
Formelsamling för kursen Matematik för ekonomer

Formelsamlingen inte är tillåten vid tentamen, utan endast tänkt som en hjälp vid studierna.

• Potenser

I potensen a^r är basen $a \geq 0$ om exponenten r inte är ett heltal. $a^0 = 1$.

$$a^r a^s = a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad (a^r)^s = a^{rs} \qquad (ab)^r = a^r b^r$$

• Räta linjens ekvation

$$y = kx + m \qquad \text{riktningskoefficienten } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

• Kvadratkomplettering

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

Detta medför att lösningarna till $x^2 + px + q = 0$ ges av $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$.

• Logaritmer

$$e^{\ln b} = b \quad (b > 0) \qquad \ln e^c = c \qquad \ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1$$
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \qquad \ln x^p = p \ln x$$

Logaritmer $\log_a b$ med bas a ges av att $a^{\log_a b} = b$, alltså $\log_a b$ är det tal som a ska upphöjas till för att man ska få b . Här är $a, b \geq 0$.

• Derivata

Definition: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\frac{d}{dx}(Af(x)) = af'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\text{alt. } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \text{ där } y = f(u) \text{ och } u = g(x).$$

Några elementära funktioners derivata:

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Notera att $a^x = e^{(\ln a)x}$, vilket kan deriveras med hjälp av kedjeregeln och $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

- L'Hopitals regel

Om $f(a) = g(a) = 0$ och $g'(a) \neq 0$ så är $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ om detta gränsvärde existerar.

- Funktionsundersökning (i en variabel)

$f(x)$ har en lokal maxpunkt i x om $f'(x) = 0$ och $f''(x) < 0$.

$f(x)$ har en lokal minpunkt i x om $f'(x) = 0$ och $f''(x) > 0$.

$f(x)$ är växande på ett intervall om $f'(x) \geq 0$ på intervallet.

$f(x)$ är avtagande på ett intervall om $f'(x) \leq 0$ på intervallet.

$f(x)$ är konvex på ett intervall om $f''(x) \geq 0$ på intervallet.

$f(x)$ är konkav på ett intervall om $f''(x) \leq 0$ på intervallet.

Extremvärdessatsen: Om $f(x)$ är kontinuerlig på ett intervall $[a, b]$ så antar $f(x)$ största och minsta värde på intervallet. Dessa antas antingen i intervallets ändpunkter, där derivatan är 0 eller där derivatan inte är definierad.

- Approximation av f kring $x = x_0$ givet av Taylorpolynomet av grad n :

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

- Integraler

Analysens huvudsats: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ ($F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$)

Partialintegrering: $\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$

Variabelsubstitution: $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$, där $u = g(x)$

Några elementära funktioners primitiva funktioner:

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \quad (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad \int \ln e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

- Funktionsundersökning (i två variabler)

Om $f'_x(x, y) = 0, f'_y(x, y) = 0$. Sätt $A = f''_{xx}(x, y), B = f''_{xy}(x, y), C = f''_{yy}(x, y)$.

(x, y) är en lokal maxpunkt om $A < 0$ ($C < 0$) och $AC > B^2$.

(x, y) är en lokal minpunkt om $A > 0$ ($C > 0$) och $AC > B^2$.

(x, y) är en sadelpunkt om $AC < B^2$.

Extremvärdessatsen: Om $f(x, y)$ är kontinuerlig på ett slutet begränsat område D så antar $f(x, y)$ största och minsta värde på D . Dessa antas antingen på områdets rand ändpunkter, där de partiella derivatorna är 0 eller där dessa är odefinierade.

- Geometrisk summa och serie

$$a + ak + ak^2 + \cdots + ak^n = a \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} \quad (k \neq 1)$$

$$a + ak + ak^2 + \cdots = \frac{a}{1 - k} \quad \text{om } |k| < 1$$

- Determinanter

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

Sats: Låt A vara koefficientmatrisen till ett kvadratisk linjärt ekvationssystem. Om $\det A \neq 0$ har systemet en unik lösning. Om $\det A = 0$ har systemet antingen ingen lösning alls eller oändligt många lösningar (parameterlösning).
