarrow +\infty$
$-\infty$	minus oändlighet	$x \rightarrow -\infty$
$\rightarrow$	går mot $n \rightarrow +\infty$ läses n går mot oändligheten	$x \rightarrow a$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	gränsvärde då $x \rightarrow +\infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	gränsvärde för följderna då $n \rightarrow \infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	gränsvärde för f då $x \rightarrow a$	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$
$x \rightarrow a^+$	går mot a från höger	$x \rightarrow 1^+$

Referenser

- [LA14] Lara Alcock, *How to Think About Analysis*, OUP Oxford, 2014.
- [App12] David Applebaum, *Limits, Limits Everywhere: The Tools of Mathematical Analysis*, OUP Oxford, 2012.
- [Gra83] Judith Grabiner, *Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus*, American Mathematical Monthly **90** (1983), no. 3, 185–194.
- [Viv14] Franco Vivaldi, *Mathematical writing*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer, London, 2014.
- [Wik26] Wikipedia, *Lista över matematiska symboler*, 2026. hämtad 2026/01/19.